УДК 519.83; 519.6
DOI: 10.18101/2304-5728-2018-1-52-65

АППРОКСИМАЦИЯ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

© Шориков Андрей Федорович
доктор физико-математических наук, профессор,
Уральский федеральный университет им. Первого президента России Б. Н. Ельцина
Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: afshorikov@mail.ru

© Булаев Владимир Владимирович
инженер-конструктор 1-й категории,
Научно-производственное объединение автоматики им. академика Н. А. Семихатова
Россия, 620075, г. Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 145
E-mail: bulaev1991@mail.ru

© Горанов Александр Юрьевич
инженер-конструктор 1-й категории,
Научно-производственное объединение автоматики им. академика Н. А. Семихатова
Россия, 620075, г. Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 145
E-mail: goranovayu@mail.ru

© Калёв Виталий Игоревич
инженер-конструктор 1-й категории,
Научно-производственное объединение автоматики им. академика Н. А. Семихатова
Россия, 620075, г. Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 145
E-mail: v.i.kalev@urfu.ru

В статье рассматривается задача построения и аппроксимации областей достижимости нелинейной дискретной управляемой динамической системы. В качестве объекта исследования в работе рассматривается класс систем, описываемых векторными нелинейными рекуррентными уравнениями. Производится преобразование относительно опорной фазовой траектории исходной нелинейной рекуррентной модели объекта к дискретному линейному виду. Предполагается, что фазовый вектор системы и управляющий параметр стеснены ограничениями, которые имеют вид выпуклых, замкнутых и ограниченных многогранников с конечным числом вершин в соответствующих конечномерных векторных простран-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00315; проект № 18-01-00544)

ствах. Приводится описание общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости и его модификации. В заключительной части работы изложены результаты компьютерного моделирования и сравнительного анализа точности аппроксимации областей достижимости для конкретных нелинейных дискретных динамических систем с помощью областей достижимости соответствующих линейных дискретных динамических систем, вычисленных с помощью общего и модифицированного рекуррентных алгебраических методов построения областей достижимости.

Ключевые слова: нелинейные дискретные управляемые динамические системы; аппроксимация областей достижимости; выпуклые многогранники; линейное математическое программирование; симплекс-метод.

Введение

В теории управления динамическими системами большое внимание уделяется проблеме построения или оценивания множеств возможных фазовых состояний систем в различные моменты времени. Эти множества, называемые областями достижимости [1; 2], играют важную роль при решении задач управления, наблюдения и прогнозирования. Точное или приближенное построение областей достижимости нелинейной управляемой динамической системы предоставляет ряд преимуществ и позволяет оценить допустимые фазовые состояния системы, что порой существенно упрощает решение, например, задач оптимизации гарантированного результата (минимаксного) наблюдения или управления [1–3]. При этом практическое построение областей достижимости, особенно нелинейных динамических систем большой размерности, представляет собой весьма сложную задачу, поэтому особого внимания заслуживают эффективные методы их аппроксимации. В данной статье авторами предлагается методика аппроксимации областей достижимости исходной нелинейной дискретной управляемой динамической модели с помощью построения точной области достижимости соответствующей линейной дискретной модели, сформированной путем линеаризации вдоль опорной траектории исходной нелинейной динамической системы, на основе модификаций общего рекуррентного алгебраического метода, подробно изложенного в работах [2; 3]. В работе предлагается вариант модификации общего рекуррентного алгебраического метода, который позволяет существенно сократить время вычислительного процесса, затрачиваемого на построение точных и аппроксимирующих областей достижимости дискретных управляемых динамических систем. Полученные в данной статье результаты основываются на работах [1–6] и могут быть использованы при компьютерном моделировании реальных динамических процессов, а также при разработке и создании систем оптимизации результатов управления и поддержки принятия управленческих решений для важных прикладных задач в технических, экономических, научных и других системах.

1. Постановка задачи

Рассматривается класс объектов, динамика которых описывается системой нелинейных рекуррентных уравнений следующего вида:

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)),\ t \in \{0, 1, \ldots, T-1\} = \overline{0, T-1}, \tag{1}$$

где $x(t)$ — фазовый вектор объекта в момент времени t, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (здесь и далее $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство вектор-столбцов); $u(t)$ — вектор управляющих воздействий (вектор управления) в момент времени t, $u(t) \in \mathbb{R}^p$; $f : \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ — заданная нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по $x(t)$ и $u(t)$; $T \in \mathbb{N}$ (здесь и далее $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел).

