

УДК 519.254

DOI: 10.18101/2304-5728-2018-4-58-71

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ПРИ ОШИБКАХ В НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ**© **Серебрянский Сергей Михайлович**

старший преподаватель кафедры математики, экономики и управления,
Троицкий филиал Челябинского государственного университета
Россия, 457100, г. Троицк, ул. Разина, 9
E-mail: tf_chelgu@mail.ru

© **Тырсин Александр Николаевич**

доктор технических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник,
Научно-инженерный центр «Надежность и ресурс больших систем и машин»
УрО РАН
Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Студенческая, 54а
E-mail: at2001@yandex.ru

В статье рассматриваются вопросы, связанные с устойчивостью решения обратных задач, относительно точного задания граничных условий. В практических приложениях, как правило, теоретический вид функциональной зависимости граничных условий вид не определен или неизвестен, а также присутствуют случайные погрешности измерений. Исследования показали, что это приводит к существенному снижению точности решения обратной задачи. С целью повышения точности решения обратных задач предложено уточнять функциональный вид граничных условий с помощью распознавания вида математической модели зависимости с последующей аппроксимацией этой функцией поведения физической величины на границе. Восстановление вида зависимости выполнено методом распознавания на основе обратного отображения. Приведены модельные примеры реализации в условиях присутствия аддитивных случайных погрешностей измерений и неизвестного вида зависимости граничных условий.

Ключевые слова: обратная задача; распознавание; функциональная зависимость; модель; обратная функция; выборка; дисперсия; аппроксимация.

Введение

Исследование так называемых обратных задач, когда исходя из некоторых характеристик физического поля необходимо восстановить характеристики самой среды, которая порождает это поле, можно описать операторным уравнением 1-го рода:

$$Au = f.$$

Трудности, возникающие при исследовании таких уравнений, связаны, главным образом, с неограниченностью обратного оператора A и отсутствием непрерывной зависимости решения от правой части (неустойчивость или некорректность задачи).

В этих условиях обычные методы, используемые для приближенного решения корректных задач, оказываются, как правило, непригодными. Для эффективного решения неустойчивых задач к настоящему времени созданы специальные регулярные методы, основанные на замене исходной некорректной (неустойчивой) задачи задачей или последовательностью задач, корректных в обычном смысле [1].

В статье рассматриваются вопросы, связанные с устойчивостью решения обратных задач относительно правильного задания граничных условий. Возможные ошибки возникают из-за неточного задания вида функциональных зависимостей, описывающих граничные условия, а также наличия случайных погрешностей измерений.

В качестве примера рассматривается обратная задача для уравнения теплопроводности с ненулевыми граничными условиями [2]. Граничные условия заданы приближенно с некоторой погрешностью, поэтому определение вида функциональной зависимости в них имеет большой практический смысл. Как показывает практика, достаточно некоторой ошибки в начальных данных для нарушения устойчивости решения задачи.

В результате проведенные эксперименты показывают неустойчивость решения рассматриваемой обратной задачи относительно ошибок в граничных условиях. Причиной неустойчивости является неопределенный вид функциональной зависимости.

Для повышения точности решения обратной задачи рассмотрим подход, основанный на уточнении функционального вида граничных условий. Это можно сделать с помощью распознавания вида математической модели зависимости с последующей аппроксимацией этой функцией поведения физической величины на границе [3–7].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq x_2, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}; \quad x_2 < x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u_1(x,0) = 0; \quad 0 \leq x \leq x_2, \quad (3)$$

$$u_2(x,0) = 0; \quad x_2 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$u_1(0,t) = f_\delta(t); \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u_1(x_1,t) = \psi_\delta(t); \quad 0 < x_1 < x_2, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$u_1(x_2,t) = u_2(x_2,t); \quad t \geq 0, \quad (7)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1(x_2,t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2(x_2,t)}{\partial x}; \quad t \geq 0, \quad (8)$$

