ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.55
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-1-22-30

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

© Кибирев Владимир Васильевич
кандидат физико-математических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: kafedra_pm@bsu.ru

В данной статье для функций многих комплексных переменных вводится понятие аналитического функционального элемента и аналитичности функции в *n*-мерной точке. Далее излагаются некоторые свойства теории функции многих комплексных переменных и рассматривается их применение в теории дифференциальных уравнений. Точно так же, как и для функций одного комплексного переменного, применяя интегральную формулу Коши, вводятся различные утверждения и следствия из них. Для доказательства некоторых теорем используются равномерно сходящиеся ряды аналитических функций.
Ключевые слова: аналитический функциональный элемент; аналитическая функция; полицилиндрическая область; полицилиндр; интегральная формула Коши; сходимость рядов; аналитическое продолжение; модуль аналитического функционального элемента; элементарная окрестность точки; граничное расстояние точки.

Для цитирования:
Кибирев В. В. Некоторые свойства аналитического функционального элемента // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 1. С. 22–30.

Введение

Будем обозначать через C^n арифметическое пространство n независимых комплексных переменных $z_1,...,z_n$. Точками этого пространства являются всевозможные наборы $(z_1,...,z_n)$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1,...,z_n = x_n + iy_n$. Расстояние $\rho(W,Z)$ между точками $Z = (z_1,...,z_n)$ и $W = (w_1,...,w_n)$ пространства C^n определяется следующим образом

$$\rho(W,Z) = \left[\sum_{i=1}^{n} |z_i - w_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Множество точек Z пространства C^n, удовлетворяющих условию $\rho(W,Z) < \varepsilon$, назовем ε-окрестностью точки W пространства C^n. При помощи понятия ε-окрестности теперь стандартным образом введем понятие открытого множества в C^n, а затем и замкнутого множества. Всякое связное открытое множество D пространства C^n называется областью, т. е. область — это связное множество, которое вместе с каждой своей точкой Z содержит и некоторую ее ε-окрестность. Пространство C^n можно отождествить с евклидовым арифметическим пространством R^{2n}, точками которого являются всевозможные наборы $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$ вещественных чисел. Точку $(z_1, ..., z_n)$ пространства C^n ниже часто будем обозначать одной буквой z.

Однозначная в области D пространства C^n функция

$$f(z) = u(z_1, ..., z_n) + iv(z_1, ..., z_n)$$

называется аналитическим в D функциональным элементом, если она непрерывна в D и во всех точках D имеет производные

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \lim_{\Delta z_k \to 0} \frac{1}{\Delta z_k}\left[f(z_1, ..., z_{k-1}, z_k + \Delta z_k, z_{k+1}, ..., z_n) - f(z_1, ..., z_n) \right], k = 1, ..., n. \quad (1)$$

Функция $f(z)$ называется аналитической в точке $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, если она является аналитическим функциональным элементом в некоторой ε-окрестности этой точки. Условие (1) означает, что функция $f(z)$ аналитична по комплексному переменному z_k, поэтому для того чтобы $f(z)$ была аналитическим функциональным элементом в области D, необходимо выполнение в этой области следующих условий Коши — Римана [1]

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \ \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \ k = 1, ..., n. \quad (2)$$

1 Постановка задачи

В теории функций многих комплексных переменных интегральную формулу Коши можно записать не для произвольной области, а только для специального класса полицилиндрических областей. Полицилиндрическая область D является прямым произведением $D_1 \times ... \times D_n$ n плоских областей $D_1, ..., D_n$, причем плоская область D_k лежит в плоскости переменного z_k, $k = 1, ..., n$.

Пусть Γ_k — граница плоской области D_k, $k = 1, ..., n$. Положим, $D^{(k)} = \overline{D}_1 \times ... \times \overline{D}_{k-1} \times \Gamma_k \times \overline{D}_{k+1} ... \times \overline{D}_n$, $k = 1, ..., n$. Множество $D^{(k)}$ — часть границы области D, причем граница B области D является объединением всех $D^{(k)}$. Часть Γ границы B области D, которая состоит из точек, принадлежащих всем $D^{(k)}$ одновременно, называется остовом границы полицилиндрической области D. Очевидно, что Γ — прямое произведение границ всех областей D_k, т. е. $\Gamma = \Gamma_1 \times ... \times \Gamma_n$. В случае, когда все Γ_k,

$k=1,...,n$ — кусочно-гладкие линии, $D^{(k)}$ будут кусками $(2n-1)$-мерных поверхностей, а Γ — совокупностью n-мерных поверхностей их пересечения. В этом случае полицилиндрическая область D называется регулярной или обыкновенной. Если все области D_k, $k=1,...,n$ — круги, то полицилиндрическую область $D_1\times...\times D_n$ будем называть цилиндром [5].

