МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

УДК 51-7
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-1-56-64

ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ПРИКРЕПЛЕННЫХ К БАЛКЕ ЭЙЛЕРА — БЕРНУЛЛИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ОПИСЫВАЕМОЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

© Мижидон Арсалан Дугарович
доктор технических наук, профессор,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: miarsdu@mail.ru

© Гармаева Валентина Валерьевна
преподаватель,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в
E-mail: gfiksiv@gmail.com

В работе рассматривается уточненная обобщенная математическая модель, которая позволяет описывать более широкий класс систем взаимосвязанных твердых тел, упруго прикрепленных к балке Эйлера — Бернулли. Уточненная обобщенная математическая модель описывается неоднородной линейной гибридной системой дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от дельта-функций Дирака. Присутствующая в системе неоднородность вызывает необходимость нахождения начальных условий, соответствующих положению тел, и прогиба балки в состоянии равновесия. Под положением равновесия механической системы понимается решение исходной гибридной системы дифференциальных уравнений, которое не изменяется во времени. Предложен подход к нахождению положения равновесия системы твердых тел, прикрепленной к балке Эйлера — Бернулли, в выбранной системе координат как обобщенное решение вспомогательной алгебраическо-дифференциальной системы уравнений.
Ключевые слова: твердое тело; балка Эйлера — Бернулли; гибридная система дифференциальных уравнений; положение равновесия.

Для цитирования:
Мижидон А. Д., Гармаева В. В. Положение равновесия системы прикрепленных к балке Эйлера — Бернулли твердых тел, описываемой гибридной системой дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 1. С. 56–64.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-41-030004 р_а, гранта «Молодые ученые ВСГУТУ»

Введение

Математическая модель системы взаимосвязанных твердых тел, прикрепленной к балке Эйлера — Бернулли упругими связями, представленная в виде гибридной системы дифференциальных уравнений (ГСДУ), имеет вид

$$\begin{cases} A\ddot{q} + Cq + \overline{C}(Dq - \overline{u}) = 0, \\ a\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + c\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i(d^{iT}q(t) - u(x,t))\delta(x - a_i), \end{cases} \quad (1)$$

где x — переменная, описывающая координатную ось, совпадающую с покоящейся балкой; $q(t)$ — n-мерная вектор-функция, описывающая перемещение тел; $u(x,t)$ — скалярная функция, описывающая поперечные перемещения точек стержня; $\overline{u}(t)$ — m-мерная вектор-функция с элементами $u(a_1,t), u(a_2,t), \ldots, u(a_m,t)$; A, C — заданные, согласно начальным условиям, постоянные $n \times n$ — матрицы; $\overline{C}$ — заданная, согласно начальным условиям, постоянная $n \times m$ — матрица; D — заданная, согласно начальным условиям, постоянная $m \times n$ — матрица; d^i — n-мерный вектор, составленный из строк матрицы D; a, c, a_i, k_i, $(i = \overline{1,m})$ — заданные постоянные, причем $0 \le a_i \le l$; $(\cdot)^T$ — операция транспонирования [1; 2].

На функцию $u(x,t)$ накладываются граничные условия, соответствующие некоторым условиям закрепления концов балки:

$$\Gamma_1(u(0,t)) = 0, \qquad \Gamma_2(u(l,t)) = 0. \quad (2)$$

Отметим, здесь решение краевой задачи (1)–(2) понимается в обобщенном смысле [2; 3].

При выборе структуры обобщенной математической модели в виде ГСДУ (1) были приняты некоторые допущения относительно расположения точек крепления пружин к твердым телам по компоненте z в системе координат, связанной с твердыми телами. При этом положение равновесия механической системы в предложенной системе координат определяется в виде начальных условий следующим образом

$$q(0) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l. \quad (3)$$

В работе рассматривается уточненная обобщенная математическая модель, позволяющая описать более широкий класс систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных к балке Эйлера — Бернулли упругими связями, чем обобщенная математическая модель (1).

1 Постановка задачи

Уточненная обобщенная математическая модель для взаимосвязанных систем твердых тел, прикрепленных к балке Эйлера — Бернулли с помощью пружин, в виде ГСДУ имеет вид

$$\begin{cases} A\ddot{q} + Cq + \bar{C}(Dq - \bar{u}) = b, \\ a\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + c\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i(d^{iT}q(t) - u(x,t))\delta(x - a_i) + \sum\limits_{i=1}^{m} P_i\delta(x - a_i), \end{cases} \tag{4}$$

где b — n-мерный заданный вектор; P_i, $(i = 1,2,...,m)$ — заданные числа.