где x — пространственная координата; t — время; $u_i(x, t)$ — значение температуры в точке x в момент времени t в i -м слое; $\kappa = \kappa_1 / \kappa_2$, $\kappa_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 c_1}$, $\kappa_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2}$, c_i — теплоемкость в i -м слое, p_i — плотность материала в i -м слое, λ_i — коэффициент теплопроводности i -го слоя; f_δ — значение температуры в промежуточной точке 0 , рассчитанные в результате эксперимента, при этом если бы мы знали точное значение f_0 температурного распределения в этой точке, то выполнялось бы условие $\|f_\delta(t) - f_0(t)\| \leq \delta$, δ — погрешность измерений; ψ_δ — значения температуры в промежуточных точках x_1 , рассчитанные в результате эксперимента, при этом если бы мы знали точное значение ψ_0 температурного распределения в этих точках, то выполнялось бы условие $\|\psi_\delta(t) - \psi_0(t)\| \leq \delta$, где δ — погрешность измерений.

Требуется, используя исходную информацию f_δ , ψ_δ , δ задачи (1)–(8), рассчитать значения $u_{2\delta}(1, t)$, наиболее близкие по норме значениям $u_{20}(1, t)$.

Задача (1)–(8) является некорректно поставленной и требует специального решения [1; 8–10]. Ее решение подробно рассматривалось в [2]. В результате была получена точная по порядку оценка

$$\sqrt{\|u_{2\epsilon}(1, t) - u_{20}(1, t)\|^2 + \left\|v_{2\epsilon}(1, t) - \frac{\partial u_{20}(1, t)}{\partial x}\right\|^2} \leq \sqrt{2} l_2 \ln^{-2} \frac{1}{\epsilon}.$$

2. Численная реализация

Рассмотрим численную реализацию решения задачи (1)–(8).

Для получения исходных данных рассмотрим прямую задачу, считая, что знаем значение функции $\phi(t)$ при $x = 1$, решая эту задачу операционными методами, получим, что решение будет определено при $x = x_1 \neq 1$

$$u(x_1, t) = \psi_0(t) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin(k\pi x_1) e^{-k^2 \pi^2 t} \int_0^1 \phi(\tau) e^{k^2 \pi^2 \tau} d\tau.$$

Возвращаясь к обратной задаче (1)–(8), для приближенного вычисления $u(1, t)$ будем использовать формулу Тейлора

$$u(1, t) \approx u(x_1, t) + u_x(x_1, t)(1 - x_1) + \frac{1}{2} u_{xx}(x_1, t)(1 - x_1)^2 \kappa.$$

Зафиксируем момент времени \bar{t} , тогда для этого момента будем иметь

$$u(1, \bar{t}) \approx u(x_1, \bar{t}) + u_x(x_1, \bar{t})(1 - x_1) + \frac{1}{2} u_{xx}(x_1, \bar{t})(1 - x_1)^2 \kappa,$$

или

$$u(1, \bar{t}) \approx \psi_0(\bar{t}) + u_x(x_1, \bar{t})(1 - x_1) + \frac{1}{2} u_{xx}(x_1, \bar{t})(1 - x_1)^2 \kappa.$$

Теперь задача свелась к определению $u_x(x_1, \bar{t})$ и $u_{xx}(x_1, \bar{t})$, используя уравнение теплопроводности, начальное и граничные условия.

Для определения значения $u_x(x_1, \bar{t})$ воспользуемся той же формулой Тейлора, но будем рассматривать ее в окрестности нуля и только до первого порядка: $u(x, \bar{t}) \approx u(0, \bar{t}) + u_x(0, \bar{t})x$. Чтобы найти значение в точке x_1 , будем иметь

$$u(x_1, \bar{t}) \approx u(0, \bar{t}) + u_x(0, \bar{t})x_1,$$

откуда $u_x(0, \bar{t}) \approx \frac{u(x_1, \bar{t}) - u(0, \bar{t})}{x_1}$. Это — производная в нуле. Если считать, что значения функции в точках $x = 0$ и $x = x_1$ соединены отрезком,

то очевидно, что вдоль всего этого отрезка производная функции u постоянна. Значит, можно положить:

$$u_x(x_1, \bar{t}) \approx \frac{u(x_1, \bar{t}) - u(0, \bar{t})}{x_1}.$$

Из граничных условий задачи сразу же вытекает приближенное представление первой производной температурного распределения по пространственной координате в точке x_1

$$u_x(x_1, \bar{t}) \approx \frac{\psi_0(\bar{t}) - f_0(\bar{t})}{x_1}. \quad (9)$$

Итак, для определения $u_{xx}(x_1, \bar{t})$ воспользуемся данным по условию уравнением теплопроводности, согласно которому $u_{xx}(x_1, \bar{t}) = u_t(x_1, \bar{t})$, если точка x_1 принадлежит отрезку $[0; 1]$.