Докажем несколько теорем в полицилиндрической области для аналитического функционального элемента.

2 Важные теоремы

Теорема 1. Если $f(z_1,...,z_n)$ представляет собой аналитический функциональный элемент в ограниченной, регулярной полицилиндрической области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma}\frac{f(t_1,...,t_n)}{(t_1-z_1)...(t_n-z_n)}dt_1...dt_n. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим случай двух независимых переменных *w, z.* Точки множеств $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ являются предельными точками для внутренних точек области *D.* Пусть (w,z) — точка *D*, (t_1,z) — точка $D^{(1)}$, (w,t_2) — точка $D^{(2)}$. В силу условий теоремы $f(w,z)$ равномерно непрерывна в $\bar{D}$, поэтому пределы

$$\lim_{w\to t_1}f(w,z)=f(t_1,z),\ \lim_{z\to t_2}f(w,z)=f(w,t_2)$$

достигаются равномерно, первый — относительно *z,* а второй — относительно *w*. Из теоремы Вейерштрасса для функции одной комплексной переменной следует, что функция $f(t_1,z)$ является аналитической функцией переменной *z* в области D_1, а $f(w,t_2)$ — аналитической функцией переменной *w* в D_2. Применяя к этим функциям интегральную формулу Коши для одного переменного, получим

$$f(w,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(t_1,z)}{(t_1-w)}dt_1,\ f(t_1,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(t_1,t_2)}{t_2-z}dt_2.$$

Из этих двух равенств найдем

$$\begin{aligned}f(w,z)&=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\frac{dt_1}{t_1-w}\int_{\Gamma_2}\frac{f(t_1,t_2)}{(t_2-z)}dt_2=\\&=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}\frac{f(t_1,t_2)}{(t_1-w)(t_2-z)}dt_1dt_2.\end{aligned} \tag{4}$$

В случае многих независимых переменных теорема доказывается индукцией по числу переменных. *Теорема доказана.*

Точно так же, как и в теории функций одной комплексной переменной, из интегральной формулы Коши выводятся различные следствия. Из (1) последовательным дифференцированием найдем

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}} = \frac{k_1!\ldots k_n!}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \frac{f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n}{(t_1-z_1)^{k_1+1}\ldots(t_n-z_n)^{k_n+1}}. \tag{5}$$

Если D — полицилиндр $|z_k - a_k| < r_k$, $k = 1,\ldots,n$, то из (5) в точке $z_1 = a_1,\ldots,z_n = a_n$ получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}\right| \le \frac{k_1!\ldots k_n!}{r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}}\max_\Gamma |f(t_1,\ldots,t_n)|. \tag{6}$$

Теорема 2. Если ряд $\sum f_k(z)$ равномерно сходится в каждой замкнутой области, лежащей вместе с границей в области D, а все $f_k(z)$ являются аналитическими функциональными элементами в D, то сумма $f(z)$ этого ряда также будет аналитическим функциональным элементом в D, а ряд можно почленно дифференцировать любое количество раз.

Доказательство. Это утверждение представляет собой теорему Вейерштрасса для функций многих комплексных переменных и доказывается точно так же, как аналогичная теорема теории функций одной комплексной переменной.

Пусть a — произвольная точка области D, рассмотрим ее ε-окрестность

$$B(a):\{|z_1 - a_1| < \varepsilon,\ldots,|z_n - a_n| < \varepsilon\},$$

лежащую целиком в области D, и для $B(a)$ напишем интегральную формулу Коши (3) для функции $f(z)$. Далее доказательство ведется дословно, как в случае одной комплексной переменной [2]. *Теорема доказана.*

Таким же способом, как в теории функций одной комплексной переменной, можно получить следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. Пусть $f(z_1,\ldots,z_n,a)$ — аналитический функциональный элемент в области D по переменным $z_1,\ldots,z_n$ для всех значений комплексного параметра a, лежащих в окрестности значения a_0, и предел

$$\lim_{a\to a_0} f(z,a) = \varphi(z)$$

достигается равномерно в каждой замкнутой области, лежащей в D вместе со своей границей. Тогда $\varphi(z)$ будет аналитическим функциональным элементом в D.