Поскольку построение областей достижимости для нелинейных дискретных управляемых динамических систем вида (1) представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу, появляется необходимость в проведении дополнительных операций, которые позволяют преобразовать исходные нелинейные уравнения модели к линейному виду на основе осуществления процесса линеаризации относительно заданной опорной траектории [1; 5]. Такой процесс линеаризации нелинейных рекуррентных уравнений является хорошо изученным в литературе. Поэтому в данной работе мы опускаем вопросы линеаризации, т. е. изначально предполагаем, что в соответствие исходной нелинейной модели вида (1) уже поставлена ее некоторая линейная аппроксимация, например, с помощью процедур из [1; 5].

Таким образом, в дальнейшем для исходного объекта будем рассматривать соответствующую (1) его линейную модель, которая на целочисленном промежутке времени $\overline{0, T-1}$ имеет вид:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ \ t \in \overline{0, T-1}, \tag{2}$$

где $A(t)$ — матрица состояния системы, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B(t)$ — матрица управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$; предполагается, что $\forall\, t \in \overline{0, T-1} : \det(A(t)) \neq 0$.

В дальнейшем предполагается, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Начальный фазовый вектор систем (1) и (2) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, которое имеет вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$x(0) = x_0 \in \mathbf{X}(0) \subset \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Условие 2. Фазовый вектор систем (1) и (2) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, имеющему вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Условие 3. Вектор управления систем (1) и (2) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, которое имеет вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$u(t) \in \mathbf{P}(t) \subset \mathbb{R}^p \ \forall t \in \overline{0, T-1}. \qquad (5)$$

Тогда содержательно рассматриваемая в работе задача может быть сформулирована следующим образом.

Для рассматриваемой на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$ линейной дискретной управляемой динамической системы (2)–(5) требуется для любого целочисленного момента времени $\vartheta \in \overline{1,T}$ определить множество всех возможных (допустимых) фазовых состояний системы $x(\vartheta)$, которые являются финальными состояниями фазовых траекторий системы, соответствующих всем парам $(x_0, u_\vartheta(\cdot))$, $u_\vartheta(\cdot) = \{u_\vartheta(t)\}_{t \in \overline{0,\vartheta-1}}$, $\forall t \in \overline{0, \vartheta-1} : u_\vartheta(t) \in \mathbf{P}(t)$, т. е. описать ее область достижимости на момент времени ϑ.

Введем строгое определение понятия области достижимости для дискретной динамической системы (2)–(5).

Определение 1. Областью достижимости фазовых состояний линейной дискретной управляемой системы (2)–(5) на момент времени $\vartheta \in \overline{\tau+1, T}$, соответствующей паре $(\tau, X(\tau)) \in \overline{0, T-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^n}$ (здесь и далее символом $\mathbf{2}^Y$ обозначается множество всех подмножеств множества Y), называется множество

$$\mathbf{G}(\tau, X(\tau); \vartheta) = \{x(\vartheta) \mid x(\vartheta) \in \mathbb{R}^n, x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \in \mathbf{X}(t+1), \\ t \in \overline{\tau, \vartheta-1}, u(t) \in \mathbf{P}(t), x(\tau) \in X(\tau)\}. \qquad (6)$$

В силу линейности уравнения (2), описывающего динамику рассматриваемого объекта, особенностей геометрических ограничений (3)–(5) и конечности рассматриваемого целочисленного промежутка времени $\overline{1,T}$ область достижимости $\mathbf{G}(0, \mathbf{X}(0); \vartheta)$ представляет собой выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник в $\mathbb{R}^n$ с конечным числом вершин для любого момента времени $\vartheta \in \overline{1,T}$ [2–4]. Кроме того, для такой области достижимости имеет место важное полугрупповое свойство вида:

$$\mathbf{G}(0, \mathbf{X}(0); t+1) = \mathbf{G}(t, X(t); t+1), \ t \in \overline{1, T-1}, \qquad (7)$$

где $X(t) = \mathbf{G}(0, \mathbf{X}(0); t)$ — область достижимости системы (2)–(5), соответствующая моменту времени *t*.