Далее, опять же по условию: $u(x_1, \bar{t}) \approx \psi_0(\bar{t})$, откуда имеем: $u_t(x_1, \bar{t}) \approx \psi_0'(\bar{t})$. Задача свелась к определению значения $\psi_0'(\bar{t})$.

Пусть Δt — шаг по времени. Тогда можно приближенно положить:

$$\begin{aligned} \psi_0'(0) &\approx \frac{\psi_0(\Delta t) - \psi_0(0)}{\Delta t}, \\ \psi_0'(\Delta t) &\approx \frac{\psi_0(2\Delta t) - \psi_0(\Delta t)}{\Delta t}, \\ \psi_0'(i\Delta t) &\approx \frac{\psi_0((i+1)\Delta t) - \psi_0(i\Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Основная, но легко преодолимая сложность при построении этой последовательности состоит в том, что для вычисления производной в единице нужно знать значение функции ψ_0 в следующей точке $(1 + \Delta t)$, которое нам не дано.

Однако наше представление функции ψ_0 — дискретно. Это означает, что соседние точки ее графика соединены отрезками, а значит, производная вдоль всех точек отрезка не меняется. Поэтому положим

$$\psi'_0(1) \approx \frac{\psi_0(1) - \psi_0(1 - \Delta t)}{\Delta t},$$

то есть значения производных в последних двух точках можно считать равными. Это становится тем более справедливо при уменьшении шага по времени.

Таким образом, мы завершили построение последовательности приближенного вычисления $\psi'_0(\bar{t})$, а значит, и $u_t(x_1, \bar{t})$.

Используя формулы (9), (10), осуществим вычисления по формуле

$$u(1, \bar{t}) \approx \psi_0(\bar{t}) + \left(\frac{\psi_0(\bar{t}) - f_0(\bar{t})}{x_1} \right) (1 - x_1) + \frac{1}{2} \psi'_0(\bar{t}) (1 - x_1)^2 \kappa. \quad (11)$$

Если вместо точных значений нам даны приближения, то использование (11), очевидно, приводит к неверному результату.

3. Нахождение решения при ошибках в начальных данных

Для решения этой проблемы будем поступать следующим образом: по данному уровню погрешности δ и для данных функций f_δ, ψ_δ отыщем такие функции $\bar{f}_\delta, \bar{\psi}_\delta$, которые, удовлетворяя условиям невязки: $\|\bar{f}_\delta - f_\delta\| \leq \delta$ и $\|\bar{\psi}_\delta - \psi_\delta\| \leq \delta$, являются наиболее гладкими. Функция является тем более гладкой, чем меньше норма ее производной в рассматриваемом пространстве.

Тем самым приходим к следующим задачам на условный экстремум:

$$\inf_{f \in L_2[0,1]} \left\{ \|f'(t)\|_{L_2}^2 : \|f - f_\delta\|^2 \leq \delta \right\}, \quad (12)$$

$$\inf_{\psi \in L_2[0,1]} \left\{ \|\psi'(t)\|_{L_2}^2 : \|\psi - \psi_\delta\|^2 \leq \delta \right\}. \quad (13)$$

При этом решения $\bar{f}_\delta, \bar{\psi}_\delta$ поставленных задач должны удовлетворять условиям минимальной невязки: $\|\bar{f}_\delta - f_\delta\| \leq \delta, \|\bar{\psi}_\delta - \psi_\delta\| \leq \delta$.

Решив поставленные задачи, найдем сглаженный вариант начальных данных. Затем можно будет использовать алгоритмы экстраполяции для точных данных.

