УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 517.977
DOI: 10.18101/2304-5728-2018-2-13-28

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

© Антипина Наталья Валерьевна
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики,
Байкальский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
E-mail: natant2012@mail.ru

В статье представлены прикладная модель оптимального распределения во времени расходов на рекламу двух товаров, которая математически формализуется как задача оптимального импульсного управления, и основные результаты ее исследования. Неограниченность сверху темпов инвестиций в рекламу не исключает возможности проведения агрессивной рекламы и формально приводит к необходимости рассматривать задачу в расширенной, импульсной постановке.

Математической особенностью этой задачи является нарушение условия корректности перехода к импульсному управлению (условия корректности Фробениуса). Этот факт значительно усложняет исследование задачи и означает следующее: каждому импульсному управлению соответствует не одна траектория, а воронка обобщенных решений динамической системы задачи из класса функций ограниченной вариации. Управлением в данной задаче импульсной оптимизации являются не только меры, но и набор предельных управлений для каждого момента скачка меры. Именно они позволяют выделить индивидуальную обобщенную траекторию и построить, если потребуется, обычное субоптимальное решение.

Для качественного анализа описанной модели в статье применяются соответствующий принцип максимума и квадратичные необходимые условия оптимальности особых управлений.

Ключевые слова: импульсное управление; разрывные траектории; условия оптимальности; экстремаль; инвестиции в рекламу.

Введение

Применение оптимизационных моделей к решению задач экономической динамики давно стало традиционным [1–3], [5–10]. Качественный анализ большинства из них опирается на результаты теории оптимального управления [4; 5], [7; 10; 11].

Рассматриваемая в статье модель оптимального распределения во времени расходов на рекламу двух товаров [10] математически формализуется как задача оптимального импульсного управления и характеризуется различными «сценариями» реализации импульса в зависимости от значений параметров задачи.

В статье приводятся описание модели, соответствующая ей задача оптимального импульсного управления, основные этапы ее исследования, возможные стратегии решения задачи, а также экономическая интерпретация полученных результатов.

1. Описание модели и постановка задачи оптимизации

Рассматриваемая модель является обобщением модели оптимизации инвестиций на рекламу двух взаимодополняемых товаров [10].

Приведем соответствующее описание.

Некоторая торговая фирма выходит на рынок с предложением двух товаров на период времени $[0,T]$.

Примем потенциальную емкость рынка для первого, ведущего, товара за единицу, а долю рынка проникновения в момент t охарактеризуем показателем $x(t)$. Под термином «рынок проникновения» понимается совокупность покупателей, которые уже осуществляют покупку реализуемых фирмой товаров. Аналогичные показатели для второго, ведомого, товара совпадают с $x(t)$ и $y(t)$ соответственно, поскольку для ведомого товара освоение сектора рынка, более широкого, чем для ведущего, неестественно. Возможные рекламные стратегии характеризуются текущими расходами на рекламу товаров — функциями времени $u(t)$ и $v(t)$ соответственно. Все параметры a,b,c,d,A,B модели положительны. Параметры A, B характеризуют удельные доходы от реализации ведущего и ведомого товаров соответственно.

Целью фирмы является максимизация суммарной прибыли от реализации обоих товаров за временной период $[0,T]$.

Таким образом, описанной модели соответствует следующая задача оптимального управления:

$$\dot{x} = au(1-x) - bx, \qquad x(0) = x_0,$$
$$\dot{y} = cv(1-y/x) - dy, \quad y(0) = y_0 < x_0, \tag{1.1}$$
$$J = \int_0^T (Ax + By - u - v)dt \to \sup$$

с множеством управлений

$$U = R_+^2 = \{(u,v) \mid u,v \ge 0\}. \tag{1.2}$$

С помощью отрицательных слагаемых в уравнениях динамики задачи (1.1), (1.2) отражается процесс сокращения контролируемых секторов вследствие отказа покупателей от приобретения товаров фирмы, миграции или «забывания» об их достоинствах. Максимальный сектор рынка принят за единицу. Заметим, что из динамической системы следует неравенство $0 < y(t) < x(t) < 1$ на отрезке $[0,T]$ для всех траекторий системы.

2. Исследование модели и основные результаты

Опишем специфику задачи (1.1), (1.2) как задачи оптимизации.

Неограниченность сверху темпов инвестиций в рекламу не исключает возможности проведения агрессивной рекламы и формально приводит к необходимости рассматривать задачу (1.1), (1.2) в расширенной, импульсной постановке [4, 5]. Поэтому управления u и v будем считать далее неотрицательными мерами [5] и исследование задачи (1.1), (1.2) проведем с помощью соответствующих необходимых условий оптимальности импульсных процессов, а именно — принципа максимума [5].

