МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

УДК 004.925.8
DOI: 10.18101/2304-5728-2018-1-83-94

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБОБЩЕННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ БЕЗЬЕ

© Аюшеев Тумэн Владимирович
доктор технических наук, доцент,
Бурятский государственный университет
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: atv62@bk.ru

© Булычев Роман Николаевич
аспирант,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
E-mail: buly4ev-roman@ya.ru

В статье рассматривается метод построения модели трехмерных параметрических рациональных тел и их описание с помощью обобщенной интерполяции Безье. Параметрические тела могут моделировать как форму, так и анизотропное внутреннее пространство. Приведены три вида порций тел, часто используемых в качестве начальных и граничных условий при численном моделировании. Несколько порций могут быть соединены вместе, чтобы сформировать составное тело сложной формы. Непрерывность между порциями может быть определена так же, как в модели Безье. Предложенная методология и методика моделирования применялись при описании процесса послойного деформирования листового металла при изготовлении тонкостенных деталей на оборудовании с программным управлением.

Ключевые слова: параметрические тела; обобщенная интерполяция Безье; послойное деформирование; многослойная конструкция.

Введение

Интенсивное развитие вычислительной техники и оборудования, в частности, оборудования с числовым программным управлением (ЧПУ) и средств создания управляющих программ (УП), в течение последних 10–20 лет привело к возникновению нового процесса в области листовой штамповки деталей — послойному деформированию (с англ. *Incremental sheet forming*) [1]. Эта технология позволяет быстро и экономично изготавливать детали из листового металла со сложной поверхностью непосредственно из данных автоматизированного проектирования (CAD) без дорогостоящего оборудования и оснастки. Данный процесс может использоваться для быстрого прототипирования и мелкосерийного произ-

водства. Он нашел широкое применение в аэрокосмической, судостроительной и автомобильной промышленности [2].

Процесс послойного деформирования по ряду параметров схож с процессом ротационной вытяжки. Отличием является то, что деталь обычно остается неподвижной, а процесс деформирования листовой заготовки осуществляется за счет перемещения деформирующего инструмента (давильника) по контуру получаемой детали, послойно углубляясь с каждым проходом (рис. 1). Перемещение инструмента происходит за счет ЧПУ установки по координатам из УП.

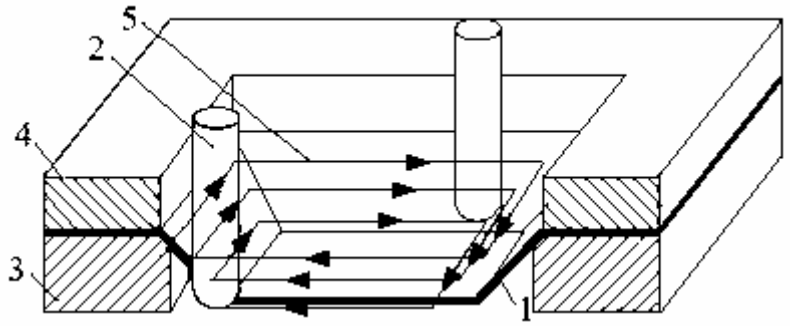


Рис. 1. Схема послойного деформирования листовой заготовки:
1 — заготовка; 2 — давильник; 3 — станина;
4 — прижим; 5 — траектория движения давильника

Термин *incremental sheet forming* (ISF) характеризует множество процессов, при которых в каждый момент времени обработки деформирование носит локальный характер, а область местного деформирования постепенно распространяется на всю деталь.

При движении давильника по замкнутому контуру образуется поверхность слоя в результате осаживания листовой заготовки. При этом получаемые промежуточные поверхности слоев плавно меняются от одной граничной поверхности до другой и не пересекаются между собой. Количество слоев зависит от требуемой точности получения внутреннего или внешнего теоретического контура изделия. Таким образом, процесс формообразования поверхности листовой заготовки при послойном деформировании представляет собой многослойную конструкцию. При численном моделировании такой конструкции используют поверхностные модели [3–5]. Для описания поверхности каждого слоя необходимо преобразование каркаса исходной поверхности с учетом изменения толщины слоя. Кроме того, с увеличением количества слоев растет объем перерабатываемой информации.

Наиболее перспективным для численного моделирования таких конструкций представляется метод параметрического твердотельного моделирования. В этом методе тело представляется совокупностью ограничивающих его объем криволинейных восьмиугольных порций, граничные

поверхности которых заданы параметрически. Используя метод [6], можно построить уравнение порции тела, обеспечивая необходимую непрерывность по производным на граничных поверхностях тела. Эта конструкция определяет порцию тела как совокупность ограничивающих его поверхностей (граничное представление тел, B-REP, Boundary Representation), используя только информацию о границах поверхности тела и некоторые вспомогательные скалярные функции переменных u, v и w. Эти функции, называемые функциями сопряжения, соединяют воедино отдельные граничные поверхности, чтобы получить одно корректно определенное тело. В данной работе уравнение порции было получено на основе применения обобщенной интерполяции Эрмита. Для описания граничных поверхностей порции тела применялись бикубические параметрические сплайны. Такой метод построения уравнения порции тела используют, когда известна форма моделируемого объекта. На практике часто приходится корректировать форму на различных этапах проектирования изделия. Управлять формой кривой по величине касательных векторов достаточно сложно. Поэтому при проектировании изделий, когда присутствуют начальные несовершенства формы или ее отдельные участки описываются строго аналитическими линиями, например, кривыми второго порядка, предпочтение проектировщиков отдается моделированию кривых в форме Безье.