Так как решение задач (12), (13) осуществляется аналогично, рассмотрим решение только задачи (12). Результат решения задачи (13) учтем ниже.

Рассмотрим задачу (12) на условный экстремум, решать ее будем с использованием метода множителей Лагранжа. В данном случае множитель понадобится всего один: $\alpha > 0$.

Согласно методу множителей Лагранжа, приходим к задаче:

$$\inf_{f \in L_2[0,1]} \left\{ \|f - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|f'(t)\|_{L_2}^2 : f \in L_2 \right\}. \quad (14)$$

Целевой функционал, минимум которого ищется, называется сглаживающим. Множитель $\alpha > 0$ (параметр регуляризации) необходимо выбирать в соответствии с некоторым дополнительным условием, позволяющим согласовать α с погрешностью задания входных данных. В нашем случае таким условием станет принцип невязки. Пусть \bar{f}_δ^α — решение нашей задач на безусловный экстремум.

Принцип невязки для нашего случая сформулируем следующим образом: пусть выполнены условия $\|f_\delta\| > \delta$. Если $\alpha^* > 0$ — корень уравнения $\|\bar{f}_\delta^{\alpha^*} - f_\delta\|_{L_2} = \delta$, то в качестве решения задачи сглаживания возьмем $\bar{f}_\delta^{\alpha^*}$. Если же $\|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2} > \delta$ при любом $\alpha > 0$, то в качестве решения возьмем $\bar{f}_\delta^\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \bar{f}_\delta^\alpha$.

Окончательно задача (14) на данном этапе формулируется так. Найти $\bar{f}_\delta^\alpha = \inf_{f \in L_2[0,1]} \left\{ \|f - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|f'(t)\|_{L_2}^2 : f \in L_2 \right\}$, где параметр регуляризации определяется из условия: $\|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2} = \delta$.

Функция $\bar{f}_\delta^{\alpha^*}$, удовлетворяющая обоим условиям, будет использоваться как сглаженные исходные данные. Немаловажным является условие $\|\bar{f}_\delta^{\alpha^*}\|_{L_2} > \delta$. Если оно не выполняется по принципу невязки, решением задачи сглаживания будет $\bar{f}_\delta^{\alpha^*} = 0$, что, конечно же, нас не устраивает.

Необходимым и достаточным условием решения задачи на экстремум является уравнение Эйлера, которое получается после приравнивания к нулю линейной части приращения целевого функционала.

$$-\alpha f'' + f = f_\delta, \quad f(0) = f(1) = 0, \quad (15)$$

при условиях $\|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2} = \delta$.

Воспользуемся формулой (10) дискретизации второй производной, тогда (15) можно переписать в виде:

$$-\alpha \frac{f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}}{\Delta^2 t} + f_k = f_{\delta k}, \quad f_0 = f_N = 0.$$

Выполнив некоторые преобразования, получаем следующие СЛАУ:

$$f_{k-1} + \left(-2 - \frac{\Delta^2 t}{\alpha}\right) f_k + f_{k+1} = -\frac{\Delta^2 t}{\alpha} f_{\delta k}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$f_0 = 0, \quad f_N = 0.$$

Необходимо найти все $f_k, k = \overline{0, N}$.

В матричном виде систему можно записать следующим образом:

$$A\bar{f} = \bar{f}_\delta,$$

где матрица A является квадратной размера $(N+1) \times (N+1)$ и имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 - \frac{\Delta^2 t}{\alpha} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 - \frac{\Delta^2 t}{\alpha} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 - \frac{\Delta^2 t}{\alpha} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Правая часть системы — вектор размера $(N+1) \times 1$ и имеет вид:

$$\bar{f}_\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta^2 t}{\alpha} f_{\delta 1} \\ -\frac{\Delta^2 t}{\alpha} f_{\delta 2} \\ \vdots \\ -\frac{\Delta^2 t}{\alpha} f_{\delta N-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, полученная система зависит от параметра α и имеет невырожденную квадратную матрицу, значит для каждого α у нее найдется единственное решение.

Для нахождения значений α необходимо запрограммировать каким-либо образом вычисление следующей нормы: $\|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2}$, где \bar{f}_δ^α — решение нашей СЛАУ в зависимости от α , f_δ — исходные возмущенные данные.

