ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УДК 539
DOI: 10.18101/2304-5728-2018-2-63-76

ЭФФЕКТИВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ КОМПОЗИЦИОННОГО ТВЕРДОГО В СРЕДНЕМ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

© Кравчук Александр Степанович
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры био- и наномеханики,
Белорусский государственный университет
Белоруссия, 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4
E-mail: ask_belarus@inbox.ru

© Кравчук Анжелика Ивановна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования,
Белорусский государственный университет
Белоруссия, 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4
E-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

В статье получены эффективные уравнения динамики композиционного в среднем изотропного твердого тела в напряжениях и перемещениях. Установлено, что структура уравнений в обоих случаях полностью сохраняется такой же, как и в однородном случае с точностью до замены деформаций, напряжений и перемещений на средние по представительному объему композиционного твердого тела величины. При этом в качестве усредненных упругих характеристик необходимо использовать полученные ранее средние значения по Кравчуку — Тарасюку модуля Юнга, коэффициента Пуассона, модуля сдвига. Уравнения получены в предположении существования связи между эффективными значениями модуля Юнга, коэффициента Пуассона, модуля сдвига аналогичной общеизвестной связи для коэффициентов тела из одного однородного материала. Поскольку эта связь даже в однородном случае является приближенной, то это незначительно сказывается на точности полученных уравнений. Получены эффективные значения скоростей распространения волн различного типа в твердой композиционной в среднем изотропной среде. Результаты данных исследований позволяют решать динамические задачи для твердых композиционных тел с помощью стандартного конечно-элементного обеспечения, например ANSYS. С учетом этих результатов в известных программах рекомендуется использовать в качестве эффективных характеристик твердого тела не только средние по Кравчуку — Тарасюку упругие параметры, но и среднюю плотность композиционного твердого тела, вычисленную также в приближении Кравчука — Тарасюка.
Ключевые слова: дискретная случайная величина; концентрации компонент; средние значения по Кравчуку — Тарасюку; уравнения Бельтрами — Митчелла; уравнения Ламе.

Введение

В последние годы существенное продолжение получили исследования физико-механических свойств материалов, температурных полей и напряженно-деформированного состояния в элементах конструкций с учетом их структуры. Результаты этих исследований могут найти практическое применение при расчете на прочность элементов конструкций из неоднородных материалов, разработке технологических режимов их изготовления, а также при выборе оптимальных структур новых композиционных материалов, т. к. одной из основных задач механики композитов является задача проектирования материалов с заранее заданными жесткостными и прочностными характеристиками [1].

Фактически в данной статье рассматривается композиционный материал с зернистой структурой. Это физическое свойство фиксируется в предположении, что исследуется в среднем изотропный материал.

На основе разработанной методики в данной статье выведены уравнения динамики для решения задач в смысле средних по представительному объему композиционного материала напряжений и перемещений.

1. Геометрические предположения

Будем рассматривать пространственную декартову систему координат с осями $0x_i$ ($i=\overline{1,3}$). Твердое тело будет занимать объем V. Точка $x \in V$ будет иметь три координаты $x=(x_1, x_2, x_3)$. Через функцию $u_i(x,t)$ ($i=\overline{1,3}$) будем обозначать перемещения точки x твердого тела вдоль соответствующей оси $0x_i$ (проекцию на указанное направление) в момент времени t. Отметим, что при выводе всех уравнений механики твердого тела используется элементарный объем $dV = dx_1 \times dx_2 \times dx_3$ (где dx_i — приращение вдоль оси $0x_i$), описанный вокруг некоторой точки $x \in V$.

2. Особенности вывода уравнений для композиционных сред с использованием объемных долей компонент

Будем называть представительным объемом композиционной среды наименьший объем, в котором физические характеристики остаются в среднем равными физическим характеристикам всего объема среды.

В отличие от сплошной среды уравнения не будут верны непосредственно при предельном переходе $dV \to 0$, т. к. в теории композиционных материалов представительный объем композиционного материала $dV \neq 0$. Но, с другой стороны, он бесконечно мал по сравнению со всем объемом V. Точнее, $\sqrt[3]{dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3}$ (характерный размер представительного объема) мал по сравнению с наименьшим характерным размером объема композиционного тела. Отметим, что во всем объеме тела и в элементарном объеме dV концентрации компонент (объемные доли) равны γ_k (где k ($k=\overline{1,n}$) — номер компоненты, при этом выполнено условие нормировки $\sum_{k=1}^{n}\gamma_k=1$).

Очевидно, что для каждой компоненты представительного объема неоднородного многокомпонентного твердого тела должны быть известны ее плотность ρ_k, модуль Юнга E_k, коэффициент Пуассона ν_k или модуль сдвига G_k.

При использовании данных определений и предположений план вывода уравнений твердого тела полностью сохраняется с точностью до замены понятия элементарного объема на представительный объем.

Отметим также, что в смысле формулировки объемных долей γ_k их следует рассматривать также как дискретную случайную величину присутствия компоненты с номером k в точке $x\in V$.