Рассматриваемая задача имеет математическую особенность — нарушение условия корректности перехода к импульсному управлению (условия корректности Фробениуса [6]). Этот факт значительно усложняет исследование задачи и означает следующее: каждому импульсному управлению (u,v) соответствует не одна траектория, а воронка обобщенных решений динамической системы задачи (1.1), (1.2) из класса BV функций ограниченной вариации. Каждая траектория этой воронки определяется способом аппроксимации меры (u,v) обычными управлениями из L_∞ и в моменты скачка меры скачок траектории зависит от дополнительных предельных управлений $(\omega_1,\omega_2)\geq 0$ [5]. Таким образом, управлением в данной задаче импульсной оптимизации являются не только меры (u,v), но и набор предельных управлений для каждого момента скачка меры. Именно они позволяют выделить индивидуальную обобщенную траекторию и построить, если потребуется, обычное субоптимальное решение с управлениями из L_∞. Частный вариант этой задачи (при $b=d=0$) был исследован методом разрывной замены времени в комбинации с динамическим программированием в [10]. Также модель (1.1), (1.2) в упрощенной постановке (при $b=c=0$ и ограниченном управлении $v(t)$) была исследована с помощью принципа максимума для импульсных процессов [5] в статье [2].

Для качественного анализа описанной модели в статье применяется соответствующий принцип максимума [5] и квадратичные необходимые условия оптимальности особых управлений [4].

Выпишем все условия принципа максимума [5]:

- понтрягиан

$$H(t,x,y,\psi,u,v)=\psi_1(au(1-x)-bx)+\psi_2(cv(1-y/x)-dy)+Ax+By-u-v;$$

- сопряженная система, решение которой понимается в обобщенном смысле

$$\begin{aligned} &\dot\psi_1=\psi_1(au+b)-c\psi_2 yv/x^2-A, && \psi_1(T+)=0,\\ &\dot\psi_2=\psi_2(cv/x+d)-B, && \psi_2(T+)=0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

- условия максимума

$$H_u(x,y,\psi) = a\psi_1(1-x)-1\begin{cases}\le 0, & t\in[0,T],\\ = 0, & t\in S_a(u),\end{cases}$$
$$H_v(x,y,\psi) = c\psi_2(1-\frac{y}{x})-1\begin{cases}\le 0, & t\in[0,T],\\ = 0, & t\in S_a(v),\end{cases} \tag{2.2}$$

где $S_a(u)$, $S_a(v)\subset[0,T]$ — подмножества отрезка $[0,T]$, на которых сосредоточены абсолютно непрерывные составляющие мер u,v (т. е. $u>0$, $v>0$ соответственно);

- условие скачка траекторий в каждой точке s импульса управления (u,v)

$$z_1(d_s)=x(s+),\qquad z_2(d_s)=y(s+),\quad \psi_j(s+)=p_j(d_s),\quad j=1,2; \tag{2.3}$$

где d_s — сумма скачков мер (u,v) в момент $s\in[0,T]$, $(z_1(\tau),z_2(\tau),p_1(\tau),p_2(\tau))$ — решение предельной системы

$$\begin{aligned} z_1' &= a\omega_1(1-z_1), & z_1(0)&=x(s-),\\ z_2' &= c\omega_2(1-\frac{z_2}{z_1}), & z_2(0)&=y(s-), \end{aligned}\qquad \tau\in[0,d_s] \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} p_1' &= ap_1\omega_1 - cp_2\omega_2\frac{z_2}{z_1^2}, & p_1(0)&=\psi_1(s-),\\ p_2' &= cp_2\omega_2\frac{1}{z_1}, & p_2(0)&=\psi_2(s-), \end{aligned}\qquad \tau\in[0,d_s]; \tag{2.5}$$

- условие оптимальности моментов импульса

$$[H_0(s)] = A[x]_s + B[y]_s - b[\psi_1 x]_s - d[\psi_2 y]_s\begin{cases}\ge 0, & s=0,\\ =0, & s\in(0,T),\\ \le 0, & s=T,\end{cases} \tag{2.6}$$

(запись $[\varphi]_s$ означает скачок функции φ в точке s);

- условия максимума по предельным управлениям $\omega_1(\tau)$, $\omega_2(\tau)$, соответствующим моменту импульса s,

$$h_1(\tau) := H_u(z(\tau),p(\tau)) = ap_1(1-z_1)-1\begin{cases}\le 0, & \tau\in[0,d_s],\\ =0, & \omega_1(\tau)>0,\end{cases}$$
$$h_2(\tau) := H_v(z(\tau),p(\tau)) = cp_2(1-\frac{z_2}{z_1})-1\begin{cases}\le 0, & \tau\in[0,d_s],\\ =0, & \omega_2(\tau)>0.\end{cases} \tag{2.7}$$

Анализ принципа максимума дает следующие результаты.