Для получения нормы разности последовательно друг из друга вычитаются соответствующие координаты векторов, исходя из предположения, что распределения \bar{f}_δ^α и f_δ дискретны, затем берется длина результирующего вектора как квадратный корень из суммы квадратов координат результирующего вектора.

Рассматриваем вычисление α как корня уравнения $\|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2} = \delta$ методом «золотого сечения».

Если же уравнение $\|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2} = \delta$ корней не имеет, то α следует вычислять как точку, доставляющую минимум функции $\|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2}$. При этом важно следить за тем, чтобы этот минимум оставался строго меньше $\|f_\delta\|_{L_2}$. В противном случае задача будет иметь только нулевое решение. Именно поэтому условимся в дальнейшем, когда возникнет ситуация, что при любом $\alpha > 0$ будет выполняться неравенство $\|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2} > \delta$, в качестве α выбирать такое значение, которое доставляет минимум функции $\|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2}$. В качестве же δ в этом случае следует выбирать: $\inf_{\alpha > 0} \|\bar{f}_\delta^\alpha - f_\delta\|_{L_2} = \varepsilon > \delta$.

В качестве входных данных для численной реализации задачи (1)–(8) были использованы: шаг по координате ($\Delta x = 0.1$); длина отрезка по координате ($lx = 1$); длина отрезка по времени ($lt = 10$); параметр регуляризации ($\alpha = 0.05$); погрешности исходных данных ($\delta = 0.01$, $\delta = 0.03$, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.1$); исходная функция ($u(1, t) = te^{-t}$).

При проведении экспериментов были получены следующие результаты на рис. 1–3.

Аппроксимация проводилась с помощью схожих по свойствам моделей: $\bar{u}(1, t) = 1.1 \cdot te^{-t}$; $\bar{u}(1, t) = t^\alpha \cdot e^{-t}$; $\bar{u}(1, t) = t \cdot 3^{-\alpha t}$.

Результаты вычислений для модели $u(1, t) = te^{-t}$ с различными погрешностями представлены в таблице 1. Погрешность δ распределена по равномерному закону на интервале $\left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$. Основным критерием для сравнения считается дисперсия квадрата ошибок между точным и приближенным решением.

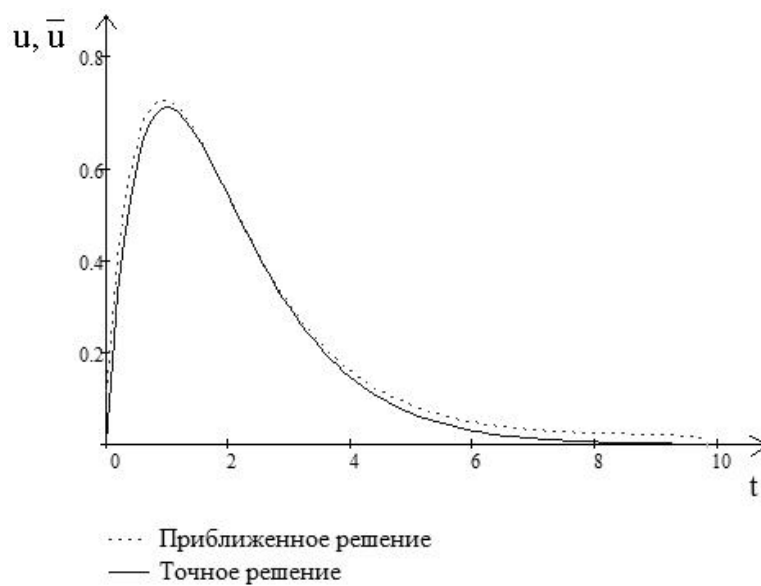


Рис. 1. Аппроксимация моделью $\bar{u}(1,t) = 1.1 \cdot te^{-t}$ (погрешность $\delta = 0.01$)