Обозначим через $\sigma_{ij}^k(x)$ и $\varepsilon_{ij}^k(x)$ ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$) дискретные значения напряжений и деформаций по Коши на k-й компоненте среды в представительном объеме. Домножая на γ_k и суммируя по k, получаем средние по реализации композиции напряжения и деформации:

$$\left\langle\sigma_{ij}(x)\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\sigma_{ij}^k(x),\ \left\langle\varepsilon_{ij}(x)\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\varepsilon_{ij}^k(x). \qquad (1)$$

Таким образом, стационарность обеспечивается требованием воспроизведения концентраций на всех уровнях объема от представительного dV до общего V. Эргодичность обеспечивается равенством среднего по реализации (1) среднему по представительному объему:

$$\left\langle\sigma_{ij}(x)\right\rangle=\frac{1}{\iiint\limits_{(dV)}dxdydz}\cdot\iiint\limits_{(dV)}\sigma_{ij}^k(x)dxdydz,$$

$$\left\langle\varepsilon_{ij}(x)\right\rangle=\frac{1}{\iiint\limits_{(dV)}dxdydz}\cdot\iiint\limits_{(dV)}\varepsilon_{ij}^k(x)dxdydz. \qquad (2)$$

3. Основные формулы для k-й компоненты композиционного тела

Соотношения Коши для деформаций всех включений из k-го однородного изотропного материала (компоненты) имеют вид [2]:

$$\varepsilon_{ii}^k=u_{i,i}^k\ (i=\overline{1,3}),$$

$$\varepsilon_{ij}^k=u_{i,j}^k+u_{j,i}^k\ (i\neq j,\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}). \qquad (3)$$

где ε_{ij}^k ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$) — компоненты деформаций по Коши, u_i^k — проекции вектора перемещений для компоненты композиционного материала с номером k, при этом $u_{i,j}^k = \dfrac{\partial u_i^k}{\partial x_j}$ ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$).

Для изотропных тел соотношения обобщенного закона Гука известны из курса сопротивления материалов. В принятых выше обозначениях в развернутой форме связь между компонентами тензора напряжений и деформациями по Коши имеет вид [2]:

$$\varepsilon_{11}^k = \frac{1}{E_k}\left(\sigma_{11}^k - \nu_k\cdot\left(\sigma_{22}^k+\sigma_{33}^k\right)\right),\quad \varepsilon_{22}^k = \frac{1}{E_k}\left(\sigma_{22}^k - \nu_k\cdot\left(\sigma_{33}^k+\sigma_{11}^k\right)\right),$$

$$\varepsilon_{33}^k = \frac{1}{E_k}\left(\sigma_{33}^k - \nu_k\cdot\left(\sigma_{22}^k+\sigma_{11}^k\right)\right), \tag{4}$$

$$\varepsilon_{12}^k = \frac{1}{G_k}\sigma_{12}^k,\quad \varepsilon_{23}^k = \frac{1}{G_k}\sigma_{23}^k,\quad \varepsilon_{31}^k = \frac{1}{G_k}\sigma_{31}^k,$$

где σ_{ii}^k ($i=\overline{1,3}$) — нормальные напряжения, σ_{ij}^k ($i\neq j$, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$) — касательные напряжения.

Далее одними из основных уравнений механики твердого тела являются система уравнений совместности, которая содержат шесть уравнений [2]:

$$\varepsilon_{ii,jj}^k + \varepsilon_{jj,ii}^k - \varepsilon_{ij,ij}^k = 0 \quad (i,j=\overline{1,3},\ i\neq j),$$

$$\left(\varepsilon_{ij,m}^k - \varepsilon_{jm,i}^k + \varepsilon_{mi,j}^k\right)_{,i} - 2\cdot\varepsilon_{ii,jm}^k = 0,\ (i,j,k=\overline{1,3},\ i\neq j\neq m). \tag{5}$$

Уравнения движения элементарного объема твердого тела с постоянной плотностью ρ можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij,j}^k - \rho_k\cdot\ddot{u}_i^k = 0\ (i=\overline{1,3}), \tag{6}$$

где $\ddot{u}_i^k = \dfrac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2}$.

4. Уравнения движения твердого тела и совместности деформаций в смысле средних по Фойгту

Модифицированная гипотеза Фойгта в механике композиционных материалов связана с предположением об однородности по всем компонентам композиционного материала проекций вектора перемещений $u_i = u_i^k$, а также их дважды непрерывной дифференцируемости по всем переменным в представительном объеме dV твердого композиционного тела. Домножая (5) и (6) на γ_k ($k=\overline{1,n}$) и суммируя по k, получаем:

$$\left\langle \varepsilon_{ii} \right\rangle^{V}_{,jj} + \left\langle \varepsilon_{jj} \right\rangle^{V}_{,ii} - \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle^{V}_{,ij} = 0 \ \ (i, j = \overline{1,3},\ i \ne j),$$

$$\left(\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle^{V}_{,m} - \left\langle \varepsilon_{jm} \right\rangle^{V}_{,i} + \left\langle \varepsilon_{mi} \right\rangle^{V}_{,j} \right)_{,i} - 2 \cdot \left\langle \varepsilon_{ii} \right\rangle^{V}_{,jm} = 0\,,\ (i, j, m = \overline{1,3},\ i \ne j \ne m), \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{3} \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle^{V}_{,j} - \left\langle \rho \right\rangle^{V} \cdot \frac{\partial^2 \left\langle u_i \right\rangle^{V}}{\partial t^2} = 0 \ \ (i = 1,..,3),$$

где

$$\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \varepsilon_{ij}^{k} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,,\ \ \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \sigma_{ij}^{k}\,,$$

$$\left\langle \rho \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \rho_k\,, \quad \left\langle u_i \right\rangle^{V} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot u_i^{k} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot u_i = u_i\,.$$

5. Использование средних значений по Рейссу в уравнениях движения и совместности деформаций

