

УДК 519.174.5, 519.178

DOI: 10.18101/2304-5728-2019-1-13-21

АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА В АЦИКЛИЧЕСКИЙ¹

© Цициашвили Гурами Шалвович

доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник,
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7
E-mail: guram@iam.dvo.ru

© Осипова Марина Анатольевна

кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник,
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7
E-mail: mao1975@list.ru

Совместно с экспертами в разных областях знаний авторами статьи за последние пять лет был решен ряд актуальных задач. Используя элементы теории графов, были построены оригинальные экономичные алгоритмы для исследования рассматриваемых моделей и протестированы на реальных данных. Работа является продолжением исследований в этом направлении и задача, решаемая в ней, поставлена специалистами в области биоинженерии.

На первом этапе в орграфе была проведена факторизация по отношению циклической эквивалентности, и в каждом кластере были выделены входные и выходные вершины (ребер извне и вовне), применяя ранее построенный авторами работы экономичный алгоритм. На втором шаге, используя алгоритм фронта волны, каждый кластер был заменен на его ациклический подграф, соединяющий входные вершины с выходными путями минимальной длины. Далее исходный орграф был заменен на ациклический орграф, в котором нет обратных связей, связывающий входные и выходные вершины кластеров.

Ключевые слова: орграф; циклическая эквивалентность; кластер; частичный порядок; обратная связь; ациклический граф; алгоритм фронта волны; входные вершины; выходные вершины; путь в графе.

Для цитирования:

Цициашвили Г. Ш., Осипова М. А. Алгоритм преобразования ориентированного графа в ациклический // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 1. С. 13–21.

¹ Работа поддержана Российским фондом научных исследований, грант № 17-07-00177 А.

Введение

Ранее авторами работы был построен последовательный алгоритм факторизации вершин ориентированного графа (его детальное описание см. [1]) по отношению циклической эквивалентности. Построенный алгоритм был применен для решения задач, поставленных специалистами по биоинженерии [2–5]. Главным элементом такого анализа является выделение подсетей, выполняющих определенные функции, а также изучение соединений между ними.

Основной трудностью решения таких задач является большое количество вершин и ребер в орграфе. Поэтому появилась идея по аналогии с методом главных компонент в математической статистике упростить исходный орграф путем удаления из него обратных связей с сохранением всех входных и выходных вершин. При этой замене из каждой вершины подграфа должен существовать путь хотя бы в одну выходную вершину, а в каждую вершину должен существовать путь хотя бы из одной входной вершины.

В настоящей работе дается алгоритмическое решение этой задачи. На первом этапе в орграфе выделяются фактор-вершины (классы циклической эквивалентности (кластеры)) и фактор-ребра между ними. В каждом кластере выделяются его входные и выходные вершины. На втором шаге, используя алгоритм фронта волны, каждый кластер заменяется на ациклический подграф, соединяющий входные и выходные вершины кластера. Таким образом, весь исходный орграф заменяется на ациклический подграф, связывающий входные и выходные вершины кластеров.

Формальная постановка задачи

Рассмотрим ациклический орграф A с конечным множеством вершин $P(A)$ и множеством ребер $Q(A)$. На множестве $P(A)$ введем отношение частичного порядка: $u_1 \succ u_2$, $u_1, u_2 \in P(A)$, если существует путь из вершины u_1 в вершину u_2 . Обозначим $U(A)$ ($V(A)$) множество максимальных (минимальных) элементов в $P(A)$ по отношению \succ . Множество $V(A)$ состоит из вершин, в которые не входят ребра (множество выходных вершин), а $U(A)$ состоит из вершин, из которых не выходят ребра (множество входных вершин). Множества $U(A)$, $V(A)$ могут пересекаться и могут быть пустыми.

Лемма 1. Из любой выходной вершины ациклического орграфа A существует путь в какую-либо входную вершину. В любую входную вершину ациклического орграфа A существует путь из какой-либо выходной вершины.

Доказательство. Пусть $u \in V(A)$ и $U_0 = \{u\}$, положим, U_1 — множество вершин, в которые можно попасть путем единичной длины из U_0 . Обозначим U_2 множество вершин из дополнения $P(A) \setminus \{U_0 \cup U_1\}$, в которые можно попасть путем единичной длины из множества U_1 . Далее по

индукции определим множества $U_k, k \geq 3$ как множество вершин из дополнения $P(A) \setminus \{U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}\}$, в которые можно попасть путем единичной длины из множества U_k . Эта рекуррентная процедура закончится на шаге l , так как множество $P(A)$ конечно. Тогда все вершины множества U_l являются входными, $U_l \subset U(A)$, и из вершины $u \in V(A)$ можно провести путь в любую из вершин множества U_l . Первое утверждение леммы доказано. Доказательство второго аналогично.