Рекламные инвестиции нерентабельны в течение всего периода планирования $[0,T]$, т. е. $(u,v)\equiv 0$, если параметры модели удовлетворяют неравенствам:

$$
\begin{aligned}
&Aa(1-e^{b(t-T)})\left(1-x_0e^{-bt}\right)\le b,\\
&Bc(1-e^{d(t-T)})\left(1-y_0e^{(b-d)t}/x_0\right)\le d,
\end{aligned}
\qquad t\in[0,T]. \tag{2.8}
$$

Эти неравенства следуют из условий принципа максимума (2.2) и являются необходимыми условиями неэффективности рекламы. Такая рекламная стратегия ожидаема, когда временной период T мал.

Для нетривиального случая, когда $\bar{u}$, $\bar{v}$ не являются тождественными нулями, условия неэффективности рекламы (2.8) нарушаются, предполагаются инвестиции в рекламу и справедливы следующие результаты:

- начиная с некоторого момента инвестиции в рекламу прекращаются (т. е. $(u,v)=0$ в левой полуокрестности точки T) и доли рынка проникновения товаров уменьшаются с постоянным темпом b и d соответственно;
- возможны интервалы особости двух типов: интервал $S_a(u)$ особости u-компоненты управления, на котором $u>0$, $v=0$, и интервал $S_a(v)$ особости v-компоненты управления ($v>0$, $u=0$).

Интервал $S_a(u)$ характеризуется равенствами:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}=1-\sqrt{\frac{b}{Aa}}=const,\\
&\bar{u}=\frac{b\bar{x}}{a(1-\bar{x})}=\frac{\sqrt{Aab}-b}{a}=const,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

которые следуют из двукратного дифференцирования по времени условия особости $H_u=0$ на $S_a(u)$ и динамической системы задачи (1.1); условие допустимости этого режима таково: $b<Aa$, причем условие оптимальности Келли [4, 5] выполнено в строгой форме.

Интервал $S_a(v)$ возможен при выполнении следующих условий:

$$
d>b,\ b<2Bc-\sqrt{b^2+4Bc(d-b)},\ b<2Bc(1-y/x).
$$

(эти условия получаются аналогично условиям (2.9))
и характеризуется равенствами:

$$
\bar{y}=\left(1-\frac{b+\sqrt{b^2+4Bc(d-b)}}{2Bc}\right)x,\quad 0<x<1,
$$

это особое многообразие на фазовой плоскости,

$$
\bar{v}=\frac{(d-b)(2Bc(1-y/x)-b)y}{c(1-y/x)(2Bc(1-y/x)-b)}, \tag{2.10}
$$

позиционное управление на фазовой плоскости.

На этом режиме условие оптимальности Келли тоже выполнено в строгой форме.

Управление, характеризующееся особостью одновременно по двум компонентам со свойством $H_u=H_v=0$ на некотором множестве $S_a(u,v)$, не входит в состав оптимального решения, поскольку не выполняется квадратичное необходимое условие оптимальности типа равенства $(\dot{H}_w)_w = 0$ на $S_a(u,v)$, где $w=(u,v)$.

Перейдем к анализу условий оптимальности предельных управлений.

Рассмотрим интервал I_1 времени τ, на котором $\omega_1 > 0$.

В силу первого из условий оптимальности (2.7) на I_1 справедливо равенство $h_1(\tau)=0$. Дифференцируя его по τ, получим еще одно соотношение на I_1

$$h_1' = -acp_2(\tau)\omega_2(\tau)(1-z_1(\tau))z_2(\tau)/z_1^2(\tau)=0. \tag{2.11}$$

Это возможно лишь в том случае, когда $\omega_2 = 0$ на этом интервале.

Аналогично можно показать, что на некотором интервале I_2 $\omega_2 > 0$, $\omega_1 = 0$. Это следует в силу второго условия (2.7) из равенств $h_2(\tau)=0$ и

$$h_2' = acp_2(\tau)\omega_1(\tau)(1-z_1(\tau))z_2(\tau)/z_1^2(\tau)=0, \tag{2.12}$$

справедливых на интервале I_2.

Из условий оптимальности предельных управлений (2.7) и строгой монотонности функций $h_1(\tau)$, $h_2(\tau)$ (см. (2.11), (2.12)) следует, что особый случай $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ исключается и в каждый момент времени τ «включается» лишь одно из предельных управлений, т. е. $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. А именно, если $I_1 = [0,d_s]$ или $I_2 = [0,d_s]$, то в некоторой точке $s \in [0,T)$ имеет место импульс лишь по u- или по v-компонентам управления соответственно. В случае $I_1 \cup I_2 = [0,d_s]$ в точке s имеется импульс по обеим компонентам управления.

Важно, что в последнем случае интервал I_1 необходимо предшествует интервалу I_2. Действительно, предположим, что I_2 расположен левее I_1. Тогда возникает противоречие условий $h_1 \le 0$, $h_2 = 0$ на I_2, $h_2 \le 0$, $h_1 = 0$ на I_1 с убыванием функции h_1 на I_2 и возрастанием функции h_2 на I_1. Значит, I_1 расположен левее I_2 на $[0,d_s]$ и при моделировании (аппроксимации) двукомпонентного импульса обычными управлениями сначала необходимо увеличивать x-компоненту траектории, а затем y-компоненту.