В статье рассматривается задача построения уравнения порции рационального тела с применением обобщенной интерполяции Безье. Предложенный метод позволит устранить указанный недостаток эрмитовой формы представления тела.

1. Постановка задачи

Пусть нам задан массив узловых точек поверхности тела моделируемого объекта. Построена сетка кривых, определяющая поверхность тела. Сетка кривых делит поверхность на четырехугольные порции, которые ограничены u, v, w кривыми. Пусть параметрическая длина этих кривых изменяется в пределах от 0 до 1. Тогда $\mathbf{r}(u,v,w)$, $0<u,v,w<1$, представляет внутреннее пространство порции тела, а $\mathbf{r}(i,v,w)$, $\mathbf{r}(u,j,w)$, $\mathbf{r}(u,v,k)$, $i,j,k=0;1$ определяют ее известные граничные поверхности (рис. 2). Необходимо определить функцию $\mathbf{r}(u,v,w)$, которая при $u=i$, $v=j$, $w=k$ представляет нужную граничную поверхность порции тела.

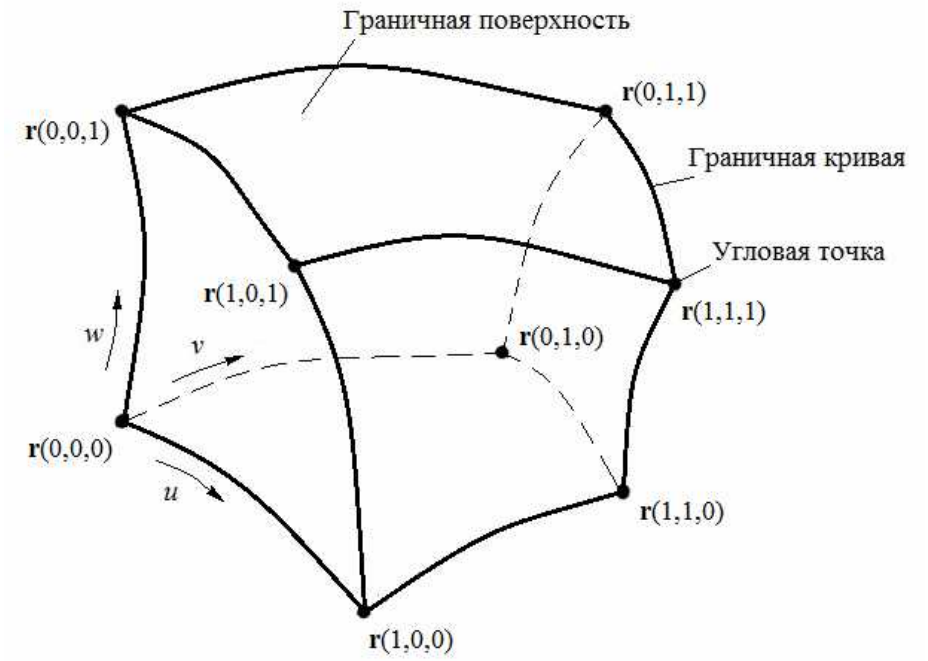


Рис. 2. Порция трехпараметрического тела

2. Описание порции рационального тела

В общем случае трехмерный радиус-вектор порции рационального тела степени (l,m,n) можно записать в виде [7]:

$$\mathbf{r}(u,v,w)=\frac{\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\mathbf{b}_i^l(u)\mathbf{b}_j^m(v)\mathbf{b}_k^n(w)\mathbf{g}_{ijk}\mathbf{p}_{ijk},}{\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\mathbf{b}_i^l(u)\mathbf{b}_j^m(v)\mathbf{b}_k^n(w)\mathbf{g}_{ijk},}, \quad (1)$$

где $u,v,w\in[0,1]$, $\mathbf{p}_{ijk}\in R^3$, $\mathbf{b}_i(t)$ — базисные функции, $\mathbf{g}_{ijk}$ — вес полюса $\mathbf{p}_{ijk}$.

Порция рационального тела общего вида представляет собой криволинейный каркас, состоящий из 8 угловых точек, 12 граничных кривых и 6 граничных поверхностей. В нашем случае для описания порции тела многослойной конструкции в качестве базисных функций использовались рациональные функции Безье малых степеней. Рассмотрим их более подробно.