Рассмотрим теперь произвольный орграф A с конечным множеством вершин $P(A)$ и ребер $Q(A)$. Профакторизуем его по отношению циклической эквивалентности: вершина u_1 эквивалентна вершине u_2 , если существует цикл, содержащий обе вершины. Назовем классы циклической эквивалентности фактор-вершинами и обозначим их g_i , $1 \leq i \leq s$, $g_i \cap g_j = \emptyset$. Из фактор-вершины g_i проведем ориентированное фактор-ребро в фактор-вершину g_j , если существуют вершины $u' \in g_i$, $u'' \in g_j$, такие, что $(u', u'') \in Q(A)$. Тем самым по орграфу A

определяется фактор-граф $[A]$ с множеством фактор-вершин $G = \bigcup_{i=1}^s g_i$ и множеством фактор-ребер $Q^* = Q(A) \setminus \bigcup_{i=1}^s Q(g_i)$ (среди них есть кратные).

Очевидно, что по построению фактор-граф $[A]$ является ациклическим.

Каждая фактор-вершина g_i — это подмножество множества $P(A)$, в ней можно выделить подмножества входных $U(g_i)$ и выходных вершин $V(g_i)$, $1 \leq i \leq s$. Под входной вершиной кластера понимается вершина, в которую входит ребро извне кластера, под выходной вершиной понимается вершина, из которой выходит ребро вовне кластера. Сопоставим каждому кластеру $g_i \in G$, $1 \leq i \leq s$, ациклический орграф \bar{g}_i , удовлетворяющий включению $U(g_i) \cup V(g_i) \subseteq P(\bar{g}_i)$, причем в орграфе \bar{g}_i из любой выходной вершины существует путь в какую-либо входную вершину, а в любую входную вершину существует путь из какой-либо выходной вершины. Соединим входные и выходные вершины ациклических орграфов \bar{g}_i , $1 \leq i \leq s$ ребрами из множества Q^* (состоит из ребер, идущих из выходных вершин одних кластеров во входные вершины других кластеров) и обозначим \bar{A} орграф с множеством вершин $P(\bar{A}) = \bigcup_{i=1}^s V(g_i) \cup U(g_i)$ и множеством ребер $Q(\bar{A}) = Q^*$. Из построения орграфа \bar{A} вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Орграф \bar{A} является ациклическим.

Описание алгоритма

Нашей задачей является замена исходного орграфа A на ациклический орграф \bar{A} . На первом этапе строится фактор-граф $[A]$, применяя, например, ранее построенный авторами работы экономичный алгоритм [1], и в каждом кластере выделяются входные и выходные вершины.

На втором шаге в каждом кластере $g \in G$ выделяется ациклический подграф \bar{g} . Преобразования кластера g в ациклический орграф \bar{g} состоит из следующих этапов.

Сначала строим ациклический подграф \bar{g} орграфа g , содержащий непустое подмножество $U(\bar{g}) \subseteq U(g)$ множества входных вершин и множество $V(g)$ всех выходных вершин. Затем строим ациклический подграф g^* , состоящий из путей, начинающихся в какой-либо вершине множества $U(g^*) = U(g) \setminus U(\bar{g})$ и заканчивающихся в какой-либо вершине множества $P(\bar{g})$. Очевидно, что объединение $\bar{g} = \bar{g} \cup g^*$ также образует ациклический граф, причем $V(g) \subseteq P(\bar{g})$.

Построение ациклического графа \bar{g} . Строим ациклический подграф \bar{g}' , орграфа g , содержащий непустое подмножество $U(\bar{g}') \subseteq U(g)$ множества входных вершин и множество $V(g)$ всех выходных вершин. Для этой цели в кластере g реализуем рекуррентный алгоритм фронта волны из множества всех входных вершин $U(g)$ до тех пор, пока фронт не пройдет через все выходные вершины $V(g)$:

$$A_0 = U(g), A_{k+1} = \left\{ j \notin \bigcup_{t=0}^k A_t : \exists i \in A_k, (i, j) \in Q(g) \right\}, k = 0, \dots, T-1,$$

$$T = \min \left\{ k : V(g) \subseteq \bigcup_{t=0}^k A_t \right\}, P(\bar{g}') = \bigcup_{t=0}^T A_t, V(g) \subseteq P(\bar{g}'). \quad (1)$$

Из каждой выходной вершины $v \in V(g)$, которая обязательно принадлежит одному из построенных множеств, например $v \in A_{r(v)}$, следующей рекуррентной процедурой доходим по графу \bar{g}' до множества входных вершин:

$$B_0^v = \{v\}, B_{k+1}^v = \left\{ i \in A_{r(v)-k-1} : \exists j \in B_k^v, (i, j) \in Q(\overline{g'}) \right\}, k = 0, \dots, r(v) - 1. \quad (2)$$