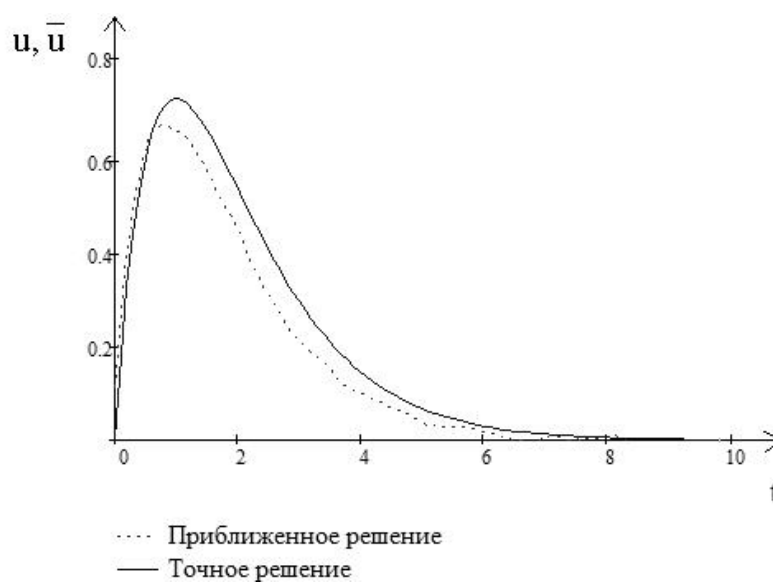


Рис. 2. Аппроксимация моделью $\bar{u}(1,t) = t^\alpha \cdot e^{-t}$

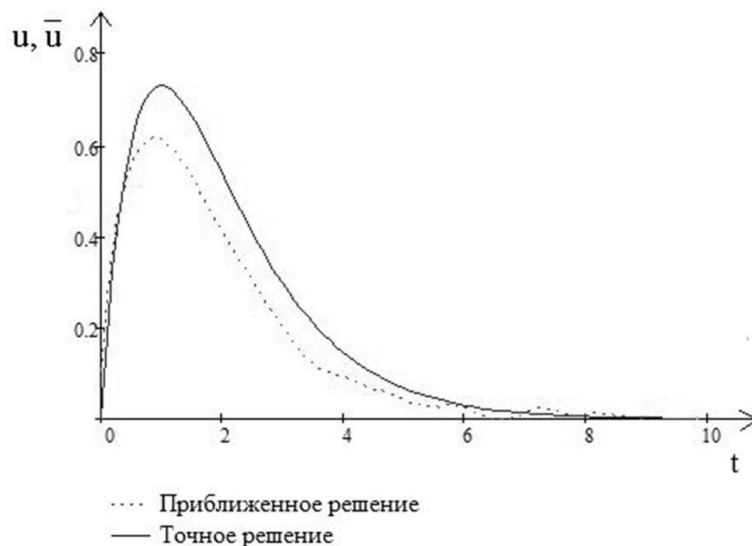


Рис. 3. Аппроксимация моделью $\bar{u}(1,t) = t \cdot 3^{-\alpha t}$

Таким образом, проблемы, связанные с устойчивостью решения обратных задач относительно правильного задания граничных условий (5) и (6), могут существенно сказаться на решении задачи. Анализируя полученные результаты решения задачи (1)–(8), можно сделать вывод, что решение задачи можно улучшить за счет уточнения зависимостей в граничных условиях и сглаживания ими результатов измерений.

Таблица 1

№	Погрешность, δ	Дисперсия ошибок, σ^2
1	0,01	0,04
2	0,03	0,07
3	0,05	0,12
4	0,1	0,37

Для идентификации вида зависимостей в граничных условиях (5), (6) воспользуемся методом распознавания зависимостей на основе обратного отображения [7]. Результаты апробации на модельных данных, выполненные методом статистических испытаний, показали достаточно высокую достоверность распознавания. В результате распознавания функциональных зависимостей $f_\delta(t)$, $\psi_\delta(t)$ в граничных условиях (5) и (6) можно получить более полную картину распространения тепла в материалах и тем самым повысить точность решения задачи (1)–(8).

4. Пример повышения точности численного решения обратной задачи за счет распознавания зависимостей в граничных условиях

Для наглядности рассмотрим (табл. 2) некоторый набор моделей заданного конечного множества моделей и их обратные преобразования.