2. Общий рекуррентный алгебраический метод построения области достижимости

На основе полугруппового свойства областей достижимости (7), свойств систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, а также возможностей симплекс-метода для решения задач линейного математического программирования (ЛМП) и использования преобразования описания многогранников с помощью соответствующих систем линейных алгебраических неравенств в их описание с помощью конечного числа вершин и наоборот в трудах [2–4] был разработан эффективный общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости для линейных дискретных управляемых динамических систем, суть которого состоит в следующем.

Опираясь на свойство (7), задача построения области достижимости $\mathbf{G}(0,\mathbf{X}(0);T)$ управляемой динамической системы (2)–(5) на заданном промежутке времени $\overline{0,T}$ может быть сведена к реализации построения рекуррентной последовательности одношаговых областей достижимости: $\mathbf{G}\left(t,X(t);t+1\right)$, $t\in\overline{0,T-1}$.

Поскольку область достижимости $X(t+1)=\mathbf{G}(t,\mathbf{X}(0);t+1)$ — выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин для всех $t\in\overline{0,T-1}$, то любая его точка $x(t+1)\in X(t+1)$ может быть представлена как выпуклая комбинация его вершин [8]:

$$\forall x(t+1)\in X(t+1)\ \exists\lambda\in\mathbb{R}^m : x(t+1)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i^{(v)}(t+1),\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\equiv 1,$$

где $x_i^{(v)}(t+1)$ — i-я вершина многогранника $X(t+1)$, $x_i^{(v)}(t+1)\in\mathbb{R}^n$, $i\in\overline{1,m}$.

В таком случае при построении множеств достижимости $X(t+1)$, $t\in\overline{0,T-1}$ удобно воспользоваться вершинным описанием (*V-Rep*) многогранников [7,8], т. е.:

$$X(t+1)=\operatorname{conv}\mathbf{\Gamma}_n\big(X(t+1)\big), \tag{8}$$

где $\mathbf{\Gamma}_n\big(X(t+1)\big)$ — множество всех вершин многогранника $X(t+1)\subset\mathbb{R}^n$, $\mathbf{\Gamma}_n\big(X(t+1)\big)=\left\{x_i^{(v)}(t+1)\right\}_{i\in\overline{1,m}}$; $\operatorname{conv} Y$ — выпуклая оболочка множества Y.

Кроме вершинного описания многогранников для построения областей достижимости $X(t+1)$ будем также использовать их фасетное описание (*H-Rep*) [6], то есть как решение системы из $k\in\mathbb{N}$ линейных неравенств:

$$X(t+1)=\left\{x(t+1)\in\mathbb{R}^n \mid Hx(t+1)\le b\right\},\ H\in\mathbb{R}^{k\times n},\ b\in\mathbb{R}^k. \tag{9}$$

Фасетное описание (9) областей достижимости $X(t+1)=\mathbf{G}(t,\mathbf{X}(0);t+1)$ используется для реализации нахождения пересечения двух множеств. Описания (8) и (9) называются двойным описанием многогранника. Операции формирования двойственного описания области достижимости *V-Rep*↔*H-Rep* и *H-Rep*↔*V-Rep* реализуются в данной работе с помощью метода двойного описания, который подробно отражен в работах [2–4].

Далее в виде псевдокода опишем общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости [2–4] применительно к динамической системе (2)–(5) на всем рассматриваемом промежутке времени $\overline{0,T}$.