2.1. Порция рационального тела степени (1,1,1)

Порция рационального тела степени (1,1,1) представляет собой трилинейную интерполяцию восьми полюсов $\mathbf{p}_{ijk}$, которые совпадают с угловыми точками каркаса, определяемая как:

$$\mathbf{r}(u,v,w)=\frac{\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{000}\mathbf{p}_{000} & \mathbf{g}_{010}\mathbf{p}_{010}\\ \mathbf{g}_{100}\mathbf{p}_{100} & \mathbf{g}_{110}\mathbf{p}_{110}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{000} & \mathbf{g}_{010}\\ \mathbf{g}_{100} & \mathbf{g}_{110}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}}(1-w)+$$

$$\frac{\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{001}\mathbf{p}_{001} & \mathbf{g}_{011}\mathbf{p}_{011}\\ \mathbf{g}_{101}\mathbf{p}_{101} & \mathbf{g}_{111}\mathbf{p}_{111}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{001} & \mathbf{g}_{011}\\ \mathbf{g}_{101} & \mathbf{g}_{111}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}}w, \qquad (2)$$

где $\mathbf{p}_{ijk}=\mathbf{r}(i,j,k)$, $i,j,k\in\{0,1\}$.

Порция тела такого вида имеет некоторые очевидные свойства:

• *Производные*: частные производные по u, v, w имеют очевидную геометрическую интерпретацию и совпадают с производными по параметрическим линиям.

• *Граничные поверхности*: представляют собой шесть гиперболических параболоидов, а именно $\mathbf{r}(i,v,w)$, $\mathbf{r}(u,j,w)$, $\mathbf{r}(u,v,k)$, $i,j,k\in\{0,1\}$.

• *Граничные кривые*: представляют собой 12 линейных отрезков, а именно $\mathbf{r}(u,j,k)$, $\mathbf{r}(i,v,k)$, $\mathbf{r}(i,j,w)$, $i,j,k\in\{0,1\}$.

• *Сетка управления*: полюса $\mathbf{p}_{ijk}$ совпадают с восемью вершинами порции тела.

Пример построения порции тела степени (1,1,1) представлен на рис. 3. Порция деформируется перемещением восьми угловых точек в разных направлениях. В результате изменяется форма тела, но внутренняя «плотность» не может быть изменена при весовых коэффициентах $\mathbf{g}_{ijk}=1$, (рис. 3а). Внутреннюю структуру при неизменной форме тела можно изменить при различном задании весовых коэффициентов (рис. 3б).

2.2. Порция рационального тела степени (2,2,2)

Порция рационального тела степени (2,2,2) представляет собой триквадратичную интерполяцию шести граничных поверхностей, определяемая как:

$$\mathbf{r}(u,v,w)=\frac{\begin{bmatrix}(1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{000}\mathbf{p}_{000} & \mathbf{g}_{010}\mathbf{p}_{010} & \mathbf{g}_{020}\mathbf{p}_{020}\\ \mathbf{g}_{100}\mathbf{p}_{100} & \mathbf{g}_{110}\mathbf{p}_{110} & \mathbf{g}_{120}\mathbf{p}_{120}\\ \mathbf{g}_{200}\mathbf{p}_{200} & \mathbf{g}_{210}\mathbf{p}_{210} & \mathbf{g}_{220}\mathbf{p}_{220}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-v)^2\\ 2v(1-v)\\ v^2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}(1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{000} & \mathbf{g}_{010} & \mathbf{g}_{020}\\ \mathbf{g}_{100} & \mathbf{g}_{110} & \mathbf{g}_{120}\\ \mathbf{g}_{200} & \mathbf{g}_{210} & \mathbf{g}_{220}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-v)^2\\ 2v(1-v)\\ v^2\end{bmatrix}}(1-w)^2+ \qquad (3)$$

$$\frac{\left[(1-u)^2 \;\; 2u(1-u) \;\; u^2\right]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{001}\mathbf{p}_{001} & \mathbf{g}_{011}\mathbf{p}_{011} & \mathbf{g}_{021}\mathbf{p}_{021}\\ \mathbf{g}_{101}\mathbf{p}_{101} & \mathbf{g}_{111}\mathbf{p}_{111} & \mathbf{g}_{121}\mathbf{p}_{121}\\ \mathbf{g}_{201}\mathbf{p}_{201} & \mathbf{g}_{211}\mathbf{p}_{211} & \mathbf{g}_{221}\mathbf{p}_{221}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-v)^2\\ 2v(1-v)\\ v^2\end{bmatrix}}{\left[(1-u)^2 \;\; 2u(1-u) \;\; u^2\right]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{001} & \mathbf{g}_{011} & \mathbf{g}_{021}\\ \mathbf{g}_{101} & \mathbf{g}_{111} & \mathbf{g}_{121}\\ \mathbf{g}_{201} & \mathbf{g}_{211} & \mathbf{g}_{221}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-v)^2\\ 2v(1-v)\\ v^2\end{bmatrix}} 2w(1-w) +$$