Теорема 4. Если $f(z)$ — аналитический функциональный элемент в полицилиндре

$$D:\{|z_1 - a_1| < r_1,\ldots,|z_n - a_n| < r_n\},$$

то во всех точках этого полицилиндра

$$f(z)=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1\ldots k_n}\left(z_1-a_1\right)^{k_1}\ldots\left(z_n-a_n\right)^{k_n}, \tag{7}$$

где

$$a_{k_1\ldots k_n}=\frac{1}{k_1!\ldots k_n!}\cdot\left.\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}\right|_{z_1=a_1,\ldots,z_n=a_n}. \tag{8}$$

Ряд (7) сходится абсолютно и равномерно во всякой области E, лежащей вместе со своей границей внутри полицилиндра D. Представление $f(z)$ рядом (7) единственно [4].

Доказательство. Доказательство ведется по такой же схеме, как и для функции одной комплексной переменной. Для произвольной точки $z\in D$ построим два полицилиндра

$$D_1:\left\{\left|z_1-a_1\right|<\rho_1,\ldots,\left|z_n-a_n\right|<\rho_n\right\}$$

и

$$D_2:\left\{\left|z_1-a_1\right|<\sigma_1,\ldots,\left|z_n-a_n\right|<\sigma_n\right\},\ \rho_k<\sigma_k<r_k,\ k=1,\ldots,n,$$

содержащих эту точку. В полицилиндре D_2 напишем интегральную формулу Коши (3) для функции

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{f(t_1,\ldots,t_n)}{\left(t_1-z_1\right)\ldots\left(t_n-z_n\right)}dt_1\ldots dt_n,$$

но

$$\left(t_1-z_1\right)^{-1}\ldots\left(t_n-z_n\right)^{-1}=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}\frac{\left(z_1-a_1\right)^{k_1}\ldots\left(z_n-a_n\right)^{k_n}}{\left(t_1-a_1\right)^{k_1+1}\ldots\left(t_n-a_n\right)^{k_n+1}}. \tag{9}$$

Имеем оценку

$$\left|\frac{\left(z_1-a_1\right)^{k_1}\ldots\left(z_n-a_n\right)^{k_n}}{\left(t_1-a_1\right)^{k_1+1}\ldots\left(t_n-a_n\right)^{k_n+1}}\right|<\frac{1}{\rho_1\ldots\rho_n}\left(\frac{\rho_1}{\sigma_1}\right)^{k_1+1}\ldots\left(\frac{\rho_n}{\sigma_n}\right)^{k_n+1},$$

из которой следует равномерная сходимость ряда (9). Отсюда справедливо первое утверждение теоремы и равенство (8). Единственность разложения (7) доказывается точно так же, как для функций одной комплексной переменной, поскольку, согласно теореме 2, равномерно сходящийся ряд аналитических функций можно любое число раз почленно дифференцировать. *Теорема доказана.*

Из единственности представления аналитического функционального элемента степенным рядом точно так же, как для функций одной комплексной переменной, справедлива следующая теорема об аналитическом продолжении.

Теорема 5. Пусть $f_i(z)$, $i=1,\ 2$ — аналитический функциональный элемент в полицилиндре

$$E_i : \left\{ \left| z_k - a_k^{(i)} \right| < r_k^{(i)}, k = 1,...,n \right\},\ i = 1,\ 2\,;$$

пусть пересечение $H = E_1 \bigcap E_2$ имеет внутренние точки, причем во всех внутренних точках пересечения $f_1(z) \equiv f_2(z)$. Тогда существует единственный аналитический в $E_1 \bigcup E_2$ функциональный элемент $f(z)$, такой, что $f(z) \equiv f_i(z)$ в E_i, $i = 1,\ 2$ [5].

Теорема 6. Если функция $f(z)$ ограничена по модулю постоянным числом *M* и является аналитическим функциональным элементом во всех точках пространства C^n, то эта функция постоянна.

Доказательство. Эта теорема — обобщение теоремы Лиувилля из теории многих переменных. В силу теоремы 4 функцию $f(z)$ можно представить степенным рядом

$$f(z) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} a_{k_1...k_n} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n}$$

в любом полицилиндре $E(R) : \left\{ \left| z_i \right| < R,\ i = 1,...,n \right\}$.