Инициализация: сформировать множество $\mathbf{\Gamma}_n\left(X(0)\right)=\{x_0\}$.

for each t **from** 0 **to** $T-1$ **begin**

1. Сформировать множество $\mathbf{\Gamma}_p\left(\mathbf{P}(t)\right)$ вершин многогранника $\mathbf{P}(t)$.
2. Вычислить следующие конечные множества, характеризующие свободное и вынужденное движения системы (2)–(5):

$$\hat{X}_x(t+1)=\left\{\hat{y}(t+1)\in\mathbb{R}^n \mid \hat{y}(t+1)=A(t)x(t),\ x(t)\in\mathbf{\Gamma}_n\left(X(t)\right)\right\},$$

$$\hat{X}_u(t+1)=\left\{\hat{z}(t+1)\in\mathbb{R}^n \mid \hat{z}(t+1)=B(t)u(t),\ u(t)\in\mathbf{\Gamma}_p\left(\mathbf{P}(t)\right)\right\},$$

$$\hat{X}(t+1)=\left\{\hat{x}(t+1)\in\mathbb{R}^n \mid \hat{y}(t+1)+\hat{z}(t+1),\right.$$
$$\left.\hat{y}(t+1)\in\hat{X}_x(t+1),\ \hat{z}(t+1)\in\hat{X}_u(t+1)\right\}.$$

Отметим, что здесь множество $\hat{X}(t+1)$ содержит как граничные, так и внутренние точки, т. е. $\hat{X}(t+1)\neq\mathbf{\Gamma}_n\left(\hat{X}(t+1)\right)$.

3. Найти множество $\overline{X}(t+1)$ всех вершин множества $\hat{X}(t+1)$:

$$\overline{X}(t+1)=\mathbf{\Gamma}_n\left(\hat{X}(t+1)\right)=\left\{x_i^{(v)}(t+1)\right\}_{i\in\overline{1,m}}.$$

4. Перейти к фасетному описанию множества $\overline{X}(t+1)$: (*V-Rep*↔*H-Rep*).
5. Найти пересечение множества $\overline{X}(t+1)$ с множеством фазовых ограничений $\mathbf{X}(t+1)$, то есть вычислить:

$$\tilde{X}(t+1)=\overline{X}(t+1)\cap\mathbf{X}(t+1).$$

6. Получить вершинное описание множества $\tilde{X}(t+1)$: (*H-Rep*↔*V-Rep*).

end

Поиск множества всех вершин области достижимости осуществляется с помощью решения ряда задач ЛМП с использованием модифицированного симплекс-метода. Постановка этой задачи и алгоритм ее решения были подробно изложены в работах [2–4].

С точки зрения вычислительной сложности быстродействие общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости напрямую зависит от подхода к решению задач ЛМП. Поскольку симплекс-метод не является полиномиальным алгоритмом относительно объема входной информации, авторами была разработана модификация общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости, направленная на сокращение размера симплекс-таблиц в решаемых задачах ЛМП [6]. Кроме того, очевидно, что количество вершин финальной области достижимости зависит от длины целочисленного промежутка времени $\overline{0,T}$. Поэтому при втором направлении предлагаемого в данной работе модифицированного общего рекуррентного метода построения областей достижимости используется метод аппроксимации промежуточных вспомогательных множеств, изложенный в работе [6].

Далее в виде псевдокода опишем алгоритм для поиска множества всех вершин области достижимости динамической системы (2)–(5).

Входная информация: множество $\tilde{X}(t+1)$, содержащее $\tilde{m}$ точек в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Выходная информация: Описание области достижимости $X(t+1) = \mathbf{G}(t, \mathbf{X}(0); t+1)$ в виде множества всех ее вершин $\mathbf{\Gamma}_n\left(X(t+1)\right)$ и выпуклой оболочки этого множества.

1. Сортировать все точки множества $\tilde{X}(t+1)$ относительно удаленности их от центра наименьшего многомерного параллелепипеда $\mathbf{\Pi}$, содержащего множество $\tilde{X}(t+1)$, сформировав таким образом множество $\tilde{X}^{\text{сорт}}(t+1)$.
2. Взять первые $(n+1)$ наиболее отдаленные от центра параллелепипеда $\mathbf{\Pi}$ точки множества $\tilde{X}^{\text{сорт}}(t+1)$ и сформировать множество точек претендентов:
$$\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1) = \left\{\tilde{x}_i^{\text{сорт}}(t+1)\right\}_{i \in \overline{1,n+1}}.$$
3. Аналогично [2–4], на основании решения соответствующих задач ЛМП, сформировать множество всех вершин выпуклой многогранной оболочки множества $\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1)$ путем реализации следующего алгоритма:

for each i **from** $n+2$ **to** $\tilde{m}$ **begin**

Проверить, принадлежит ли точка $\tilde{x}_i^{\text{сорт}}(t+1)$ крайней опорной гиперплоскости многогранника $\operatorname{conv}\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1)$. Если это условие выполняется, то эта точка помещается в множество точек претендентов $\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1)$, иначе — исключается и не присутствует в дальнейшей работе алгоритма.