Таблица 2

Модель $u = F_j(t)$	Обратное преобразование $t = F_j^{-1}(u)$
$u = te^{-t}$	$-W(-t), W(\cdot)$ – функция Ламберта
$u = t^\beta e^{-\alpha t}$	$-\frac{1,2 \cdot W(-0,83333 \cdot \alpha^{\frac{5}{6}} \cdot t)}{t}$
$u = t \cdot a^{-\alpha t}$	$-\frac{W(\alpha \cdot a \cdot \ln(t))}{\alpha \cdot \ln(t)}$
$u = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k}$	$\lambda \sqrt[k]{-\ln(1-k)}$

В процессе применения предлагаемого метода распознается функциональная зависимость с различными параметрами и производится ее сглаживание на рис. 4.

Результаты вычислений для модели $u = t^\beta e^{-\alpha t}$ с аддитивным шумом $\delta = 0.01, \delta = 0.03, \delta = 0.05$ и $\delta = 0.1$ показали, что дисперсия ошибок σ^2 составляет соответственно: 0.0015, 0.0027, 0.0035 и 0.008. Подбор оптимальных параметров аппроксимируемой модели выполнялся по сетке в пределах: $\alpha = [-1.3; -0.7], \beta = [0.7; 1.3]$ с шагом 0.05.

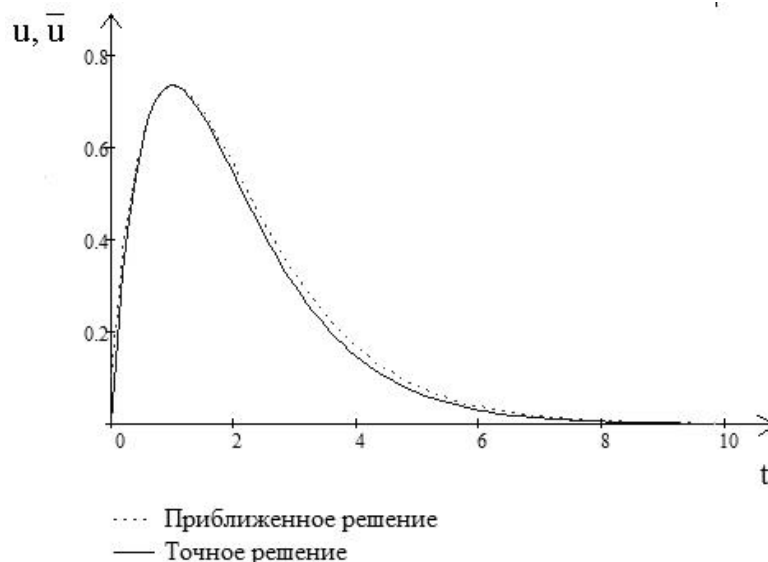


Рис. 4. Аппроксимация моделью $\bar{u}(1, t) = t^{1.05} \cdot e^{-0.95 \cdot t}$

Заключение

В статье были рассмотрены вопросы, связанные с устойчивостью решения обратных задач относительно правильного задания граничных условий. Показано, что наличие случайных погрешностей измерений и неправильное задание функциональной зависимости граничных условий приводят к значительному снижению точности решения обратной задачи. Для решения этой проблемы предложено предварительно идентифицировать вид функциональной зависимости граничных условий и затем аппроксимировать результаты измерений на границе данной моделью. Для идентификации вида функциональной зависимости можно использовать метод распознавания, основанный на использовании обратного отображения.

Литература

1. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. Серебрянский С. М. Об оценках погрешности методов приближенного решения одной обратной задачи // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. №2(42). С. 135–148.
3. Налимов В. В. Теория эксперимента. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1971. 208 с.
4. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985. 487 с.