$$\frac{\left[(1-u)^2 \;\; 2u(1-u) \;\; u^2\right]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{002}\mathbf{p}_{002} & \mathbf{g}_{012}\mathbf{p}_{012} & \mathbf{g}_{022}\mathbf{p}_{022}\\ \mathbf{g}_{102}\mathbf{p}_{102} & \mathbf{g}_{112}\mathbf{p}_{112} & \mathbf{g}_{122}\mathbf{p}_{122}\\ \mathbf{g}_{202}\mathbf{p}_{202} & \mathbf{g}_{212}\mathbf{p}_{212} & \mathbf{g}_{222}\mathbf{p}_{222}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-v)^2\\ 2v(1-v)\\ v^2\end{bmatrix}}{\left[(1-u)^2 \;\; 2u(1-u) \;\; u^2\right]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{002} & \mathbf{g}_{012} & \mathbf{g}_{022}\\ \mathbf{g}_{102} & \mathbf{g}_{112} & \mathbf{g}_{122}\\ \mathbf{g}_{202} & \mathbf{g}_{212} & \mathbf{g}_{222}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-v)^2\\ 2v(1-v)\\ v^2\end{bmatrix}} w^2.$$

Порция тела такого вида обладает следующими свойствами:

• *Производные*: частные производные по u, v, w совпадают с производными вдоль параметрических линий.

• *Граничные поверхности* представляют собой шесть квадратичных поверхностей.

• *Граничные кривые* тела являются совместимыми квадратичными кривыми $\mathbf{r}(u,j,k)$, $\mathbf{r}(i,v,k)$, $\mathbf{r}(i,j,w)$. В частном случае, когда граничные кривые являются линейными, тело степени (2,2,2) является телом степени (1,1,1).

• *Вершины* $\mathbf{r}(i,j,k)$ — это полюса $\mathbf{p}_{000}$, $\mathbf{p}_{200}$, $\mathbf{p}_{020}$, $\mathbf{p}_{220}$, $\mathbf{p}_{002}$, $\mathbf{p}_{202}$, $\mathbf{p}_{022}$, $\mathbf{p}_{222}$.

• *Контрольная сетка*: полюса сетки совпадают с полюсами граничных кривых.

Пример построения порции тела степени (2,2,2) представлен на рис. 4. Меняя положения полюсов и задавая различные значения весовых коэффициентов для полюсов, можно построить тела с точными граничными поверхностями второго порядка. Порция данного вида легко трансформируется в порцию тела степени (1,1,1).

2.3. Порция рационального тела степени (3,3,3)

Порция рационального тела степени (3,3,3) представляет собой трикубическую интерполяцию шести граничных поверхностей, определяемая как:

$$
\mathbf{r}(u,v,w)=\frac{[\mathbf{b}_0(u)\ \mathbf{b}_1(u)\ \mathbf{b}_2(u)\ \mathbf{b}_3(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{000}\mathbf{p}_{000} & \mathbf{g}_{010}\mathbf{p}_{010} & \mathbf{g}_{020}\mathbf{p}_{020} & \mathbf{g}_{030}\mathbf{p}_{030}\\ \mathbf{g}_{100}\mathbf{p}_{100} & \mathbf{g}_{110}\mathbf{p}_{110} & \mathbf{g}_{120}\mathbf{p}_{120} & \mathbf{g}_{130}\mathbf{p}_{130}\\ \mathbf{g}_{200}\mathbf{p}_{200} & \mathbf{g}_{210}\mathbf{p}_{210} & \mathbf{g}_{220}\mathbf{p}_{220} & \mathbf{g}_{230}\mathbf{p}_{230}\\ \mathbf{g}_{300}\mathbf{p}_{300} & \mathbf{g}_{310}\mathbf{p}_{310} & \mathbf{g}_{320}\mathbf{p}_{320} & \mathbf{g}_{330}\mathbf{p}_{330}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_0(v)\\ \mathbf{b}_1(v)\\ \mathbf{b}_2(v)\\ \mathbf{b}_3(v)\end{bmatrix}}{[\mathbf{b}_0(u)\ \mathbf{b}_1(u)\ \mathbf{b}_2(u)\ \mathbf{b}_3(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{000} & \mathbf{g}_{010} & \mathbf{g}_{020} & \mathbf{g}_{030}\\ \mathbf{g}_{100} & \mathbf{g}_{110} & \mathbf{g}_{120} & \mathbf{g}_{130}\\ \mathbf{g}_{200} & \mathbf{g}_{210} & \mathbf{g}_{220} & \mathbf{g}_{230}\\ \mathbf{g}_{300} & \mathbf{g}_{310} & \mathbf{g}_{320} & \mathbf{g}_{330}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_0(v)\\ \mathbf{b}_1(v)\\ \mathbf{b}_2(v)\\ \mathbf{b}_3(v)\end{bmatrix}}\mathbf{b}_0(w)+
$$