end

Как только в множестве $\tilde{X}^{\text{сорт}}(t+1)$ не останется элементов, то уточненное множество $\tilde{X}^{\text{пр}}(t+1)$ описывается массивом: $\tilde{X}^{\text{пр}}_{\text{уточ}}(t+1) = \left\{\tilde{x}_i^{\text{сорт}}(t+1)\right\}_{i\in\overline{1,k}}$, где $(k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)$.

4. Используя комбинацию алгоритмов из [2–6], сформировать множество всех вершин многогранника $\operatorname{conv}\tilde{X}^{\text{пр}}_{\text{уточ}}(t+1)$, т. е. вычислить множество:

$$\mathbf{\Gamma}_n\left(\operatorname{conv}\left(\tilde{X}^{\text{пр}}_{\text{уточ}}(t+1)\right)\right) = \left\{\tilde{x}_i^{\text{сорт}}(t+1)\right\}_{i\in\overline{1,s}} = \mathbf{\Gamma}_n(X(t+1)),$$

где $(s \in \mathbb{N}) \wedge (s \leq k)$.

5. Сформировать искомое множество $X(t+1) = \operatorname{conv}\mathbf{\Gamma}_n\left(X(t+1)\right) = \mathbf{G}(t, \mathbf{X}(0); t+1)$.

Отметим, что в этом алгоритме для нахождения множества всех вершин $\mathbf{\Gamma}_n\left(X(t+1)\right)$ требуется решить большее число задач ЛМП значительно меньшего размера, чем при использовании алгоритма, основанного на общем рекуррентном алгебраическом методе [2–4], что в целом приводит к более высокой производительности вычислительного процесса при построении области достижимости $X(t+1)$, следовательно, и искомой области достижимости $\mathbf{G}(0, \mathbf{X}(0); T)$.

3. Численный пример

В данном разделе статьи демонстрируется эффективность вышеизложенного общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости линейных дискретных динамических систем и его модификации на нескольких численных примерах. Алгоритмы предложенного метода и его модификации реализованы в программной среде MATLAB R2014a.

Пример 1. Система второго порядка

Рассмотрим аппроксимацию областей достижимости для нелинейной дискретной модели Лотки-Вольтерры:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) + T_0(ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) + eu(t)), \\ x_2(t+1) &= x_2(t) + T_0(-cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t)), \end{aligned} \tag{10}$$

где $t \in \overline{0, T-1}$, $a = 0.9$, $b = 0.003$, $c = 0.8$, $d = 0.002$, $e = 0.85$, $T_0 = 2\pi / T\sqrt{ac}$, $T = 60$, $x_1(0) = 410$, $x_2(0) = 300$.

Данная дискретная управляемая динамическая система линеаризована вдоль опорной траектории, реализованной при отсутствии управления, то есть при $t \in \overline{0, T-1} : u(t) \equiv 0$. Тогда сформированная линейная модель в векторно-матричной форме, соответствующая системе (10), имеет вид:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

где $t \in \overline{0, T-1}$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $x(0) = (1\,;2)^T$, $u(t) \in \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^1$, матрицы $A(t)$ и $B(t)$ принимают значения

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 + T_0 a - T_0 b\tilde{x}_2(t) & -T_0 b\tilde{x}_1(t) \\ T_0 d\tilde{x}_2(t) & 1 - T_0 c + T_0 d\tilde{x}_1(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} T_0 e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что управляющее воздействие $u(t)$ принимает свои значения из множества $\mathbf{P}(t) = \{u(t) \mid |u(t)| \le 0.3\}$, $\forall t \in \overline{0, T-1}$.

Сечения по времени области достижимости нелинейной дискретной системы (10) и их аппроксимация, полученная с помощью предлагаемого модифицированного метода, иллюстрируются на рис. 1.