Далее проведем анализ условий оптимальности (2.7) предельного управления $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$, соответствующего моменту импульса $t=0$. Поскольку величина скачка векторной меры (u,v) при $t=0$ не задает однозначно $x(0+)$, $y(0+)$, то важно детальное исследование экстремального предельного управления при $\tau \in [0,d_0]$. Именно оно выделяет индивидуальную обобщенную траекторию и задает способ построения субоптимального обычного управления в рассматриваемой модели.

Итак, экстремали задачи (1.1), (1.2) характеризуются следующими особенностями:

- в большинстве случаев экстремальная стратегия в начале периода $[0,T]$ предполагает проведение кратковременной агрессивной рекламы двух товаров одновременно или каждого из них в отдельности (с точки зрения теории импульсного управления имеет место начальный импульс обеих компонент управления или каждой из них в отдельности соответственно);
- затем имеет место магистральный интервал, на котором вложения в рекламу соответствующего товара осуществляются непрерывным образом;
- на заключительном этапе периода рекламирования инвестиции плавно уменьшаются.

3. Возможные варианты экстремалей задачи и их экономическая интерпретация

Начнем это исследование с наиболее общего случая, предполагающего наличие в момент $t = 0$ импульса по обеим компонентам управления, и покажем, что после него может реализоваться одна из возможностей:

а) абсолютно непрерывные составляющие меры (u,v) равны нулю на $[0,T)$;

б) в правой полуокрестности точки $t = 0$ располагается интервал особости v-компоненты управления, за которым следует интервал особости u-компоненты управления, после чего $(u,v) \equiv 0$ вплоть до момента времени T.

Стратегия А реализуется, если выполняются следующие условия на параметры задачи:

$$\begin{aligned} &x_0 < x(0+), \quad Aa(1-e^{-bT})(1-x(0+)) < b, \\ &y_0 < y(0+), \quad Bc(1-e^{-dT})(1-y_0/x(0+)) > d, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\frac{bx_0}{a(1-x_0)} + A\left(x(0+)e^{-bT} - x_0\right) \geq B\left(y_0 - y(0+)e^{-dT}\right) - \frac{dy_0}{c(1-y_0/x(0+))}, \tag{3.2}$$

$x(0+)$ находится из уравнения:

$$\frac{1}{c} ln\left[Bc\left(1-e^{-dT}\right)(1-y_0/x(0+))/d\right] + \frac{dy_0}{c(1-y_0/x(0+))} + \frac{1}{a(1-x(0+))} =$$
$$= A\left(1-e^{-bT}\right)/b + B\left(1-e^{-dt}\right)/d \tag{3.3}$$

и связано с $y(0+)$ соотношением:

$$y(0+) = x(0+)\left[1 - d/\left(Bc\left(1-e^{-dT}\right)\right)\right]. \tag{3.4}$$

Тогда экстремальная мера имеет вид:

$$\bar{u} = c^1\delta(t), \quad \bar{v} = c^2\delta(t), \tag{3.5}$$

где c^1, c^2 — величины импульсов компонент управления в момент $t = 0$, определяемые формулами:

$$c^1 = \frac{1}{a} ln \frac{1 - x_0}{1 - x(0+)}, \tag{3.6}$$

$$c^2 = \frac{x(0+)}{c} ln \frac{x(0+) - y_0}{x(0+) - y(0+)} = \frac{x(0+)}{c} ln\left[Bc\left(1 - e^{-dT}\right)\left(1 - y_0/x(0+)\right)/d\right], \tag{3.7}$$

экстремальные траектории:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x_0, & t = 0, \\ x(0+)e^{-bt}, & t \in (0,T], \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y_0, & t = 0, \\ y(0+)e^{-dt}, & t \in (0,T]. \end{cases} \tag{3.9}$$

Получим неравенства (3.1) и условия (3.3), (3.4), связывающие значения $x(0+)$ и $y(0+)$.

Как отмечалось ранее в п. 2, отрезок $[0,d_0]$ по времени τ разбивается некоторой точкой $\xi \in (0,d_0)$ на подотрезки I_1 и I_2.