В результате в графе $\overline{g'}$ строится подграф $\overline{g'}(v)$. Тогда подграф $\overline{g} = \bigcup_{v \in V(g)} \overline{g'}(v)$ ациклического графа $\overline{g'}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\bigcup_{v \in V(g)} B_{r(v)}^v = U(\overline{g}), V(g) \subset P(\overline{g}).$$

Построение ациклического графа g^* . Построение графа g^* аналогично построению графа \overline{g} с некоторыми изменениями. Сначала реализуется алгоритм фронта волны из множества $P(\overline{g})$, пока фронт не пройдет через все вершины множества $U(g^*)$, меняя ориентацию ребер (i, j) в соотношении (1) на противоположную (j, i) . Далее из каждой вершины $u \in U(g^*)$ реализуется рекуррентная процедура (2) с заменой ориентации ребер (i, j) на (j, i) .

Пример

Опишем на примере орграфа, представленного графически (рис. 1), работу построенного алгоритма. В рассматриваемом графе выделено 4 класса эквивалентности, на рисунке каждый подграф, являющийся классом эквивалентности, выделен овалом. Для этой цели можно воспользоваться разработанным авторами алгоритмом [1]. Входные вершины обозначены на рисунке квадратами, выходные вершины заключены в серые круги, одна вершина является и входной, и выходной (вершина 2). Остальные вершины обозначены белыми кругами.

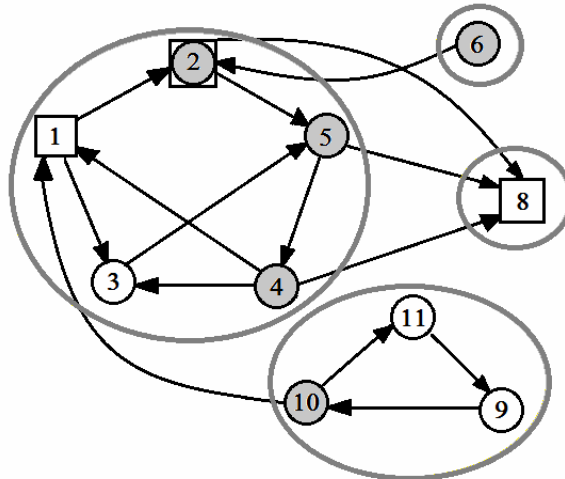


Рис. 1. Исходный оргграф

Остановимся на одном кластере данного графа, состоящего из пяти вершин, обозначим его $g : U(g) = \{1, 2\}, V(g) = \{2, 5, 4\}$. Сначала составим множества $A_0 = U(g)$, $A_1 = \{3, 5\}$, $A_2 = \{4\}$, $T = 2$, так как

$$(1, 3), (2, 5), (5, 4) \in Q(g), V(g) \subset \bigcup_{t=0}^2 A_t.$$

Построим ациклический подграф $\overline{g'}$ (рис. 2).

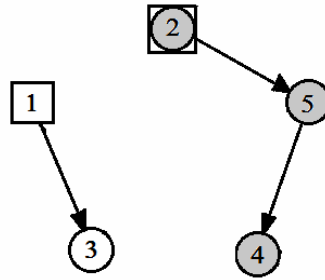


Рис. 2. Ациклический подграф $\overline{g'}$

Теперь для каждой выходной вершины $v \in V(g)$ строим множества B_i^v :
 $v = 2 : B_0^2 = \{2\}$, $v = 5 : B_0^5 = \{5\}$, $B_1^5 = \{2\}$, $v = 4 : B_0^4 = \{4\}$, $B_1^4 = \{5\}$, $B_2^4 = \{2\}$,
 так как $(2, 5), (5, 4) \in Q(\overline{g'})$.

Тогда множества вершин и ребер подграфа \overline{g} состоят из следующих элементов

$$Q(\overline{g}) = \{(2, 5), (5, 4)\}, P(\overline{g}) = \{2, 5, 4\}.$$

Затем аналогичным образом строим ациклический подграф g^* , состоящий из путей, начинающихся в вершине 1 множества $U(g^*) = \{1\} = U(g) \setminus U(\overline{g})$ и оканчивающийся в какой-либо вершине множества $P(\overline{g})$. В нашем случае множества вершин и ребер подграфа g^* состоят из следующих элементов: $Q(g^*) = \{(1, 2)\}$, $P(g^*) = \{1, 2\}$. Тогда ациклический подграф $\overline{g} = \overline{g} \cup g^*$ построен (рис. 3).