В таблице 1 приведены основные параметры (объем многогранника, количество вершин) области достижимости $\mathbf{G}(0, x_0, T)$, т. е. множества всех допустимых финальных фазовых состояний линейной системы, вычисленной с помощью общего рекуррентного алгебраического метода и его модификации, а также дополнительные показатели (время вычисления), позволяющие сравнить быстродействие общего и модифицированного алгоритмов.

Пример 2. Система четвертого порядка

Рассмотрим применимость алгоритма аппроксимации областей достижимости для нелинейной дискретной модели вида:

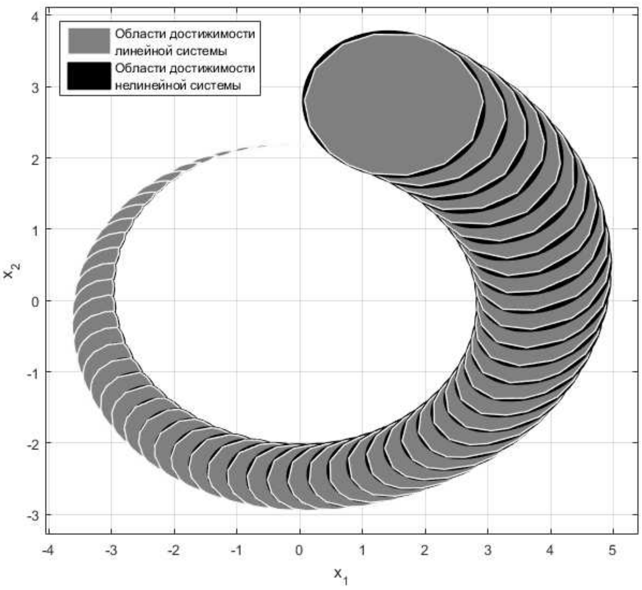

Рис. 1. Аппроксимация сечений области достижимости нелинейной системы (Пример 1)

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) + 0.5\sin x_2(t) + \big(1 + 0.5\cos x_1(t)\big)u_1(t), \\ x_2(t+1) &= x_2(t) + a x_1(t) + u_2(t), \\ x_3(t+1) &= x_3(t) + b x_2(t) + u_1(t), \\ x_4(t+1) &= x_4(t) + c x_3(t) + u_2(t), \end{aligned} \tag{11}$$

где $t \in \overline{0,7}$, $a = 0.15$, $b = -0.8$, $c = 0.25$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 1$.

Система линеаризована вдоль опорной траектории $\tilde{x}(t) = \overline{x}(\cdot\,; \overline{0,T}, x(0), \tilde{u}(\cdot))$, реализованной при действии постоянного управляющего воздействия $u_{1,2}(t) \equiv 0.5, \forall t \in \overline{0,7}$. Тогда сформированная и соответствующая системе (11) линейная модель в векторно-матричной форме имеет вид:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

где $t \in \overline{0,7}$, $x(t) \in \mathbb{R}^4$, $x(0) = (1\,; -1\,; 1\,; 1)^T$, $u(t) \in \mathbf{P}(t) \subset \mathbb{R}^2$, матрицы $A(t)$ и $B(t)$ имеют следующий вид:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0.5\cos\tilde{x}_2(t) & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 + 0.5\cos\tilde{x}_1(t) & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор управления $u(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big) \in \mathbb{R}^2$ стеснен ограничением:

$$\mathbf{P}(t) = \{u_1(t), u_2(t) \,|\, |u_1(t)| \le 1, |u_2(t)| \le 1\}, \forall t \in \overline{0,7}\,.$$

Проекции на плоскость финальной области достижимости нелинейной дискретной системы (11) и ее аппроксимации, полученные с помощью модифицированного метода, иллюстрируются на рис. 2.

В таблице 1 приведены основные параметры финальной области достижимости $\mathbf{G}(0, x_0, T)$ линейной системы, полученной с помощью обобщенного рекуррентного алгебраического метода и модификации.