Гипотеза Рейсса в механике композиционных материалов связана с предположением об однородности по всем компонентам композиционного материала компонент напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{k}$ в представительном объеме dV твердого композиционного тела. Домножая (5) и (6) после элементарных преобразований на γ_k $(k = \overline{1,n})$ и суммируя по k, получаем:

$$\left\langle \varepsilon_{ii} \right\rangle^{R}_{,jj} + \left\langle \varepsilon_{jj} \right\rangle^{R}_{,ii} - \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle^{R}_{,ij} = 0 \ \ (i, j = \overline{1,3},\ i \ne j),$$

$$\left(\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle^{R}_{,m} - \left\langle \varepsilon_{jm} \right\rangle^{R}_{,i} + \left\langle \varepsilon_{mi} \right\rangle^{R}_{,j} \right)_{,i} - 2 \cdot \left\langle \varepsilon_{ii} \right\rangle^{R}_{,jm} = 0\,,\ (i, j, m = \overline{1,3},\ i \ne j \ne m), \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{3} \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle^{R}_{,j} - \left\langle \rho \right\rangle^{R} \cdot \frac{\partial^2 \left\langle u_i \right\rangle^{R}}{\partial t^2} = 0 \ \ (i = \overline{1,3}),$$

где

$$\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle^{R} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \varepsilon_{ij}^{k}\,,\ \ \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle^{R} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \sigma_{ij}^{k} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \sigma_{ij} = \sigma_{ij}\,,$$

$$\left\langle \rho \right\rangle^{R} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{\rho_k} \right)^{-1}, \quad \left\langle u_i \right\rangle^{R} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot u_i^{k}\,.$$

6. Эффективные уравнения движения и совместности деформаций

По принятому в механике композиционных тел правилу под эффективными значениями деформации $\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle$ будем понимать простую смесь приближений по Фойгту и Рейссу:

$$\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = \alpha \cdot \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle^{V} + (1 - \alpha) \cdot \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle^{R}, \quad (9)$$

где α $(\alpha \in [0,1])$ — вещественная константа. Тогда для эффективных уравнений неразрывности деформаций из (7) и (8) с учетом (9) получаем:

$$\left\langle \varepsilon_{ii} \right\rangle_{,jj} + \left\langle \varepsilon_{jj} \right\rangle_{,ii} - \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle_{,ij} = 0 \ \ (i,j=\overline{1,3},\ i \neq j),$$

$$\left(\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle_{,m} - \left\langle \varepsilon_{jm} \right\rangle_{,i} + \left\langle \varepsilon_{mi} \right\rangle_{,j} \right)_{,i} - 2 \cdot \left\langle \varepsilon_{ii} \right\rangle_{,jm} = 0,\ (i,j,m=\overline{1,3},\ i \neq j \neq m). \quad (10)$$

Очевидно, что интегрирование по α на отрезке $[0,1]$ не окажет никакого влияния на вид эффективных уравнений неразрывности деформаций (10).

Перейдем к рассмотрению эффективных уравнений движения. На первом этапе будем понимать под эффективным проекциями перемещения $\left\langle u_i \right\rangle = \left\langle u_i \right\rangle^V = \left\langle u_i \right\rangle^R$, а для эффективного напряжения $\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle$ справедливо выражение $\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = \alpha \cdot \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle^V + (1-\alpha) \cdot \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle^R$. Тогда из (7) и (8) получаем:

$$\sum_{j=1}^{3} \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle_{,j} - \left(\alpha \cdot \left\langle \rho \right\rangle^V + (1-\alpha) \cdot \left\langle \rho \right\rangle^R \right) \cdot \frac{\partial^2 \left\langle u_i \right\rangle}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

При использовании обратного набора гипотез $\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle^V = \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle^R$ для эффективных проекций перемещения $\left\langle u_i \right\rangle$ справедливо выражение $\left\langle u_i \right\rangle = \alpha \cdot \left\langle u_i \right\rangle^V + (1-\alpha) \cdot \left\langle u_i \right\rangle^R$. Тогда из (7) и (8) получаем:

$$\sum_{j=1}^{3} \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle_{,j} - \left(\frac{\alpha}{\left\langle \rho \right\rangle^V} + \frac{1-\alpha}{\left\langle \rho \right\rangle^R} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial^2 \left\langle u_i \right\rangle}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

Известно [3; 4], что после интегрирования по α на отрезке $[0,1]$ уравнений (11) и (12) их коэффициенты образуют вилку Кравчука — Тарасюка, являющуюся естественным сужением вилки Рейса — Фойгта, и после этого из двух оценочных уравнений (11) и (12) можно получить эффективное уравнение движения представительного объема композиционной среды в виде среднего арифметического уравнений (11) и (12):

$$\sum_{j=1}^{3} \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle_{,j} - \left\langle \rho \right\rangle^{K-T} \cdot \frac{\partial^2 \left\langle u_i \right\rangle}{\partial t^2} = 0,\ (i=1,..,3), \quad (13)$$

где $\left\langle \rho \right\rangle^{K-T} = \frac{1}{2} \left(\frac{\left\langle \rho \right\rangle^V + \left\langle \rho \right\rangle^R}{2} + \frac{\left\langle \rho \right\rangle^R \cdot \left\langle \rho \right\rangle^V}{\left\langle \rho \right\rangle^V - \left\langle \rho \right\rangle^R} \ln \left(\frac{\left\langle \rho \right\rangle^V}{\left\langle \rho \right\rangle^R} \right) \right)$.