$$
\frac{[\mathbf{b}_0(u)\ \mathbf{b}_1(u)\ \mathbf{b}_2(u)\ \mathbf{b}_3(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{001}\mathbf{p}_{001} & \mathbf{g}_{011}\mathbf{p}_{011} & \mathbf{g}_{021}\mathbf{p}_{021} & \mathbf{g}_{031}\mathbf{p}_{031}\\ \mathbf{g}_{101}\mathbf{p}_{101} & \mathbf{g}_{111}\mathbf{p}_{111} & \mathbf{g}_{121}\mathbf{p}_{121} & \mathbf{g}_{131}\mathbf{p}_{131}\\ \mathbf{g}_{201}\mathbf{p}_{201} & \mathbf{g}_{211}\mathbf{p}_{211} & \mathbf{g}_{221}\mathbf{p}_{221} & \mathbf{g}_{231}\mathbf{p}_{231}\\ \mathbf{g}_{301}\mathbf{p}_{301} & \mathbf{g}_{311}\mathbf{p}_{311} & \mathbf{g}_{321}\mathbf{p}_{321} & \mathbf{g}_{331}\mathbf{p}_{331}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_0(v)\\ \mathbf{b}_1(v)\\ \mathbf{b}_2(v)\\ \mathbf{b}_3(v)\end{bmatrix}}{[\mathbf{b}_0(u)\ \mathbf{b}_1(u)\ \mathbf{b}_2(u)\ \mathbf{b}_3(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{001} & \mathbf{g}_{011} & \mathbf{g}_{021} & \mathbf{g}_{031}\\ \mathbf{g}_{101} & \mathbf{g}_{111} & \mathbf{g}_{121} & \mathbf{g}_{131}\\ \mathbf{g}_{201} & \mathbf{g}_{211} & \mathbf{g}_{221} & \mathbf{g}_{231}\\ \mathbf{g}_{301} & \mathbf{g}_{311} & \mathbf{g}_{321} & \mathbf{g}_{331}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_0(v)\\ \mathbf{b}_1(v)\\ \mathbf{b}_2(v)\\ \mathbf{b}_3(v)\end{bmatrix}}\mathbf{b}_1(w)+
$$

$$
\frac{[\mathbf{b}_0(u)\ \mathbf{b}_1(u)\ \mathbf{b}_2(u)\ \mathbf{b}_3(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{002}\mathbf{p}_{002} & \mathbf{g}_{012}\mathbf{p}_{012} & \mathbf{g}_{022}\mathbf{p}_{022} & \mathbf{g}_{032}\mathbf{p}_{032}\\ \mathbf{g}_{102}\mathbf{p}_{102} & \mathbf{g}_{112}\mathbf{p}_{112} & \mathbf{g}_{122}\mathbf{p}_{122} & \mathbf{g}_{132}\mathbf{p}_{132}\\ \mathbf{g}_{202}\mathbf{p}_{202} & \mathbf{g}_{212}\mathbf{p}_{212} & \mathbf{g}_{222}\mathbf{p}_{222} & \mathbf{g}_{232}\mathbf{p}_{232}\\ \mathbf{g}_{302}\mathbf{p}_{302} & \mathbf{g}_{312}\mathbf{p}_{312} & \mathbf{g}_{322}\mathbf{p}_{322} & \mathbf{g}_{332}\mathbf{p}_{332}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_0(v)\\ \mathbf{b}_1(v)\\ \mathbf{b}_2(v)\\ \mathbf{b}_3(v)\end{bmatrix}}{[\mathbf{b}_0(u)\ \mathbf{b}_1(u)\ \mathbf{b}_2(u)\ \mathbf{b}_3(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{002} & \mathbf{g}_{012} & \mathbf{g}_{022} & \mathbf{g}_{032}\\ \mathbf{g}_{102} & \mathbf{g}_{112} & \mathbf{g}_{122} & \mathbf{g}_{132}\\ \mathbf{g}_{202} & \mathbf{g}_{212} & \mathbf{g}_{222} & \mathbf{g}_{232}\\ \mathbf{g}_{302} & \mathbf{g}_{312} & \mathbf{g}_{322} & \mathbf{g}_{332}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_0(v)\\ \mathbf{b}_1(v)\\ \mathbf{b}_2(v)\\ \mathbf{b}_3(v)\end{bmatrix}}\mathbf{b}_2(w)+
$$

$$
\frac{[\mathbf{b}_0(u)\ \mathbf{b}_1(u)\ \mathbf{b}_2(u)\ \mathbf{b}_3(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{003}\mathbf{p}_{003} & \mathbf{g}_{013}\mathbf{p}_{013} & \mathbf{g}_{023}\mathbf{p}_{023} & \mathbf{g}_{033}\mathbf{p}_{033}\\ \mathbf{g}_{103}\mathbf{p}_{103} & \mathbf{g}_{113}\mathbf{p}_{113} & \mathbf{g}_{123}\mathbf{p}_{123} & \mathbf{g}_{133}\mathbf{p}_{133}\\ \mathbf{g}_{203}\mathbf{p}_{203} & \mathbf{g}_{213}\mathbf{p}_{213} & \mathbf{g}_{223}\mathbf{p}_{223} & \mathbf{g}_{233}\mathbf{p}_{233}\\ \mathbf{g}_{303}\mathbf{p}_{303} & \mathbf{g}_{313}\mathbf{p}_{313} & \mathbf{g}_{323}\mathbf{p}_{323} & \mathbf{g}_{333}\mathbf{p}_{333}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_0(v)\\ \mathbf{b}_1(v)\\ \mathbf{b}_2(v)\\ \mathbf{b}_3(v)\end{bmatrix}}{[\mathbf{b}_0(u)\ \mathbf{b}_1(u)\ \mathbf{b}_2(u)\ \mathbf{b}_3(u)]\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{003} & \mathbf{g}_{013} & \mathbf{g}_{023} & \mathbf{g}_{033}\\ \mathbf{g}_{103} & \mathbf{g}_{113} & \mathbf{g}_{123} & \mathbf{g}_{133}\\ \mathbf{g}_{203} & \mathbf{g}_{213} & \mathbf{g}_{223} & \mathbf{g}_{233}\\ \mathbf{g}_{303} & \mathbf{g}_{313} & \mathbf{g}_{323} & \mathbf{g}_{333}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_0(v)\\ \mathbf{b}_1(v)\\ \mathbf{b}_2(v)\\ \mathbf{b}_3(v)\end{bmatrix}}\mathbf{b}_3(w), \tag{4}
$$