Анализируя предельную систему (2.4) и учитывая условие оптимальности (2.7) и условие скачка траекторий (2.3), приходим к следующим выводам:

– на подотрезке $I_1 = [0,\xi]$

$$z_2(\tau) = y_0 = const, \quad p_2(\tau) = \frac{1}{c}\left(1 - y_0/x(0+)\right) = const,$$

в то время как z_1 и p_1 возрастают, причем $z_1(\xi) = x(0+)$, $p_1(\xi) = \dfrac{1}{a\left(1 - x(0+)\right)}$;

– на полуинтервале $I_2 = (\xi,d_0]$ $z_1(\tau) = x(0+) = const,$ z_2 возрастает до значения $z_2(d_0) = y(0+)$. Функция p_1 убывает, а p_2 возрастает на I_2. По предположению на $(0,T]$ $u = v = 0.$ Поэтому из сопряженной системы (2.1), условия скачка (2.3) и строгой монотонности функций z_2, p_1, p_2 на I_2 и функции z_1 на I_1 следуют неравенства (3.1) и равенство (3.3).

Уравнение (3.3) получается путем интегрирования по отрезку $[\xi, d_0]$ соотношения:

$$\frac{z_2'}{p_1'} = -c\left(x(0+) - z_2\right)^2 / z_2$$

(см. предельную систему (2.4) и второе соотношение из условий оптимальности (2.7)).

Величины импульсов (3.6), (3.7) компонент управления c^1, c^2 находятся из предельной системы (2.4) с учетом проведенного анализа этой системы.

Кроме того, напомним, что необходимо учесть условие оптимальности момента импульса (2.6), которое в данном случае имеет вид (3.2).

Экономическая интерпретация стратегии А состоит в следующем: фирме рекомендуется проведение начальной агрессивной рекламы в строгой последовательности: сначала рекламируется ведущий товар, а затем — ведомый с соответствующей интенсивностью. После этого вложение средств в рекламу невыгодно вплоть до момента времени T. Как следствие, доли рынка проникновения каждого из товаров за счет рекламы резко возрастают до уровней $x(0+)$ и $y(0+)$ соответственно, а затем уменьшаются с постоянными темпами b и d соответственно.

В зависимости от значений параметров исследуемой модели, кроме стратегии А, имеются еще 4 возможные кратковременные агрессивные рекламные стратегии. Поскольку качественный анализ каждой из них аналогичен анализу стратегии А, ниже приведем условия, при которых эти стратегии реализуются, и их экономическую интерпретацию.

Стратегия В аналогична предыдущей и отличается от нее лишь тем, что после проведения рекламы обоих товаров в начале периода $[0,T]$ доля рынка проникновения ведомого товара уменьшается незначительно и поддерживается на постоянном уровне $\bar{v}$ (см. (2.10)), благодаря продолжающемуся «умеренному» потоку инвестиций в его рекламу. После момента времени:

$$\theta_1 = T + \frac{1}{d} ln\left(1 - \frac{d}{Bc\left(1 - \sqrt{b^2 + 4Bc(d-b)}\right)}\right)$$

инвестиции для ведомого товара прекращаются, но начинаются «умеренные» вложения в рекламу ведущего товара до момента:

$$\theta_2 = T + \frac{1}{b} ln\left(1 - \frac{b}{Aa(1-\bar{x})}\right),$$

где $\bar{x}$ определяется первым из равенств (2.9).

Стратегия B реализуется, если выполняются следующие условия на параметры задачи:

$$Aa(1-\bar{x})(1-e^{-bT})>b, \quad Bc(1-k)(1-e^{-dT})>d, \quad b<d<Bc, \qquad (3.10)$$

$$\left(1-\frac{d}{Bc(1-k)}\right)^{1/d}<\left(1-\frac{b}{Aa(1-\bar{x})}\right)^{1/b},$$

где $k=1-\frac{b}{2Bc}-\sqrt{\left(\frac{b}{2Bc}\right)^2+\frac{d-b}{Bc}}$.

Стратегия C: после проведения агрессивной рекламы ведущего товара продолжается «умеренный» поток инвестиций в его рекламу в размере $\bar{u}$ (см. (2.9)) вплоть до момента:

$$\tau=T+\frac{ln\,\bar{x}}{b}.$$

На заключительном этапе вложения в рекламу неэффективны. При этом доля рынка проникновения ведущего товара сначала резко возрастает до постоянного уровня $\bar{x}$. Реклама второго товара не проводится в течение всего периода, так как его начальная доля рынка проникновения и так достаточно велика.

Стратегия C возможна, если справедливы следующие неравенства:

$$\bar{x}>x_0, \quad Aa(1-x_0)(1-\bar{x})\geq b,$$

$$Bc(1-e^{d(t-T)})(1-y_0e^{-dt}/x(t))\leq d,\ t\in[0,T].$$

Стратегия D отличается от предыдущей тем, что лишь в начале периода проводится агрессивная реклама ведущего товара. Доля рынка проникновения ведущего товара увеличивается до $x(0+)=y_0/k$. Затем до момента θ_1 (определяется в стратегии B) «умеренно» рекламируется только ведомый товар, после чего инвестиции в рекламу товаров нерентабельны.

Реализация этого режима возможна в случае выполнения условия (3.10) и ряда дополнительных условий, которые в статье не приводятся в силу их громоздкости.