Из выражения для коэффициентов этого ряда и оценок (6) имеем

$$\left| a_{k_1...k_n} \right| < CR^{-(k_1+...+k_n)}.$$

Так как *R* может быть сколь угодно большим, то $f(z) \equiv a_{0...0}$. *Теорема доказана.*

Наибольший полицилиндр

$$S(a) : \left\{ \left| z_i - a_i \right| < R,\ i = 1,...,n \right\},$$

в котором сходится ряд (7), в дальнейшем будем называть элементарной окрестностью точки $a = (a_1,...,a_n)$, а число *R* — граничным расстоянием точки *a* [3].

Теорема 7. Модуль аналитического в элементарной окрестности $S(a)$ точки *a* функционального элемента $f(z)$ не может достигать максимума в точке *a*, если $f(z) \not\equiv const$.

Доказательство. Рассмотрим полицилиндр

$$S_1(a) : \left\{ \left| z_i - a_i \right| < R_1,\ i = 1,...,n \right\},\ R_1 < R.$$

Для $S_1(a)$ имеем

$$f(a) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1(a)} \frac{f(t_1,...,t_n)}{(t_1 - a_1)...(t_n - a_n)} dt_1...dt_n. \qquad (10)$$

Если $f(z) \not\equiv const$, то найдется хотя бы одна точка $\zeta \in \Gamma_1(a)$, такая, что $\left| f(\zeta) \right| < \left| f(a) \right|$. В силу непрерывности $\left| f(z) \right|$ на $\Gamma_1(a)$ существует открытая в $\Gamma_1(a)$ окрестность $\delta(\zeta)$ точки ζ, такая, что $|f(z)|<|f(a)|$ всюду на $\delta(\zeta)$. Из (10) теперь имеем

$$|f(a)|<\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\frac{f(a)}{R^n}\left[\int\limits_{\delta(\zeta)}d\sigma+\int\limits_{\Gamma_1(a)-\delta(\zeta)}d\sigma\right]=|f(a)|.$$

Это ведет к противоречию, если $f(z)\not\equiv const$. Индукцией по числу независимых переменных покажем, что из равенства $|f(z)|\equiv const$ следует $f(z)\equiv const$.

Положим

$$\varphi_1(z_2,...,z_n)=f(a_1,z_2,...,z_n)$$

и

$$\varphi_2(z_1,...,z_{n-1})=f(z_1,...,z_{n-1},b_n).$$

Пусть из $|\varphi_i|\equiv const$ следует $\varphi_i\equiv const$, $i=1,\ 2$. Имеем

$$f(a_1,...,a_n)=\varphi_1(a_2,...,a_n)=\varphi_1(b_2,...,b_n)=f(a_1,b_2,...,b_n),$$

$$f(a_1,b_2,...,b_n)=\varphi_2(a_1,b_2,...,b_{n-1})=\varphi_2(b_1,...,b_{n-1})=f(b_1,...,b_n),$$

откуда следует, что $f(a)=f(b)$ для любых *a* и *b*. *Теорема доказана.*

Теорема 8. Пусть $f(z,a)$ — непрерывная функция переменных $a,z_1,...,z_n$, когда *z* пробегает область $D\subset C^n$, а *a* меняется на кусочно-гладкой кривой *L*. $f(z,a)$ является аналитическим функциональным элементом в *D* для всех таких *a*.

Тогда

$$\varphi(z)=\int\limits_L f(z,a)da$$

будет аналитическим функциональным элементом в *D*.

Доказательство. В силу компактности *L* функция $f(z,a)$ равномерно непрерывна по *a*, поэтому для

$$\sum_{i=1}^n|\Delta z_i|^2<\delta^2$$

имеем

$$|f(z_1+\Delta z_1,...,z_n+\Delta z_n,a)-f(z,a)|<\varepsilon,$$

следовательно,

$$|\varphi(z_1+\Delta z_1,...,z_n+\Delta z_n)-\varphi(z)|<\varepsilon\lambda,$$

где λ — длина кривой *L*.