где $\mathbf{b}(t)=\left[(1-t)^3\ \ 3t(1-t)^2\ \ 3t^2(1-t)\ \ t^3\right]$ — базовая функция.

Порция трикубического рационального тела обладает следующими свойствами:

• *Производные*: частные производные по u, v, w совпадают с производными вдоль параметрических линий.

• *Граничные поверхности* представляют собой шесть граничных кубических рациональных поверхностей $\mathbf{r}(i,v,w)$, $\mathbf{r}(u,j,w)$, $\mathbf{r}(u,v,k)$, $i,j,k \in \{0,1\}$, используемых в определении [8].

• *Граничными кривыми* являются кубические рациональные кривые, общие для смежных граничных поверхностей.

• *Вершины* $\mathbf{r}(i,j,k)$ — полюса $\mathbf{p}_{000}$, $\mathbf{p}_{300}$, $\mathbf{p}_{030}$, $\mathbf{p}_{330}$, $\mathbf{p}_{003}$, $\mathbf{p}_{303}$, $\mathbf{p}_{033}$, $\mathbf{p}_{333}$.

• *Сетка управления*: полюса сетки совпадают с полюсами контрольной сетки граничных поверхностей.

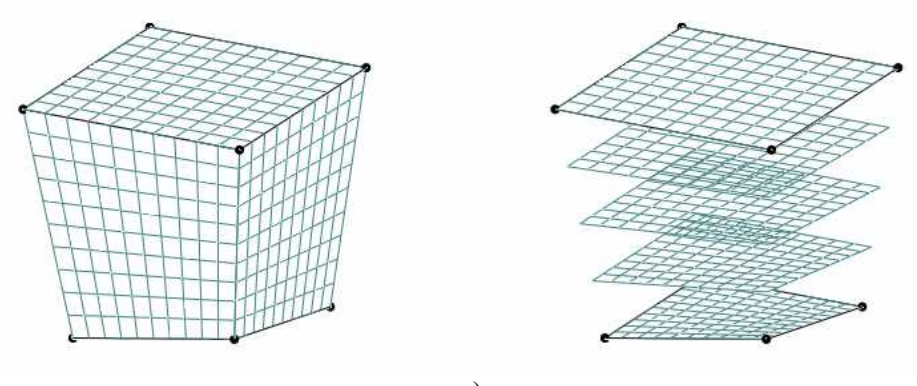
Пример построения порции тела степени (3,3,3) представлен на рис. 5. Порция такого вида обладает еще большей гибкостью управления формой и внутренней плотностью тела. В частности, меняя положения полюсов и значения весовых коэффициентов, можно получить порции тела степени (1,1,1) и (2,2,2).

3. Результаты экспериментов

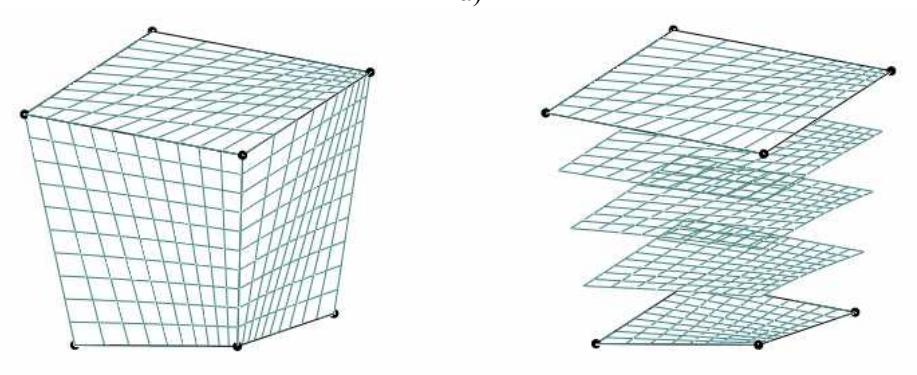
Вычислительный эксперимент показал, что предложенная методика моделирования трехпараметрического тела малых степеней может быть использована при решении поставленной прикладной задачи. В рассмотренных моделях определяются положения внешних и внутренних поверхностей рационального тела как при начальном условии, так и при деформации формы с помощью изменения положения полюсов и значений весовых коэффициентов. Наличие весов дает возможность дополнительно управлять формой и внутренней плотностью тела, не изменяя при этом положения полюсов каркаса тела. При описании тел составной формы кубическими функциями обеспечивается первый порядок гладкости, что соответствует требованиям к точности описания многослойных конструкций, получаемых методом послойного деформирования.

