ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.9
DOI: 10.18101/2304-5728-2018-1-95-99

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© Казиев Валерий Муаедович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Кабардино-Балкарский государственный университет
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail:kkvkvm@yandex.ru

© Кайгермазов Арслан Ахматович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Кабардино-Балкарский государственный университет
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: kfatimat@yandex.ru

© Кудаева Фатимат Хусейновна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Кабардино-Балкарский государственный университет
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: kfatimat@yandex.ru

В работе исследуется однозначная разрешимость задачи Коши для нагруженного уравнения с оператором Лаврентьева — Бицадзе в главной части. Нагрузка определена в фиксированных точках области искомых решений. Область решения ограничена линиями характеристик и отрезком АВ оси абсцисс, где А(0; 0), В(1; 0). Рассматривается регулярное решение задачи. Это решение из класса непрерывных в замыкании области, дважды непрерывно-дифференцируемых внутри этой области. Доказана теорема существования и единственности такого решения. Задача эквивалентно (применяя формулу Даламбера) сведена к системе алгебраических уравнений. Для нее методом математической индукции доказана лемма однозначной разрешимости. Приведен явный критерий разрешимости задачи. Рассмотрен отдельно случай постоянных коэффициентов. Построен пример с нарушением условий разрешимости задачи. Предложена также процедура решения.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение; задача Коши; регулярное решение; существование и единственность.

Введение

К нагруженным относятся уравнения вида $Lu+Tu=f$, где L — некоторый оператор (дифференциальный, интегральный, общего вида), рассматриваемый в области $\Omega\subset R_n(x_1,x_2,...,x_n)$ а T — оператор, действующий на *u(x)* на многообразиях размерности меньше, чем *n*, т. е. оператор следа искомого решения. Такие уравнения находят практическое применение в задачах прогноза и регулирования уровня грунтовых вод, влагосодержания в почвогрунте, при решении различного типа нелокальных и обратных задач [1–2].

Исследовали такие уравнения, а также редуцируемые к ним задачи, А. М. Нахушев [1] (теоретико-методологические и практические исследования), Л. И. Сербина [2] и М. Х. Лафишев [3] (теоретико-практические исследования), Е. И. Моисеев [4] (спектральные вопросы и связи с уравнениями смешанного типа) и многие другие ученые.

Рассматриваемая нами задача относится к классу задач, актуальных как с точки зрения однозначной разрешимости, так и практических задач прогноза («нагрузка» определяет дискретное воздействие на процесс в точках «нагружения»), рассмотрения спектра таких задач.

Постановка и исследование задачи

Рассмотрим нагруженное уравнение вида:

$$sign\, y\, u_{xx} + u_{yy} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_i(x,y) u(x_i, y_i) = 0,$$

где $\alpha_i \in C(\overline{\Omega}), \forall i = 1,2,...,n, \Omega$ — конечная область плоскости *x, y*, ограниченная характеристиками *AC*: $x + y = 0$, *BC*: $x - y = 1$ уравнения и промежутком $I = AB$. Точки «нагружения» $(x_i; y_i) \in \overline{\Omega}$ фиксированы.

Рассмотрим задачу Коши: определить регулярное решение уравнения, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x,0) = \tau(x), x \in \bar{I}, \tau(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I),$$

$$u_y(x,0) = \vartheta(x), x \in I, \vartheta(x) \in C^1(I).$$

Лемма. Если определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_1 & ... & \alpha_n\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_2 & ... & \alpha_n\beta_2 \\ . & . & ... & . \\ \alpha_1\beta_n & \alpha_1\beta_n & ... & 1+\alpha_n\beta_n \end{vmatrix},$$

то $\Delta_n = 1 + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$, а алгебраические дополнения элемента *i*-й строки и *j*-го столбца определителя равны:

$$\Delta_n^{(i,j)} = \begin{cases} 1 + \sum\nolimits_{k=1, k\neq i,j}^{n} \alpha_k \beta_k, & i = j, \\ -\alpha_i \beta_i, & i \neq j. \end{cases}$$

Доказательство проводится по индукции [5], используя рекуррентное равенство вида: $\Delta_n = T_n + \Delta_{n-1}$. В области Ω уравнение принимает вид:

$$u_{yy}-u_{xx}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,y)u(x_i,y_i)=0\,.$$

По формуле Даламбера получаем:

$$u=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\vartheta(t)dt-\frac{1}{2}\int_{o}^{t}dt\int_{x-y+t}^{x+y-t}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(z,t)u(x_i,y_i)dz.$$

Введем обозначения:

$$\gamma(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\vartheta(t)dt,$$

$$\beta_i(x,y)=\frac{1}{2}\int_{o}^{t}dt\int_{x-y+t}^{x+y-t}\alpha_i(z,t)u(x_i,y_i)dz.$$

Тогда уравнение можно переписать:

$$u(x,y)=\gamma(x,y)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x,y)u(x_i,y_i)\,.$$