Таким образом, $\varphi(z)$ непрерывна. Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\Delta z_i}\left[\varphi\left(z_1,\ldots,z_{i-1},z_i+\Delta z_i,z_{i+1},\ldots,z_n\right)-\varphi\left(z\right)\right]-\int_L f'_{z_i}\left(z,a\right)da=$$
$$=\int_L\left\{\frac{1}{\Delta z_i}\left[f\left(z_1,\ldots,z_{i-1},z_i+\Delta z_i,z_{i+1},\ldots,z_n,a\right)-f\left(z,a\right)\right]-f'_{z_i}\left(z,a\right)\right\}da\,.$$

В плоскости переменного z_i выберем окружность $C_r:\left\{\left|z_i-z_i^{(0)}\right|=r\right\}$ так, чтобы f была аналитической в полицилиндре

$$\left|z_1-z_1^{(0)}\right|<\rho\,,\ \ldots\,,\ \left|z_{i-1}-z_{i-1}^{(0)}\right|<\rho\,,$$
$$\left|z_i-z_i^{(0)}\right|<2r\,,\ \left|z_{i+1}-z_{i+1}^{(0)}\right|<\rho\,,\ \ldots\,,\ \left|z_n-z_n^{(0)}\right|<\rho\,.$$

Применяя в круге $\left|z_i-z_i^{(0)}\right|<r$ интегральную формулу Коши по переменной z_i, получим

$$\int_L\left\{\frac{1}{\Delta z_i}\left[f\left(z_1,\ldots,z_{i-1},z_i+\Delta z_i,z_{i+1},\ldots,z_n,a\right)-f\left(z,a\right)\right]-f'_{z_i}\left(z,a\right)\right\}da=$$
$$=\frac{\Delta z_i}{2\pi i}\int_L da\int_{C_r}\frac{f\left(z_1,\ldots,z_{i-1},w,z_{i+1},\ldots,z_n,a\right)}{\left(w-z_i-\Delta z_i\right)\left(w-z_i\right)^2}dw\,,$$

откуда следует

$$\lim_{\Delta z_i\to 0}\frac{1}{\Delta z_i}\left[\varphi\left(z_1,\ldots,z_{i-1},z_i+\Delta z_i,z_{i+1},\ldots,z_n\right)-\varphi\left(z\right)\right]=\int_L\frac{\partial f(z,a)}{\partial z_i}da\,.$$

Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в данной работе для функций многих комплексных переменных с помощью введения аналитического функционального элемента в полицилиндрической области доказано несколько теорем о свойствах аналитической функции.

Для доказательства теорем используется интегральная формула Коши, а также равномерно сходящиеся в замкнутой области ряды.

Литература

1. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 412 с.
2. Привалов И. И. Субгармонические функции. М.; Л., 1937. 200 с.
3. Фукс Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1962. 420 с.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Ч. 2. 400 с.
5. Янушаускас А. И. Аналитические и гармонические функции многих переменных. Новосибирск: Наука, 1981. 183 с.

SOME PROPERTIES OF ANALYTICAL FUNCTIONAL ELEMENT

Vladimir V. Kibirev
Cand. Sci (Phys. and Math.), Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: kafedra_pm@bsu.ru

The article introduces the concept of analytic functional element and the analyticity of function in n-dimensional point for functions of many complex variables. Further, we describe some properties of the theory of many complex variables and consider their application in the theory of differential equations. While using the Cauchy's integral formula, various statements and implications from them are introduced, as well as for the functions of one complex variable. The uniformly convergent series of analytic functions are used for the proof of some theorems.
Keywords: analytic functional element; analytic function; polycylindric domain; polycylinder; Cauchy's integral formula; convergence of series; analytic continuation, modulus of analytic functional element; elementary neighborhood of point; boundary point distance.

References

1. Vladimirov V. S. *Metody teorii funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh* [Methods of the Theory of Functions of Several Complex Variables]. Moscow: Nauka Publ., 1964. 412 p.
2. Privalov I. I. *Subgarmonicheskie funktsii* [Subharmonic Functions]. Moscow; Leningrad, 1937. 200 p.
3. Fuks B. A. *Vvedenie v teoriyu analiticheskikh funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh* [Introduction to the Theory of Analytic Functions of Many Complex Variables]. Moscow: Nauka Publ., 1962. 420 p.
4. Shabat B. V. *Vvedenie v kompleksnyi analiz* [Introduction to Complex Analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 400 p.
5. Yanushauskas A. I. *Analiticheskie i garmonicheskie funktsii mnogikh peremennykh* [Analytic and Harmonic Functions of Many Variables]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1981. 183 p.