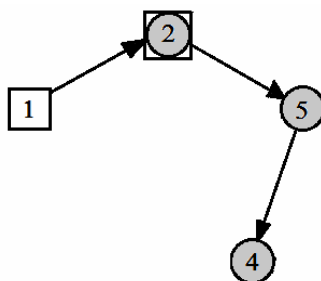


Рис. 3. Ациклический подграф \bar{g}

Итак, каждому кластеру $g \in G$ сопоставляется ациклический орграф \bar{g} , удовлетворяющий включению $U(g) \cup V(g) \subseteq P(\bar{g})$. Тогда, соединяя входные и выходные вершины ациклических орграфов \bar{g} ребрами из множества Q^* , получаем ациклический орграф (рис. 4), содержащий все входные и выходные вершины кластеров.

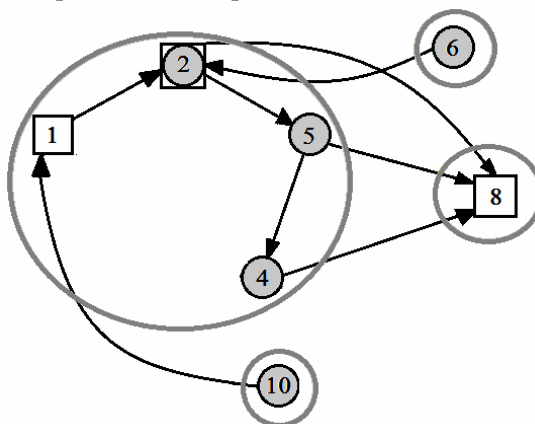


Рис. 4. Ациклический результирующий орграф

Заключение

Совместно со специалистами по биоинженерии построенный алгоритм преобразования ориентированного графа в ациклический был апробирован на белковой сети, получены практические выводы [6].

Литература

1. Цициашвили Г. Ш., Осипова М. А., Лосев А. С. Алгоритмы кластеризации графов // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Физика и математика. 2016. № 1. С. 145–149.
2. Tsitsiashvili G. Sh., Bulgakov V. P., Losev A. S. Hierarchical Classification of Directed Graph Nodes and Application of Protein networks // Biostat. Biometrics Open Acc. J. 2017. V. 1, iss. 4. P. 555–567. DOI: 10.19080/BBOAJ.2017.01.555567.

3. Tsitsiashvili G. Sh., Bulgakov V. P., Losev A. S. Hierarchical classification of directed graph with cyclically equivalent nodes // *Applied Mathematical Sciences*. 2016. V. 10, No. 51. P. 2529–2536.
4. Tsitsiashvili G. Sh., Bulgakov V. P., Losev A. S., Osipova M. A., Kharchenko Yu. N. Analysis of Hubs Loads in Biological Networks // *Reliability: Theory and Applications*. 2014. V. 9, No. 2. P. 7–10.
5. Tsitsiashvili G. Sh., Bulgakov V. P., Losev A. S., Osipova M. A., Kharchenko Yu. N. Construcion of subgraph from graph shortest way // *Applied Mathematical Sciences*. 2015. V. 9, No. 79. P. 3911–3916.
6. Tsitsiashvili G., Bulgakov V., Losev A. Replacement of Directed Graph by Acyclic Directed Graph and Its Application in Biostatistics// *Journal of Biometrics & Biostatistics*. 2018. V. 9, No. 1. P. 390. DOI: 10.4172/2155-6180.1000390

ALGORITHM FOR TRANSFORMING AN ORIENTED GRAPH
INTO AN ACYCLIC ONE

Gurami Sh. Tsitsiashvili

Dr. Sci. (Phys. and Math.),
Prof., Chief Researcher,
Far Eastern Federal University
8 Sukhanova St., Vladivostok 690091, Russia
Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch RAS
7 Radio St., Vladivostok 690041, Russia
E-mail: guram@iam.dvo.ru

Marina A. Osipova

Cand. Sci. (Phys. and Math.),
A/Prof., Researcher,
Far Eastern Federal University,
8 Sukhanova St., Vladivostok 690091, Russia
Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch RAS
7 Radio St., Vladivostok 690041, Russia
E-mail: mao1975@list.ru

Over the past five years together with experts in various fields of knowledge we have solved a number of urgent problems. Using elements of graph theory, we constructed original economic algorithms to study the models under consideration and tested them on real data. The article is a continuation of researches in this field, and the current task has been formulated by experts in bioengineering.

At the first stage, a factorization by equivalence relation was carried out in the digraph, we identified input and output vertices (of inward and outward edges) in each cluster using the previously developed by us economic algorithm. At the second stage, each cluster was replaced by means of an algorithm of wave front with its acyclic subgraph connecting the input vertices with the output paths of the minimal length. Further, the initial digraph was replaced by an acyclic digraph without feedbacks connecting input and output vertices of clusters.

Keywords: digraph; cyclic equivalence; cluster; partial order; feedback; acyclic graph; wavefront algorithm; input vertices; output vertices; weekend peaks; graph path.