Стратегия E аналогична стратегии C, только начальная агрессивная реклама и последующие умеренные вложения имеют место для ведомого товара. При этом реклама ведущего товара не проводится вовсе.

Необходимые условия существования этой рекламной стратегии:

$$Aa\left(1-x_0e^{-bt}\right)(1-e^{b(t-T)})\leq b,\ t\in T,$$

$$Bc(1-k)(1-e^{d(\theta_1-T)})\leq d, \quad y_0<kx_0,$$

$$\frac{(b-dk)x_0}{1-k}-\frac{(bx_0-dy_0)x_0}{1-y_0/x_0}+Bc(kx_0-y_0)\geq bc.$$

(k определено выше в стратегии B).

Таким образом, экономически описаны всевозможные экстремальные рекламные стратегии фирмы.

4. Построение квазиоптимального решения для стратегии А

Как уже отмечалось в п. 2, решением исследуемой задачи в импульсной постановке является не только управляющая мера, но и пара предельных управлений для каждого момента скачка меры. Без учета этого факта невозможно выделить индивидуальную обобщенную траекторию и построить подходящую аппроксимацию обычными допустимыми управлениями и траекториями (в которых задача не имеет решения). Такие аппроксимации назовем квазиоптимальным решением задачи.

Построим квазиоптимальное решение, например, для стратегии А. В качестве такого решения можно взять, аппроксимирующие последовательности управлений вида:

$$u_n(t)=\begin{cases} c^1 n, & t\in[0,1/n), \\ 0, & t\geq 1/n, \end{cases} \qquad v_n(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,1/n), \\ c^2 n e^{-bt}, & t\in[1/n,2/n), \\ 0, & t\geq 2/n. \end{cases}$$

Очевидно, при таком выборе $u_n(t)dt\to c^1\delta(t)$, $v_n(t)dt\to c^2\delta(t)$ и соблюдается порядок приложения импульсов в момент $t=0$ по u- и v-компонентам управления соответственно.

Легко проверить, что максимизирующим последовательностям управлений $u_n(t)$, $v_n(t)$ соответствуют траекторные последовательности:

$$x_n(t)=\begin{cases} \dfrac{ac^1 n}{ac^1 n+b}+\left(x_0-\dfrac{ac^1 n}{ac^1 n+b}\right)e^{-(ac^1 n+b)t}, & t\in[0,1/n), \\ D(n)e^{-bt}, & t\geq 1/n, \end{cases}$$

$$y_n(t)=\begin{cases} y_0 e^{-dt}, & t\in[0,1/n), \\ y_0\, exp\left(\dfrac{cc^2 n}{D(n)}\left(\dfrac{1}{n}-t\right)-dt\right)+ \\ +Q(n)\left[e^{-bt}-exp\left(\left(\dfrac{cc^2 n}{D(n)}+d\right)\left(\dfrac{1}{n}-t\right)-\dfrac{b}{n}\right)\right], & t\in[1/n,2/n), \\ \left\{y_0\, exp\left(-\dfrac{cc^2}{D(n)}\right)+Q(n)\left(exp\left(\dfrac{2(d-b)}{n}\right)-\right.\right. \\ \left.\left.-exp\left(-\left(\dfrac{cc^2}{D(n)}-d-b\right)\dfrac{1}{n}\right)\right)\right\}e^{-dt}, & t\geq 2/n. \end{cases}$$

$$D(n) = x_0 e^{-ac^1} + \frac{ac^1 n}{ac^1 n + b}\left(e^{b/n} - e^{-ac^1}\right), \quad Q(n) = \frac{cc^2 n D(n)}{cc^2 n + (d-b)D(n)}.$$

Легко видеть, что при $n \to \infty$

$$x_n(t) \to \bar{x}(t) = \begin{cases} x_0, & t = 0, \\ x(0+)e^{-bt}, & t \in (0,T], \end{cases}$$

$$y_n(t) \to \bar{y}(t) = \begin{cases} y_0, & t = 0, \\ y(0+)e^{-dt}, & t \in (0,T], \end{cases}$$

где $x(0+)$ и $y(0+)$ определяются следующими соотношениями:

$$x(0+) = 1 - (1 - x_0)e^{-ac^1},$$

$$y(0+) = x(0+) - (x(0+) - y_0)exp\left(-\frac{cc^2}{x(0+)}\right).$$

Легко проверить, что на данной аппроксимации предельное значение функционала:

$$\begin{aligned} \bar{J} = \lim_{n\to\infty} J\left(u_n(t), v_n(t)\right) = -c^1 - c^2 + \\ + A\left(1 - e^{-bT}\right)x(0+)/b + B\left(1 - e^{-dT}\right)y(0+)/d \end{aligned} \tag{4.1}$$

совпадает со значением функционала в стратегии А. Схематично качественное поведение построенного квазиоптимального и оптимального решений изображено на рис. 1 точечной и сплошной линиями соответственно.