7. Эффективный обобщенный закон Гука в смысле средних значений по Кравчуку — Тарасюку упругих параметров

В случае использования тензора деформаций по Коши обобщенный закон Гука в смысле эффективных значений деформаций и напряжений можно записать в виде [5; 6]:

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \frac{1}{\langle E \rangle^{K-T}} \left(\langle \sigma_{11} \rangle - \langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \left(\langle \sigma_{22} \rangle + \langle \sigma_{33} \rangle \right) \right),$$

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{1}{\langle E \rangle^{K-T}} \left(\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \left(\langle \sigma_{33} \rangle + \langle \sigma_{11} \rangle \right) \right),$$

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{1}{\langle E \rangle^{K-T}} \left(\langle \sigma_{33} \rangle - \langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \left(\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle \right) \right), \ \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{\langle G \rangle^{K-T}}, \tag{14}$$

где

$$\langle E \rangle^{K-T} = \frac{1}{2} \left(\langle E \rangle^{\sigma} + \langle E \rangle^{\varepsilon} \right), \quad \langle \nu \rangle^{K-T} = \frac{1}{2} \left(\langle \nu \rangle^{\sigma} + \langle \nu \rangle^{\varepsilon} \right),$$

$$\langle G \rangle^{K-T} = \frac{1}{2} \left(\langle G \rangle^{\sigma} + \langle G \rangle^{\varepsilon} \right),$$

$$\langle E \rangle^{\sigma} = \frac{\langle E \rangle^{V} \cdot \langle E \rangle^{R} \cdot \ln\left(\langle E \rangle^{V} / \langle E \rangle^{R} \right)}{\langle E \rangle^{V} - \langle E \rangle^{R}},$$

$$\langle E \rangle^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\langle E \rangle^{V} + \langle E \rangle^{R} \right) +$$

$$+ \frac{\mathrm{H}^{V} \cdot \mathrm{H}^{R} \cdot \left(\langle \nu \rangle^{V} - \langle \nu \rangle^{R} \right)^2 \left(\left(\mathrm{H}^{V} \right)^2 - \left(\mathrm{H}^{R} \right)^2 - 2 \cdot \mathrm{H}^{V} \cdot \mathrm{H}^{R} \cdot \ln\left(\mathrm{H}^{V} / \mathrm{H}^{R} \right) \right)}{\left(\mathrm{H}^{V} - \mathrm{H}^{R} \right)^3},$$

$$\langle E \rangle^{V} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i}{1+\nu_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i}{1-2\nu_i} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \right), \ \langle E \rangle^{R} = 1 \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{E_i} \right),$$

$$\langle \nu \rangle^{V} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i \cdot \nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \cdot E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \right),$$

$$\langle \nu \rangle^{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i \nu_i}{E_i} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{E_i} \right), \tag{15}$$

$$\mathrm{H}^{R} = \frac{\langle E \rangle^{R}}{\left(1 + \langle \nu \rangle^{R} \right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \langle \nu \rangle^{R} \right)}, \ \mathrm{H}^{V} = \frac{\langle E \rangle^{V}}{\left(1 + \langle \nu \rangle^{V} \right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \langle \nu \rangle^{V} \right)},$$

$$\langle \nu \rangle^{\sigma} = \frac{\langle E \rangle^{V} \cdot \langle \nu \rangle^{R} - \langle E \rangle^{R} \cdot \langle \nu \rangle^{V}}{\langle E \rangle^{V} - \langle E \rangle^{R}} + \frac{\langle E \rangle^{V} \cdot \langle E \rangle^{R} \cdot \left(\langle \nu \rangle^{V} - \langle \nu \rangle^{R} \right) \cdot \ln\left(\langle E \rangle^{V} / \langle E \rangle^{R} \right)}{\left(\langle E \rangle^{V} - \langle E \rangle^{R} \right)^2},$$

$$\langle\nu\rangle^{\varepsilon}=\frac{\mathrm{H}^{V}\cdot\langle\nu\rangle^{V}-\mathrm{H}^{R}\cdot\langle\nu\rangle^{R}}{\mathrm{H}^{V}-\mathrm{H}^{R}}-\frac{\mathrm{H}^{V}\cdot\mathrm{H}^{R}\cdot\left(\langle\nu\rangle^{V}-\langle\nu\rangle^{R}\right)\cdot\ln\left(\mathrm{H}^{V}/\mathrm{H}^{R}\right)}{\left(\mathrm{H}^{V}-\mathrm{H}^{R}\right)^{2}},$$

$$\langle G\rangle^{\sigma}=\frac{\langle G\rangle^{V}\cdot\langle G\rangle^{R}\cdot\ln\left(\langle G\rangle^{V}/\langle G\rangle^{R}\right)}{\langle G\rangle^{V}-\langle G\rangle^{R}},\ \ \langle G\rangle^{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(\langle G\rangle^{V}+\langle G\rangle^{R}\right),$$

$$\langle G\rangle^{V}=\frac{\langle E\rangle^{V}}{2\cdot\left(1+\langle\nu\rangle^{V}\right)},\ \ \langle G\rangle^{R}=\frac{\langle E\rangle^{R}}{2\cdot\left(1+\langle\nu\rangle^{R}\right)}.$$

8. Эффективные уравнения Бельтрами — Митчелла в смысле средних по представительному объему значений напряжений структурно неоднородного в среднем изотропного композиционного тела