Для проведения вычислительного эксперимента были написаны подпрограммы с использованием встроенного языка программирования математического пакета программ MatCAD. Примеры построения порций рациональных тел трех видов представлены на рис. 3–5. Для каждой порции изменялись положения узловых точек, полюсов и определялись промежуточные поверхности порции тела при значениях параметра $w = 0;0.25;0.5;0.75;1$.

Несколько порций могут быть соединены вместе, чтобы сформировать составное тело сложной формы. Непрерывность между порциями может быть определена так же, как в модели Безье. Предложенная методология и методика моделирования применялись при описании процесса послойного деформирования листового металла при изготовлении тонкостенных деталей на оборудовании с программным управлением.



а)



б)

Рис. 3. Пример построения порции рационального тела степени (1,1,1)

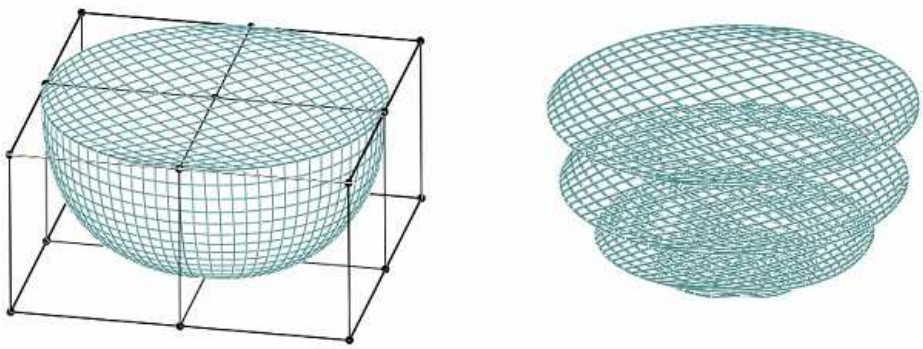


Рис. 4. Пример построения порции рационального тела степени (2,2,2)

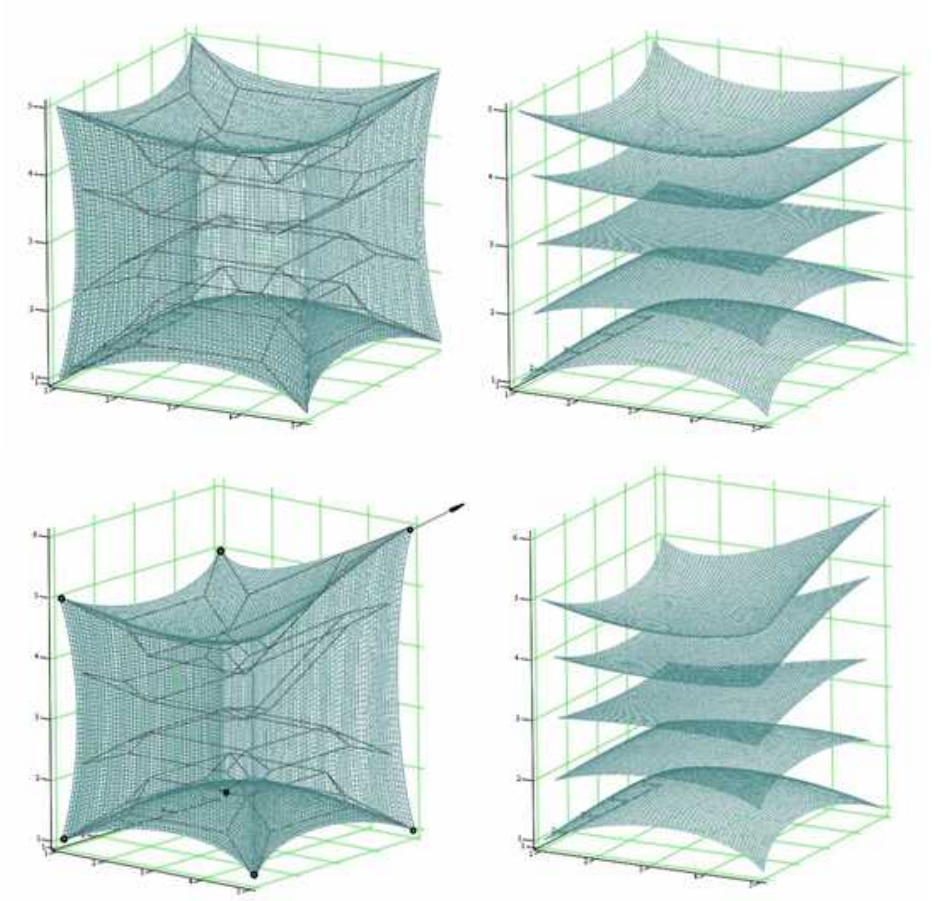


Рис. 5. Пример построения порции рационального тела степени (3,3,3)

Заключение

Разработаны подпрограммы в среде MathCAD, использующие параметрические тела в форме Безье для моделирования внутренней многослойной структуры и внешней формы трехмерного тела. Использование рациональной функции Безье для описания тела дает дополнительные преимущества в управлении формой и внутреннего пространства тела, чем конструкция, построенная на применении обобщенной интерполяции Эрмита. Проведенные примеры вычислительных экспериментов показывают, как легко определить и изменить форму и положение промежуточных поверхностей внутри тела.