5. Клейнер Г. Б., Смоляк С. А. Эконометрические зависимости: принципы и методы построения. М.: Наука, 2000. 104 с.
6. Орлов А. И. Прикладная статистика: 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Экзамен, 2007. 671 с.
7. Тырсин А. Н., Серебрянский С. М. Распознавание типа зависимости на основе обратного отображения // Информатика и ее применения. 2016. Т. 10, вып. 2. С. 58–64.
8. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
9. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 160 с.
10. Танана В. П., Япарова Н. М. Об оптимальных по порядку методах решения условно-корректных задач // Сибирский журнал вычислительной математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 353–368.

IMPROVING THE ACCURACY OF SOLVING INVERSE PROBLEMS WITH INHERENT ERRORS

Sergey M. Serebryansky

Senior Lecturer,
Troitsk Branch of Chelyabinsk State University
9 Razina St., Troitsk 457100, Russia
E-mail: tf_chelgu@mail.ru

Aleksandr N. Tyrsin

Dr. Sci. (Engineering), Prof., Leading Researcher,
Science and Engineering Center «Reliability and Safety of Large Systems and Machines» UB RAS
54a Studencheskaya St., Ekaterinburg 620049, Russia
E-mail: at2001@yandex.ru

The article deals with the issues related to the stability of inverse problems solution with respect to the exact setting of boundary conditions. In practical applications, as a rule, the theoretical form of the boundary conditions functional dependence is undefined or unknown, and there are random measurement errors. Studies have shown that this leads to a significant decrease in the accuracy of the inverse problem solution. In order to improve the accuracy of solving inverse problems, it was proposed to refine the functional form of the boundary conditions using the recognition of the form of the mathematical model of dependence with the subsequent approximation of the behavior of a physical quantity at the boundary by this function. Restoration of the dependence form is performed by the recognition method based on the reverse display. We have given the model examples of implementation in the presence of additive random measurement errors and an unknown form of boundary conditions dependence.

Keywords: inverse problem; recognition; functional dependence; model; inverse function; sampling; variance; approximation.

References

1. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of Linear Ill-posed Problems and Its Applications]. Moscow: Nauka Publ., 1978. 208 p.
2. Serebryanskii S. M. Ob otsenkakh pogreshnosti metodov priblizhennogo resheniya odnoi obratnoi zadachi [On Estimation of Errors in Methods for Approximate Solution of One Inverse Problem]. *Sibirskii zhurnal industrialnoi matematiki — Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2010. No. 2 (42). Pp. 135–148. 2010. No. 2(42). Pp. 135–148.
3. Nalimov V. V. *Teoriya eksperimenta* [Theory of Experiment]. Moscow: Nauka Publ., 1971. 208 p.
4. Aivazyan S. A., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. *Prikladnaya statistika: Issledovanie zavisimosti* [Applied Statistics: A Study of Dependencies]. Moscow: Finansy i statistika Publ., 1985. 487 p.
5. Kleiner G. B., Smolyak S. A. *Ekonometricheskie zavisimosti: printsipy i metody postroeniya* [Econometric Dependences: Principles and Methods of Construction]. Moscow: Nauka Publ., 2000. 104 p.
6. Orlov A. I. *Prikladnaya statistika* [Applied Statistics]. 2nd ed., revised and enlarged. Moscow: Ekzamen Publ., 2007. 671 p.
7. Tyrsin A. N., Serebryanskii S. M. Raspoznavanie tipa zavisimosti na osnove obratnogo otobrazheniya [Recognition of the Dependency Type Based on Inverse Display]. *Informatika i ee primeneniya — Computer Science and Its Applications*. 2016. V. 10. Iss. 2. Pp. 58–64.
8. Tikhonov A. N. Ob ustoychivosti obratnykh zadach [On Stability of Inverse Problems]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*. 1943. V. 39. No. 5. Pp. 195–198.
9. Tanana V. P. *Metody resheniya operatornykh uravnenii* [Methods for Solving Operator's Equations]. Moscow: Nauka Publ., 1981. 160 p.
10. Tanana V. P., Yaparova N. M. Ob optimalnykh po poryadku metodakh resheniya uslovno-korrektnykh zadach [On Order-of-Magnitude Optimal Solutions of Conditionally Well-Posed Problems]. *Sibirskii zhurnal vychislitelnoi matematiki — Numerical Analysis and Applications*. 2006. V. 9. No. 4. Pp. 353–368.