Проведем стандартные рассуждения при выводе уравнений Бельтрами — Митчелла [2]. Рассмотрим первые три эффективных уравнения совместности в форме (10) в терминах деформаций по Коши. Возьмем первое уравнение из первой группы эффективной системы (10):

$$\langle\varepsilon_{11}\rangle_{,22}+\langle\varepsilon_{22}\rangle_{,11}-\langle\varepsilon_{12}\rangle_{,12}=0.$$

Подставим в него $\langle\varepsilon_{11}\rangle$, $\langle\varepsilon_{22}\rangle$, $\langle\varepsilon_{12}\rangle$ из формул (14) эффективного обобщенного закона Гука и, домножив правую и левую части полученного равенства на $\langle E\rangle^{K-T}$, получаем:

$$\begin{gathered}\langle\sigma_{11}\rangle_{,22}-\langle\nu\rangle_{K-T}\cdot\left(\langle\sigma_{22}\rangle_{,22}+\langle\sigma_{33}\rangle_{,22}\right)+\\+\langle\sigma_{22}\rangle_{,11}-\langle\nu\rangle_{K-T}\cdot\left(\langle\sigma_{33}\rangle_{,11}+\langle\sigma_{11}\rangle_{,11}\right)=\frac{\langle E\rangle^{K-T}}{\langle G\rangle^{K-T}}\cdot\langle\sigma_{12}\rangle_{,12}.\end{gathered}\tag{16}$$

Исключим из последнего уравнения $\langle\sigma_{12}\rangle_{,12}$, используя эффективные уравнения равновесия (13). Не повторяя известную последовательность действий [2], запишем результирующее уравнение для $\langle\sigma_{12}\rangle_{,12}$:

$$2\cdot\langle\sigma_{12}\rangle_{,12}=-\langle\sigma_{11}\rangle_{,11}-\langle\sigma_{22}\rangle_{,22}+\langle\sigma_{33}\rangle_{,33}+\langle\rho\rangle^{K-T}\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^{2}\langle u_i\rangle_{,i}}{\partial t^{2}}.\tag{17}$$

Подставляя (17) в уравнение (16), получаем:

$$\begin{gathered}\langle\sigma_{11}\rangle_{,22}-\langle\nu\rangle_{K-T}\cdot\left(\langle\sigma_{22}\rangle_{,22}+\langle\sigma_{33}\rangle_{,22}\right)+\\+\langle\sigma_{22}\rangle_{,11}-\langle\nu\rangle_{K-T}\cdot\left(\langle\sigma_{33}\rangle_{,11}+\langle\sigma_{11}\rangle_{,11}\right)=\\=\frac{\langle E\rangle^{K-T}}{2\cdot\langle G\rangle^{K-T}}\cdot\left(-\langle\sigma_{11}\rangle_{,11}-\langle\sigma_{22}\rangle_{,22}+\langle\sigma_{33}\rangle_{,33}+\langle\rho\rangle^{K-T}\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^{2}\langle u_i\rangle_{,i}}{\partial t^{2}}\right).\end{gathered}\tag{18}$$

Для дальнейшего вывода эффективных уравнений Бельтрами — Митчелла необходимо использовать гипотезу:

$$\langle \nu \rangle^{K-T} \approx \frac{\langle E \rangle^{K-T}}{2 \cdot \langle G \rangle^{K-T}} - 1 . \tag{19}$$

Точность использования эффективных уравнений Бельтрами — Митчелла при решении задач для композиционного тела в напряжениях определяется точностью выполнения (19). Применяя последнее приближенное равенство, совершенно аналогично стандартному выводу можно получить следующую первую группу из трех эффективных уравнений Бельтрами — Митчелла [2]:

$$\begin{gathered}
\left(1+\langle \nu \rangle^{K-T}\right) \cdot \Delta \langle \sigma_{11} \rangle + 3 \cdot \langle \sigma \rangle_{,11} = \frac{1+\langle \nu \rangle^{K-T}}{1-\langle \nu \rangle^{K-T}} \cdot \langle \rho \rangle^{K-T} \times \\
\times \left(-\left(2-\langle \nu \rangle^{K-T}\right) \cdot \frac{\partial^2 \langle u_1 \rangle_{,1}}{\partial t^2} + \langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \frac{\partial^2 \langle u_2 \rangle_{,2}}{\partial t^2} + \langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \frac{\partial^2 \langle u_3 \rangle_{,3}}{\partial t^2} \right), \\
\left(1+\langle \nu \rangle^{K-T}\right) \cdot \Delta \langle \sigma_{22} \rangle + 3 \cdot \langle \sigma \rangle_{,22} = \frac{1+\langle \nu \rangle^{K-T}}{1-\langle \nu \rangle^{K-T}} \cdot \langle \rho \rangle^{K-T} \times \\
\times \left(\langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \frac{\partial^2 \langle u_1 \rangle_{,1}}{\partial t^2} - \left(2-\langle \nu \rangle^{K-T}\right) \cdot \frac{\partial^2 \langle u_2 \rangle_{,2}}{\partial t^2} + \langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \frac{\partial^2 \langle u_3 \rangle_{,3}}{\partial t^2} \right), \\
\left(1+\langle \nu \rangle^{K-T}\right) \cdot \Delta \langle \sigma_{33} \rangle + 3 \cdot \langle \sigma \rangle_{,33} = \frac{1+\langle \nu \rangle^{K-T}}{1-\langle \nu \rangle^{K-T}} \cdot \langle \rho \rangle^{K-T} \times \\
\times \left(\langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \frac{\partial^2 \langle u_1 \rangle_{,1}}{\partial t^2} + \langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \frac{\partial^2 \langle u_2 \rangle_{,2}}{\partial t^2} - \left(2-\langle \nu \rangle_{K-T}\right) \cdot \frac{\partial^2 \langle u_3 \rangle_{,3}}{\partial t^2} \right),
\end{gathered} \tag{20}$$

где $\langle \sigma \rangle = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \langle \sigma_{ii} \rangle$ — среднее нормальное напряжение и $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} \right)$ — оператор Лапласа. Отметим, что (20) не сворачивается в стандартный тензорный вид из-за коэффициентов в правой части.