Полагая последовательно $(x,y)=(x_i,y_i), i=1,2,...,n,$ получим систему линейных относительно неизвестных $u(x_i,y_i)$ уравнений вида:

$$u(x_i,y_i)=\gamma(x_i,y_i)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x_i,y_i)u(x_j,y_j)\,.$$

Обозначив $u_i=u(x_i,y_i),$ $\gamma_i=\gamma(x_i,y_i),$ $\beta_{ij}=\beta_j(x_i,y_i),$ можно равенство переписать в виде:

$$u_i+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}u_j=\gamma_i,\quad i=1,2,...,n.$$

По лемме, определитель этой системы:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1+\beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{n1}\\ \beta_{12} & 1+\beta_{22} & \dots & \beta_{n2}\\ . & . & \dots & .\\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \dots & 1+\beta_{nn}\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\,.$$

Следовательно, справедливо утверждение о разрешимости и единственности решения рассматриваемой задачи Коши.

Теорема. Задача Коши имеет решение если только:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{o}^{y_i}dt\int_{x_i-y_i+t}^{x_i+y_i-t}\alpha_i(z,t)dz\neq-2.$$

При выполнении этого условия значения нагрузок определяются по формуле:

$$u_i\equiv u(x_i,y_i)=\frac{1}{\Delta_n}\sum_{j=1}^{n}\Delta_n^{(i,j)}\gamma_i\,.$$

Следствие. Если коэффициенты постоянные, то задача Коши однозначно разрешима лишь при $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i^2\neq-2$. Если они все неотрицательны, то задача всегда разрешима единственным образом. Нарушение условия ведет к нарушению единственности решения задачи.

Например, для уравнения $u_{yy} - u_{xx} - 32u(x_0, -1/4) = 0$ рассмотрим задачу Коши с нулевыми данными (нарушено условие единственности). Любая функция $u(x, y) \equiv 16cy^2$, $c = const$, является решением задачи.

Заключение

Для рассматриваемого класса уравнений, имеющих практическое приложение, исследована впервые классическая задача Коши. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи (в классическом смысле регулярного решения). Результаты могут быть применены как для прогноза реальных процессов, так и для идентификации точек «нагружения», в которых можно управлять процессом. Это позволит рассматривать далее интересную задачу: найти точки («нагружения»), по которым возможно построение аппроксимаций, оптимальных в некотором смысле (например, минимального уклонения).

Литература

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели переноса в однородных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с.
5. Казиев В. М. Об одном нагруженном обыкновенном дифференциальном уравнении // Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы прикладной математики. Нальчик, 1982. С. 78–82.

CAUCHY PROBLEM FOR A LOADED DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION

Valeriy M. Kaziev
Cand. Sci. (Phys. and Math., A/Prof.,
Kabardino-Balkarian State University
173 Chernyshevskogo St., Nalchik 360004, Russia
E-mail: kkvkvm@yandex.ru

Arslan A. Kaygermazov
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Kabardino-Balkarian State University
173 Chernyshevskogo St., Nalchik 360004, Russia
E-mail: kfatimat@yandex.ru

Fatimat Kh. Kudaeva
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Kabardino-Balkarian State University
173 Chernyshevskogo St., Nalchik 360004, Russia
E-mail: kfatimat@yandex.ru

The article studies the unique solvability of the Cauchy problem for a loaded equation with Lavrentyev-Bitsadze’s operator in the principal part. The load is defined at the fixed points of the area of desired solutions. The solution region is restricted by the characteristics of lines and abscissa intercept AB, where A (0; 0), B (1; 0). We consider a regular solution of the problem. This is a solution from the class of continuous in closure region, doubly continuously differentiable inside this domain. The theorem of existence and uniqueness of such a solution is proved. The problem has been equivalently reduced (using d'Alembert’s formula) to a system of algebraic equations. The lemma of the unique solvability for this problem has been proved by mathematical induction. The unambiguous criterion for solvability of the problem is given. We have separately considered the case of constant coefficients and gave the example of violating the solvability conditions for the problem. The procedure for it decision is also proposed in the article.

Keywords: loaded differential equation; Cauchy problem; regular solution; existence and uniqueness.

References

1. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh prilozheniya* [Loaded Equations and Their Applications]. Moscow: Nauka Publ., 2012. 232 p.
2. Serbina L. I. *Nelokal'nye matematicheskie modeli perenosa v odnorodnykh sistemakh* [Nonlocal Mathematical Translation Models in Homogeneous Systems]. Moscow: Nauka Publ., 2007. 167 p.
3. Polubarinova-Kochina P. Ya. *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* [Theory of Ground Water Movement]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 664 p.
4. Moiseev E. I. *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter]. Moscow: Moscow State University Publ., 1988. 150 p.
5. Kaziev V. M. Ob odnom nagruzhennom obyknovennom differentsial'nom uravnenii [About One Loaded Ordinary Differential Equation]. *Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo tipa i rodstvennye problemy prikladnoi matematiki — Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type and Related Problems of Applied Mathematics.* Nalchik, 1982. Pp. 78–82.