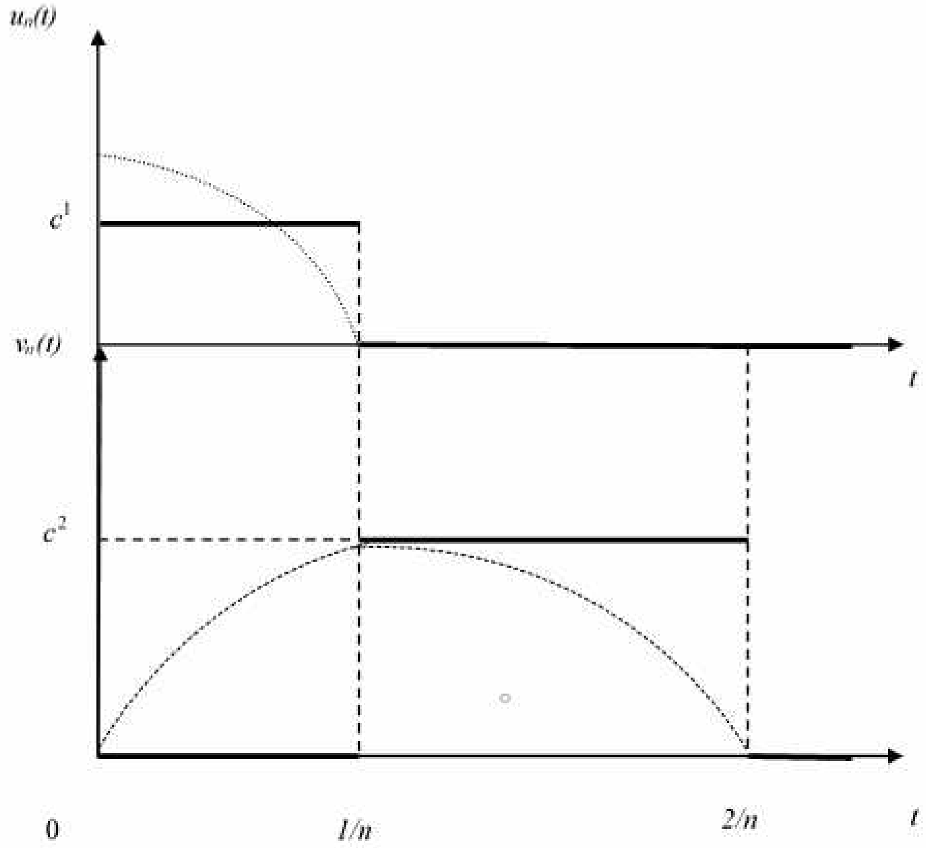

Рис. 1. Качественное поведение построенного квазиоптимального и оптимального решений

Отметим, что установленная в ходе исследования последовательность приложения импульсов компонент управления не может быть нарушена; а именно, если выбрать аппроксимацию:

$$\hat{u}_n(t)=\begin{cases}0 & t\in[0,1/n),\\ c^1 n, & t\in[1/n,2/n),\\ 0, & t\geq 2/n,\end{cases}\qquad \hat{v}_n(t)=\begin{cases}c^2 n e^{-bt}, & t\in[0,1/n),\\ 0, & t\geq 1/n,\end{cases}$$

то нетрудно показать, что значение критерия качества $\hat{J}$, найденное по аналогии со значением (4.1), будет меньше него.

Заключение

В статье приводятся описание модели оптимального распределения во времени расходов на рекламу двух взаимодополняемых товаров [10], постановка, анализ и результаты полного исследования задачи оптимального управления, соответствующей этой модели. Порожденная ею оптимизационная задача в силу полуограниченности управления рассматривается в импульсной постановке. Для ее анализа используется обобщенный принцип максимума для импульсных процессов [5], квадратичные необходимые условия оптимальности особых управлений [4].

Литература

1. Аксенюшкина Е. В. Нахождение оптимальной инвестиционной стратегии финансовой организации // Baikal Research Journal. 2017. Т. 8, № 4. С. 16–30. DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(4).16.

2. Баенхаева А. В. Исследование оптимального импульсного управления в модели рекламных расходов // Вестник Бурятского государственного унивеситета. 2009. № 9. С. 18–21.

3. Баенхаева А. В., Тимофеев С. В. Эволюционный подход к развитию средств массовой информации: построение математической модели // Известия Байкальского государственного университета. 2016. Т.26, № 5. С. 825–833. DOI: 10.17150/2500-2759.2016.26(5).825-833.

4. Дыхта В. А. Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных и особых процессов // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35, № 1. С.70–82.

5. Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

6. Дюкалов А. Н. Некоторые задачи прикладной математической экономики. М.: Наука, 1983. 119 с.

7. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 606 с.