Далее рассмотрим первое уравнение из второй группы эффективных уравнений совместности (10). Используя эффективный обобщенный закон Гука, можно получить:

$$\begin{gathered}
\langle \sigma_{12} \rangle_{,31} - \langle \sigma_{23} \rangle_{,11} + \langle \sigma_{31} \rangle_{,21} - \\
-\left(2 \cdot \frac{\langle G \rangle^{K-T}}{\langle E \rangle^{K-T}} \left(\langle \sigma_{11} \rangle_{,23} - \langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \left(\langle \sigma_{22} \rangle_{,23} + \langle \sigma_{33} \rangle_{,23} \right) \right) \right) = 0.
\end{gathered}$$

Последнее выражение с учетом гипотезы (19) легко преобразовать к виду [7; 8]:

$$\begin{gathered}\langle\sigma_{12}\rangle_{,31}-\langle\sigma_{23}\rangle_{,11}+\langle\sigma_{31}\rangle_{,21}-\\ -\frac{1}{\left(1+\langle\nu\rangle^{K-T}\right)}\Big(\langle\sigma_{11}\rangle_{,23}-\langle\nu\rangle_{K-T}\cdot\Big(\langle\sigma_{22}\rangle_{,23}+\langle\sigma_{33}\rangle_{,23}\Big)\Big)=0.\end{gathered}\tag{21}$$

Дифференцируя второе эффективное уравнение равновесия (13) по x_3, а третье — по x_2 и складывая результат, получаем:

$$\begin{gathered}\langle\sigma_{12}\rangle_{,13}+\langle\sigma_{22}\rangle_{,23}+\langle\sigma_{23}\rangle_{,33}+\langle\sigma_{13}\rangle_{,12}+\langle\sigma_{23}\rangle_{,22}+\langle\sigma_{33}\rangle_{,32}-\\ -\langle\rho\rangle^{K-T}\cdot\left(\frac{\partial^2\langle u_2\rangle_3}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\langle u_3\rangle_2}{\partial t^2}\right)=0.\end{gathered}\tag{22}$$

Отметим, что, в отличие от известных монографий [7; 9], необходимо вычесть из (21) уравнение (22), после чего получаем:

$$\begin{gathered}-\Delta\langle\sigma_{23}\rangle-\\ -\frac{1}{\left(1+\langle\nu\rangle_{K-T}\right)}\Big(3\cdot\langle\sigma\rangle_{,23}-\left(1+\langle\nu\rangle_{K-T}\right)\cdot\Big(\langle\sigma_{22}\rangle_{,23}+\langle\sigma_{33}\rangle_{,23}\Big)\Big)-\\ -\langle\sigma_{22}\rangle_{,23}-\langle\sigma_{33}\rangle_{,32}+\\ +\langle\rho\rangle^{K-T}\cdot\left(\frac{\partial^2\langle u_2\rangle_3}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\langle u_3\rangle_2}{\partial t^2}\right)=0.\end{gathered}$$

Последнее уравнение после элементарных преобразований приобретает вид:

$$\left(1+\langle\nu\rangle_{K-T}\right)\cdot\Delta\langle\sigma_{23}\rangle+3\cdot\langle\sigma\rangle_{,23}=\left(1+\langle\nu\rangle_{K-T}\right)\cdot\langle\rho\rangle^{K-T}\cdot\left(\frac{\partial^2\langle u_2\rangle_3}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\langle u_3\rangle_2}{\partial t^2}\right).$$

Остальные уравнения получаются циклической перестановкой, и в тензорном виде вторая группа эффективных динамических уравнений Бельтрами — Митчелла ($i\neq j$) может быть записана следующим образом:

$$\left(1+\langle\nu\rangle_{K-T}\right)\cdot\Delta\langle\sigma_{ij}\rangle+3\cdot\langle\sigma\rangle_{,ij}=\left(1+\langle\nu\rangle_{K-T}\right)\cdot\langle\rho\rangle^{K-T}\cdot\left(\frac{\partial^2\langle u_i\rangle_j}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\langle u_j\rangle_i}{\partial t^2}\right).$$

Отметим, что структура уравнений Бельтрами — Митчелла полностью сохранила свой вид с единственной заменой компонент напряжений на их усредненные значения по представительному объему композиционного материала. При этом в качестве константы упругой гомогенизированной среды должен использоваться средний коэффициент Пуассона $\langle\nu\rangle_{K-T}$. Отметим, что точность вывода данных уравнений зависит от точности выполнения гипотезы (19) для эффективных модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига.