Авторы рассматривают преимущество этого метода как способность определять граничные и внутренние начальные условия перед численным моделированием многослойных конструкций, получаемых различными технологическими способами, в частности, послойным деформированием листового металла под воздействием рабочего инструмента. Метод хорошо работает для симметричных форм, используемых в инженерном моде-

лировании. Параметрические рациональные тела такого типа могут быть эффективно применены в конечных элементах с нерегулярными границами, чтобы избежать трудностей в построении модели для подобных конструкций.

Литература

1. Micari F., Ambrogio G., Filice L. Shape and dimensional accuracy in single point incremental Forming: state of the art and future trends // Journal of Materials Processing Technology. 2007. Vol. 191(1–3). P. 390–395.

2. Kochan A. Dieless forming // Assembly Automation. 2001. Vol. 21. P. 321–322.

3. Forming process of automotive body panel based on incremental forming / Z. Guangcheng [et al.] // Metallurgical and Mining Industry. 2015. Vol. 1. I. 12. P. 350–357.

4. Kim T. J., Yang D. Y. Improvement of formability for the incremental sheet metal forming process // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. Vol. 42. I. 7. P.1271–1286.

5. Simplified numerical approach for incremental sheet metal forming process / B. A. Lanouar [et al.] // Engineering Structures. 2014. Vol. 62–63. P. 75–86.

6. Аюшеев Т. В. Метод построения сплошных тел с применением обобщенной интерполяции Эрмита // Информационные технологии. 2005. № 6. С. 27–32.

7. Durikovic R., Czanner S. Modelling with three types of Coons Bodies // International Journal of Modelling & Simulation. 2004. Vol. 24, № 2. P. 97–101.

8. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2002. 472 с.

MODELING OF PARAMETRIC RATIONAL
BODIES USING GENERALIZED BEZIER INTERPOLATION

Tumen V. Ausheev
Dr. Sci. (Engineering), A/Prof.,
Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Roman N. Bulychev
Research Assistant,
Department of Engineering and Computer Graphics
East-Siberian State University of Technology and Management
40v Kluchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia

The process of manufacturing parts by single point incremental forming (SPIF) of sheet blanks can be described by a multilayer structure. Therefore, the most promising method of modeling a multilayer structure is parametric solid modeling. Parametric bodies can model both a shape and an anisotropic interior space. The article deals with the problem of constructing the equation portion of body management using generalized interpolation of Bezier. We describe three types of body portions, often used as initial and boundary conditions in numerical simulation. Several portions can be joined together to form a complex compound body. Use of Bezier rational function to describe the body provides additional benefits in the form of its management and internal spaces. The proposed system has been implemented in the program MathCAD. Computational experiments show, that it is easy to define and modify the shape and position of intermediate surfaces inside the body.

Keywords: parametric bodies; generalized Bezier interpolation; incremental sheet forming; multilayer structure.

References

1. Micari F., Ambrogio G., Filice L. Shape and Dimensionality in Single Point Incremental Forming: State of the Art and Future Trends. *Journal of Materials Processing Technology.* 2007. V. 191 (1–3). Pp. 390–395.

2. Kochan A. Dieless Forming. *Assembly Automation.* 2001. V. 21. Pp. 321–322.

3. Guangcheng Z., Jinbo X., Xiaofan S., Xun Z., Chuankai L. Forming Process of Automotive Body Panel Based on Incremental Forming. *Metallurgical and Mining Industry.* 2015. V. 1. I. 12. Pp. 350–357.

4. Kim T. J., Yang D. Y. Improvement of Formability for the Incremental Sheet Metal Forming Process. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2000. V. 42. I. 7. Pp.1271–1286.

5. Lanouar B. A., Camille R., Arnaud D., Mohammed N. Simplified Numerical Approach for Incremental Sheet Metal Forming Process. *Engineering Structures.* 2014. V. 62–63. Pp. 75–86.

6. Ayusheev T. V. Metod postroeniya sploshnykh tel s primeneniem obobshchennoi interpolyatsii Ermita [Method of Constructing Continuous Bodies Using the Generalized Hermite Interpolation]. *Informatsionnye tekhnologii — Information Technologies.* 2005. No. 6. Pp. 27–32.

7. Durikovic R., Czanner S. Modeling with Three Types of Coons Bodies // *International Journal of Modeling & Simulation.* 2004. V. 24. No. 2. Pp. 97–101.

8. Golovanov N. N. *Geometricheskoe modelirovanie* [Geometric Modeling]. Moscow: Physical and Mathematical Literature Publ., 2002. 472 p.