Таблица 1

Результаты моделирования

Система	Алгоритм	Время работы, с	Кол-во вершин	Объем многогранника
Пример 1	Общий алгоритм	0.05	120	4.62
	Модифицированный	0.01	16	4.34
Нелинейная система 2 порядка		–	120	4.68
Пример 2	Общий алгоритм	4.19	756	40808.17
	Модифицированный	0.76	153	34764.47
Нелинейная система 4 порядка		–	436	47795.76

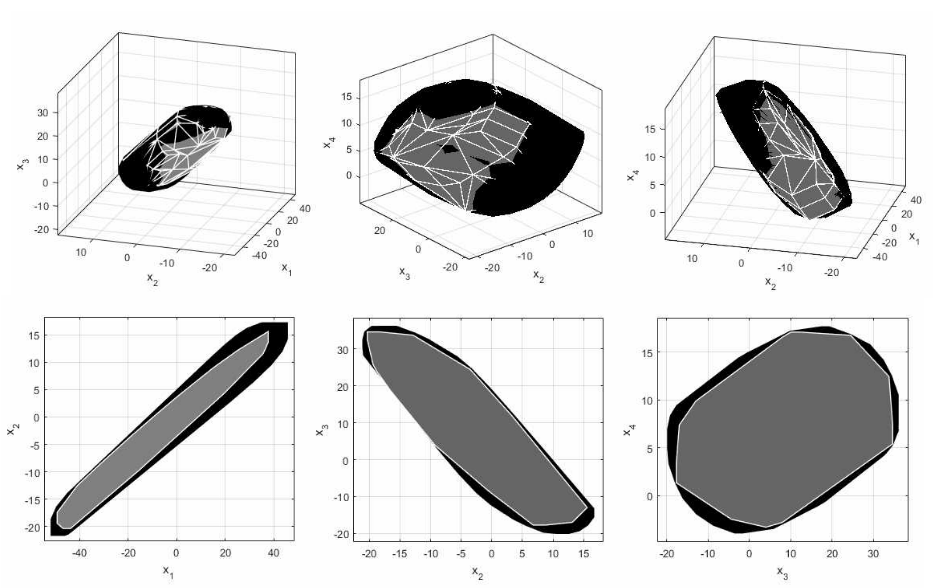

Рис. 2. Проекции финальной области достижимости из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$ (серый — проекции областей достижимости линейной системы, черный — проекции областей достижимости нелинейной системы)

Заключение

В работе описывается метод аппроксимации областей достижимости нелинейных дискретных систем с помощью построения областей достижимости соответствующей ей линейной системы. Предложенный алгоритм базируется на общем рекуррентном алгебраическом методе [2–4], относящемся к классу точных методов, дающих описание всех допустимых фазовых состояний линейной дискретной управляемой динамической системы в заданный момент времени. В работе также описана модификация общего рекуррентного алгебраического метода, основанная на результатах, полученных в работах [5; 6], и направлена на сокращение операций и уменьшение времени реализации вычислительного процесса.

В качестве численного эксперимента была рассмотрена задача построения точных областей достижимости для двух динамических систем 2-го и 4-го порядков, описываемых исходными нелинейными дискретными моделями. Представленные в статье результаты реализации компьютерного моделирования действия разработанных алгоритмов построения областей достижимости продемонстрировали их эффективность на этих двух содержательных примерах. При этом применение модификации общего рекуррентного алгебраического метода позволяет заметно сократить время вычислений при моделировании построения областей достижимости для рассматриваемых примеров.

Программная реализация построения областей достижимости осуществлена в программной среде MATLAB R2014a, где были реализованы общий рекуррентный алгебраический метод и соответствующие численные алгоритмы построения областей достижимости линейных дискретных динамических систем и различные версии его модификаций.

Литература

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

2. Шориков А. Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. 242 с.

3. Тюлюкин В. А., Шориков А. Ф. Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы // Негладкие задачи оптимизации и управление. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. С. 55–61.

4. Тюлюкин В. А., Шориков А. Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 4. С. 115–127.

5. Шориков А. Ф., Горанов А. Ю. Методика аппроксимации области достижимости нелинейной управляемой динамической системы // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 2. С. 112–121.

6. Булаев В. В. Об использовании симплекс-метода для аппроксимации выпуклых многогранников // Труды второй научно-технической конференции молодых ученых Уральского энергетического института. Екатеринбург: Изд-во Уральск. федер. ун-та, 2017. С. 397–399.