9. Обратные соотношения, выражающие средние по представительному объему напряжения через средние по этому же объему деформации

В ходе вывода эффективных динамических уравнений Ламе теории упругости композиционных в среднем изотропных тел в дальнейшем понадобятся обратные соотношения, когда напряжения выражены через деформации по Коши с учетом точности гипотезы (19) [2]:

$$\langle \sigma_{ii} \rangle \approx 2 \cdot \langle G \rangle^{K-T} \cdot \langle \varepsilon_{ii} \rangle + \langle \lambda \rangle^{K-T} \cdot \langle \Theta \rangle \ (i = 1,..,3), \tag{23}$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle \approx \langle G \rangle^{K-T} \cdot \langle \varepsilon_{ij} \rangle \ (i \neq j, i, j = 1,..,3),$$

где

$$\langle \Theta \rangle = \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{1 - 2 \cdot \langle \nu \rangle^{K-T}}{\langle E \rangle^{K-T}} \left(\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle + \langle \sigma_{33} \rangle \right) = \frac{1}{\langle K \rangle^{K-T}} \cdot \langle \sigma \rangle,$$

$$\langle K \rangle^{K-T} = \frac{\langle E \rangle^{K-T}}{3 \cdot \left(1 - 2 \cdot \langle \nu \rangle^{K-T}\right)}, \quad \langle \lambda \rangle^{K-T} = \frac{\langle \nu \rangle^{K-T} \cdot \langle E \rangle^{K-T}}{\left(1 + \langle \nu \rangle^{K-T}\right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \langle \nu \rangle^{K-T}\right)}.$$

10. Уравнения Ламе в смысле средних значений напряжений по представительному объему структурно неоднородного в среднем изотропного композиционного тела

Используя эффективные уравнения равновесия (13), эффективные уравнения обобщенного закона Гука в форме (23), а также очевидную связь средних по представительному объему (в смысле операции (2)) деформаций и перемещений в виде

$$\langle \varepsilon_{ii} \rangle = \langle u_i \rangle_{,i} \ (i = \overline{1,3}),$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle u_i \rangle_{,j} + \langle u_j \rangle_{,i} \ (i \neq j, \ i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}),$$

можно получить эффективные уравнения Ламе, совершенно аналогично известной системе для однородного изотропного материала [2], которые можно записать с использованием оператора Лапласа в виде:

$$\left(\langle \lambda \rangle^{K-T} + \langle G \rangle^{K-T} \right) \cdot \langle \Theta \rangle_{,i} + \langle G \rangle^{K-T} \cdot \Delta \langle u_i \rangle - \langle \rho \rangle^{K-T} \cdot \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} = 0. \tag{24}$$

11. Распространение волн в твердых композиционных в среднем изотропных средах

Следуя известной монографии [9], используя (24), проанализируем скорость распространения волн различного типа. Не повторяя известные математические преобразования по сведению системы (24) к волновым уравнениям относительно разных функций, можно утверждать, что средняя скорость $\langle v_1 \rangle$ распространения волны объемного расширения в композиционной в среднем изотропной твердой бесконечной среде определяется уравнением [9]:

$$\left\langle v_1 \right\rangle = \sqrt{\frac{\left\langle \lambda \right\rangle^{K-T} + 2 \cdot \left\langle G \right\rangle^{K-T}}{\left\langle \rho \right\rangle^{K-T}}} \,.$$

Используя результаты [9], можно аналогичным предыдущему случаю образом также вычислить среднюю скорость распространения крутильных колебаний в композиционной твердой среде $\left\langle v_2 \right\rangle$, при которых деформируемый представительный объем среды не изменяет свой размер:

$$\left\langle v_2 \right\rangle = \sqrt{\frac{\left\langle G \right\rangle^{K-T}}{\left\langle \rho \right\rangle^{K-T}}} \,.$$

Заключение

В статье получены эффективные уравнения динамики композиционного в среднем изотропного твердого тела в напряжениях и перемещениях. Установлено, что структура уравнений в обоих случаях полностью сохраняется такой же, как и в однородном случае, с точностью до замены деформаций, напряжений и перемещений на средние по представительному объему композиционного твердого тела величины. При этом в качестве усредненных упругих характеристик необходимо использовать полученные в [5] средние значения по Кравчуку — Тарасюку модуля Юнга, коэффициента Пуассона, модуля сдвига.

Уравнения получены в предположении существования связи между эффективными значениями модуля Юнга, коэффициента Пуассона, модуля сдвига, аналогичной общеизвестной связи для коэффициентов тела из одного однородного материала. Поскольку эта связь даже в однородном случае является приближенной, то это незначительно сказывается на точности полученных уравнений.

Получены эффективные значения скоростей распространения волн различного типа в твердой композиционной в среднем изотропной среде.

Результаты данных исследований позволяют решать динамические задачи для твердых композиционных тел с помощью стандартного конечноэлементного обеспечения, например ANSYS. В качестве рекомендаций по применению результатов в известных программах следует посоветовать использовать в качестве эффективных характеристик твердого тела не только средние по Кравчуку — Тарасюку упругие параметры, но и среднюю плотность композиционного твердого тела, вычисленную также в приближении Кравчука — Тарасюка.

Литература

1. Кравчук А. С., Чигарев А. В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Минск: Технопринт, 2000. 196 с.

2. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. М.: Госстройиздат, 1957. 256 с.

3. Кравчук А. С., Кравчук А. И., Тарасюк И. А. Методика вычисления эффективных коэффициентов в уравнении теплопроводности композиционного тела // Вестник СПбГУ. Сер. 4, Т. 2 (60). 2016. Вып. 4. С. 335–341.