8. Шуплецов А. Ф., Харитонова П. В. Моделирование оптимальной стратегии развития предпринимательской деятельности промышленной компании на основе эффективного использования потенциала нематериальных ресурсов // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). 2013. № 6. С. 8–14.

9. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика: сборник. М.: Мир, 1974. С. 7–45.

10. Dorroh, J. R., Ferreira G. A. A multistate, multicontrol problem with unbounded controls. SIAM J. Contr. and Optim. Vol. 32, No.5. 1994. P. 1322–1331.

11. Sethi S. P., Thomson G. L. Optimal control theory. Applications to management science USA. Boston, 1981. 370 p.

OPTIMAL CONDITIONS OF IMPULSIVE PROCESSES IN APPLICATION TO THE PROBLEMS OF ECONOMIC DYNAMICS

Natalya V. Antipina
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Baikal State University,
11 Lenina St., Irkutsk 664003, Russia
E-mail: natant2012@mail.ru

The article presents an applied model of the optimal distribution in time of advertising costs of two goods, which is mathematically formalized as a problem of optimal impulsive control. Bounding on top of investment's temps in the advertising does not exclude the possibility of aggressive advertising and formally leads to the need to consider the problem in an extended, impulse statement.
A mathematical singularity of this problem is the well-posedness of non-compliance condition of the impulsive control transition (the Frobenius-type well-posedness condition). This fact considerably complicates the investigation of the problem and means the following: each impulsive control corresponds not to one trajectory, but to a set of generalized solutions of the problem's dynamical system from the class of bounded variation functions. The control in this problem of pulse optimization is not only measures, but also a set of limit controls for each moment of the measure jump. They make it possible to single out an individual generalized trajectory and to construct, if it's necessary, a conventional suboptimal solution.
In this article we applied the corresponding maximum principle and the quadratic necessary optimality conditions of particular controls for qualitative analysis of the presented model.
Keywords: impulsive control; discontinuous trajectories; optimality conditions; extremal; advertising investments.

References

1. Aksenyushkina E. V. Nakhozhdenie optimal'noi investitsionnoi strategii finansovoi organizatsii [Search for Optimal Investment Strategy of Financial Institution]. *Baikal Research Journal.* 2017. V. 8, No. 4. Pp. 16–30. DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(4).16.

2. Baenkhaeva A. V. Issledovanie optimal'nogo impul'snogo upravleniya v modeli reklamnykh raskhodov [The Research of Optimal Impulsive Control in the Model of Advertising Expenditure]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo univesiteta — Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics.* 2009. No. 9. Pp. 18–21.

3. Baenkhaeva A. V., Timofeev S. V. Evolyutsionnyi podkhod k razvitiyu sredstv massovoi informatsii: postroenie matematicheskoi modeli [Evolutionary Approach to Development of Mass Media: Construction of a Mathematical Model]. *Izvestiya Baikal'skogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of Baikal State University.* 2016. V. 26. No. 5. Pp. 825–833. DOI: 10.17150/2500-2759.2016.26(5).825-833. Pp. 825–833.

4. Dykhta V. A. A Variational Maximum Principle and Quadratic Optimal Conditions of Pulse and Singular Processes. *Sib. mat. zhurn. — Siberian Math. J.* 1994. V. 35. No. 1. Pp. 70–82.

5. Dykhta V. A., Samsonyuk O. N. *Optimal'noe impul'snoe uprav-lenie s prilozheniyami* [Optimal Impulsive Control with Applications]. Moscow: Phizmatlit Publ., 2000. 256 p.

6. Dyukalov A. N. *Nekotorye zadachi prikladnoi matematicheskoi ekonomiki* [Some Problems of Applied Mathematical Economics]. Moscow: Nauka Publ., 1983. 119 p. Moscow: Nauka Publ., 1983. 119 s.

7. Intriligator M. *Mathematical Optimization and Economic Theory.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971. 508 p.

8. Shupletsov A. F., Kharitonova P. V. *Modelirovanie optimal'noi strategii razvitiya predprinimatel'skoi deyatel'nosti promyshlennoi kompanii na osnove effektivnogo ispol'zovaniya potentsiala nematerial'nykh resursov* [Modeling of An Optimal Strategy of Company Business Development on the Basis of Efficient Utilization of Non-Tangible Resources]. *Izvestiya Irkutskoi gosudarstvennoi ekonomicheskoi akademii — Proceedings of Irkutsk State Economics Academy.* 2013. No. 6. Pp. 8–14.

9. Arrow K. J. *Applications of Control Theory to Economic Growth.* Print book, 1967.

10. Dorroh J. R., Ferreira G. A. A Multistate, Multicontrol Problem with Unbounded Controls. *SIAM J. Contr. and Optim.* 1994. V. 32. No. 5. Pp. 1322–1331.

11. Sethi S. P., Thomson G. L. *Optimal Control Theory. Applications to Management Science.* USA, Boston, 1981. 370 p.