7. Черников С. Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.

8. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М.: Сов. радио, 1964. 736 с.

APPROXIMATION OF ATTAINABILITY DOMAINS OF NONLINEAR DISCRETE-TIME CONTROLLED DYNAMICAL SYSTEMS

Andrey F. Shorikov

Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,

Department of Applied mathematics, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin

19 Mira St., Ekaterinburg 620002, Russia

Vladimir V. Bulaev

Design Engineer,

Scientific and Production Association of Automatics named after Academician N. A. Semikhatov

145 Mamina-Sibiryaka St., Ekaterinburg 620075, Russia

Aleksandr Yu. Goranov
Design Engineer
Scientific and Production Association of Automatics named after Acadmician N. A. Semikhatov
145 Mamina-Sibiryaka St., Ekaterinburg 620075, Russia

Vitaliy I. Kalev
Design Engineer
Scientific and Production Association of Automatics named after Academician N. A. Semikhatov
145 Mamina-Sibiryaka St., Ekaterinburg 620075, Russia

The article deals with the problem of constructing and approximating the attainability domains of a nonlinear discrete controlled dynamical system. The object of study is the class of controlled dynamical systems described by vector nonlinear recurrent equations. The initial nonlinear discrete-time model is transformed to a discrete linear form with respect to the reference phase trajectory. It is assumed that the phase vector of the system and the control parameter are constrained by convex, closed and bounded polyhedral sets with a finite number of vertices in the corresponding finite-dimensional vector spaces. We have given a description of the general recurrent algebraic method for constructing domains of attainability and its modification. In conclusion the article describes the results of computer simulation and comparative analysis of the attainability domains of approximation accuracy for specific nonlinear discrete-time dynamical systems using the attainability domains of the corresponding linear discrete-time dynamical systems constructed with general and modified recurrent algebraic methods.

Keywords: nonlinear discrete-time controlled dynamical system; approximation of attainability domains; convex polyhedra; linear mathematical programming; simplex method.

References

1. Krasovskii N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of Motion Control]. Moscow: Nauka Publ., 1968. 476 p.

2. Shorikov A. F. *Minimaksnoe otsenivanie i upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh* [Minimax Estimation and Control in Discrete Dynamical Systems]. Ekaterinburg: Ural University Publ., 1997. 242 p.

3. Tyulyukin V. A., Shorikov A. F. Ob odnom algoritme postroeniya oblasti dostizhimosti lineinoi upravlyaemoi sistemy [About One Algorithm for Constructing the Attainability Domain of a Linear Controlled System]. *Negladkie zadachi optimizatsii i upravlenie — Nonsmooth Optimization Problems and Control.* Sverdlovsk: Ural Branch of USSR AS. 1988. Pp. 55–61.

4. Tyulyukin V. A., Shorikov A. F. Algoritm resheniya zadachi terminal'nogo upravleniya dlya lineinoi diskretnoi sistemy [Algorithm for Solving the Problem of Terminal Control for a Linear Discrete System]. *Avtomatika i*

telemekhanika — Automation and Telemechanics. 1993. No. 4. Pp. 115–127.

5. Shorikov A. F., Goranov A. Yu. Metodika approksimatsii oblasti dostizhimosti nelineinoi upravlyaemoi dinamicheskoi sistemy [A Method for Approximating the Attainability Domain of a Nonlinear Controlled Dynamical System]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya — Applied Mathematics and Control Problems.* 2017. No. 2. Pp. 112–121.

6. Bulaev V. V. *Ob ispol'zovanii simpleks-metoda dlya approksi-matsii vypuklykh mnogogrannikov* [About Use of Simplex Method for Approximating Convex Polyhedra]. Proc. 2nd Scientific and Technical Conference of Young Scientists of Ural Energy Institute. Ekaterinburg: Ural Federal University Publ., 2017. Pp. 397–399.

7. Chernikov S. N. Lineinye neravenstva [Linear Inequalities]. Moscow: Nauka Publ., 1968. 488 p.

8. Yudin D. B., Gol'shtein E. G. Zadachi i metody lineinogo programmirovaniya [Problems and Methods of Linear Programming]. Moscow: Sovetskoe radio Publ., 1964. 736 p.