4. Кравчук А. С., Кравчук А. И., Попова Т. С. Уравнение диффузии композиционной смеси в композиционную среду // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 4. С. 1041–1046.

5. Тарасюк И. А., Кравчук А. С. Сужение «вилки» Фойгта — Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов [Электронный ресурс] // APRIORI. Сер. Естественные и технические науки. 2014. № 3. URL: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf (дата обращения: 05.04.2018).

6. Тарасюк И. А., Кравчук А. С. Вычисление эффективных параметров упругости в среднем изотропных композиционных тел в случае записи закона Гука для тензора деформаций по Коши [Электронный ресурс] // APRIORI. Сер. Естественные и технические науки. 2015. № 3. URL: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2015/Tarasyuk-Kravchuk.pdf (дата обращения: 05.04.2018).

7. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.

8. Сапунов В. Т. Прикладная теория упругости. М.: МИФИ, 2008. Ч. 1. 232 с.

9. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 194 с.

EFFICIENT DYNAMIC EQUATION FOR COMPOSITIONAL MEAN ISOTROPIC ELASTIC BODY

Aleksandr S. Kravchuk
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Department of Bio- and Nanomechanics
Belarusian State University
4 Prospect Nezavisimosti, Minsk 220030, Belarus
E-mail: ask_belarus@inbox.ru

Anzhelika I. Kravchuk
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Department of Web Technologies and Computer Modeling,
Belarusian State University
4 Prospect Nezavisimosti, Minsk 220030, Belarus
E-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

The article presents effective dynamic equations for mean isotropic solid in stresses and displacements. We have established that the structure of equations in both cases is completely preserved as in the homogeneous case within the accuracy of replacement of deformations, stresses and displacements by average values in representative volume of the composite solid. At the same time, it is necessary to use the previously obtained average Kravchuk — Tarasyuk values of Young's modulus, Poisson's ratio, shear modulus as average elastic characteristics. The equations are obtained in the existence of a connection between the effective values of the elasticity modulus, Poisson's ratio, the shear modulus of a similar well-known coupling for the coefficients of a body from one homogeneous material. Since this connection is approximate even in the homogeneous case, this has little effect on the accuracy of the equations obtained. Effective values of the propagation velocities of various types waves in a composite in average isotropic medium are obtained. The results of these studies allow solving dynamic problems for solid composite bodies using standard finite element support, for example ANSYS. The data obtained in

our research allow us to recommend using not only the average for Kravchuk — Tarasyuk elastic parameters, but also the average density of the composite solid, also calculated in Kravchuk — Tarasyuk approximation as the effective characteristics of solids.
Keywords: discrete random variable; concentration of components; average values according to Kravchuk — Tarasyuk, Beltrami — Mitchell equations, Lamé equations.

References

1. Kravchuk A. S., Chigarev A. V. *Mekhanika kontaktnogo vzaimodeistviya tel s krugovymi granitsami* [Mechanics of Contact Interaction of Bodies with Circular Boundaries]. Minsk: Tekhnoprint Publ., 2000. 196 p.
2. Zhemochkin B. N. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow: Gosstroiizdat Publ., 1957. 256 p.
3. Kravchuk A. S., Kravchuk A. I., Tarasyuk I. A. Metodika vychisleniya effektivnykh koeffitsientov v uravnenii teploprovodnosti kompozitsionnogo tela [A Technique for Calculating Effective Coefficients in the Equation of Composite Body Thermal Conductivity]. *Vestnik SpbGU — Bulletin of St Petersburg State University.* 2016. Ser. 4. V. 2 (60). Iss. 4. Pp. 335–341.
4. Kravchuk A. S., Kravchuk A. I., Popova T. S. Uravnenie diffuzii kompozitsionnoi smesi v kompozitsionnuyu sredu [Equation of Diffusion of a Composite Mixture into a Composite Medium]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal — Engineering and Physics Journal.* 2016. V. 89. No. 4. Pp. 1041–1046.
5. Tarasyuk I. A., Kravchuk A. S. Suzhenie «vilki» v teorii uprugikh strukturno neodnorodnykh v srednem izotropnykh kompozitsionnykh tel bez primeneniya variatsionnykh printsipov [Restriction of Voigt–Reuss "Bracketing" in the Theory of Elastic Structurally Inhomogeneous Mean Isotropic Composite Bodies without the Use of Variational Principles]. *APRIORI. Ser. Natural and Technical Sciences.* 2014. No. 3. Available at: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/tarasyuk-kravchuk.pdf (accessed 05.04.2018).
6. Tarasyuk I. A., Kravchuk A. S. Vychislenie effektivnykh parametrov uprugosti v srednem izotropnykh kompozitsionnykh tel v sluchae zapisi zakona Guka dlya tenzora deformatsii po Koshi [Calculation of Effective Elasticity Parameters of Mean Isotropic Composite Bodies in the Case of Recording the Hooke Law for the Cauchy Strain Tensor]. *APRIORI. Ser. Natural and Technical Sciences.* 2015. No. 3. Available at: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2015/tarasyuk-kravchuk.pdf (accessed 05.04.2018).
7. Amenzade Yu. A. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1976. 272 p.
8. Sapunov V. T. *Prikladnaya teoriya uprugosti* [Applied Theory of Elasticity]. Moscow: Moscow Engineering Physics Institute Publ., 2008. Part 1. 232 p.
9. Kol'skii G. *Volny napryazheniya v tverdykh telakh* [Waves of Stress in Solids]. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury Publ., 1955. 194 p.