В начальный момент времени система твердых тел, прикрепленная к балке Эйлера — Бернулли, описываемая ГСДУ (4) в введенной системе координат будет иметь отличные от нулевого (3) начальные условия

$$q(0) = \bar{q}, \quad u(x,0) = V(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{5}$$

Здесь $\bar{q}$ — некоторый n-мерный вектор, определяющий расположение системы твердых тел; $V(x)$ — некоторая скалярная функция, определяющая прогиб балки. Совместно $\bar{q}$ и $V(x)$ определяют положение равновесия системы твердых тел, прикрепленной к балке Эйлера — Бернулли в выбранной системе координат.

2 Положение равновесия

Определим положение равновесия механической системы, как решение ГСДУ (4), которое не изменяется во времени. Подставив $q = \bar{q}$ и $u(x,t) = V(x)$, получим систему алгебраическо-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (C + \bar{C}\,D)\bar{q} - \bar{C}\,\bar{V} = b, \\ c\dfrac{\partial^4 V}{\partial x^4}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m}\Big(k_i(d^{iT}\bar{q} - V(x) + P\Big)_i\,\delta(x - a_i). \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $\bar{V}$ — m-мерный вектор с компонентами $V(a_1), V(a_2), \ldots, V(a_m)$.

На функцию $u(x,t)$ наложены краевые условия (2), следовательно функция $V(x)$ должна удовлетворять соответствующим краевым условиям

$$\gamma_1(V(0)) = 0, \qquad \gamma_2(V(l)) = 0. \tag{7}$$

Относительно функций, определяющих краевые условия (7) можем предположить справедливость следующего свойства [2]

$$\gamma_j\Big(\sum_{i=1}^{m} k_i v_i(x)\Big) = \sum_{i=1}^{m} k_i \gamma_j(v_i(x)), \qquad (j = 1,2), \tag{8}$$

где k_i — постоянные, $v_i(x)$ — функции.

Определение 1. Вектор $\bar{q}$, функцию $V(x)$ назовем обобщенным решением краевой задачи (6)–(7), если они удовлетворяют алгебраическим уравнениям из системы (6), краевым условиям (7) и для любой основной функции $\varphi(x)$ [4] имеет место тождество:

$$\int_0^l \left(c\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(x) - \sum_{i=1}^{m} k_i(d^{iT}\bar{q} - V(x)\delta(x - a_i) - \sum_{i=1}^{m} P_i\delta(x - a_i)) \right) \cdot \varphi(x)dx = 0. \tag{9}$$

Теорема 1. При любых значениях $\overline{q}$ для обобщенного решения $V(x)$ дифференциального уравнения системы (6), удовлетворяющего краевым условиям (7) справедливо представление

$$V(x)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i(x-a_i)\left(k_i(d^{iT}\overline{q}-V(a_i)+P_i\right), \tag{10}$$

где функции $\eta_i(x),\ (i=1,...,m)$ являются обобщенными решениями уравнения

$$c\frac{d^4\eta_i}{dx^4}=\delta(x) \tag{11}$$

при выполнении некоторых краевых условий

$$\gamma_1(\eta_i(-a_i))=0, \qquad \gamma_2(\eta_i(l-a_i))=0\,. \tag{12}$$

Доказательство: Для функции $V(x)$, удовлетворяющей представлению (10), справедливость выполнения краевых условий (7) непосредственно следует из краевых условий (12) для функций $\eta_i(x),\ (i=1,...,m)$ в силу свойства (8) функций, определяющих краевые условия (7).

Из тождества (9) следует, если функция $V(x)$ является обобщенным решением дифференциального уравнения системы (6), тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ справедливо следующее

$$\int_0^l c\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(x)\cdot\varphi(x)dx=\sum_{i=1}^{m}\left(k_i(d^{iT}\overline{q}-V(a_i))+P_i\right)\varphi(a_i)\,. \tag{13}$$

Представим (10) в виде

$$V(x)=-\sum_{i=1}^{m}\int_0^l\eta_i(x-\xi)\left(k_i(d^{iT}\overline{q}-V(\xi))+P_i\right)\cdot\delta(\xi-a_i)\,d\xi\,. \tag{14}$$

Подставим (14) в левую часть соотношения (13). Последовательно меняя порядок интегрирования и учитывая (9), получим

$$\int_0^l\left(\sum_{i=1}^{m}\int_0^l c\frac{d^4\eta_i(x-\xi)}{dx^4}\left(k_i(d^{iT}\overline{q}-V(\xi))+P_i\right)\cdot\delta(\xi-a_i)\,d\xi\right)\cdot\varphi(x)dx=$$

$$=\int_0^l\left(\sum_{i=1}^{m}\int_0^l\delta(x-\xi)\left(k_i(d^{iT}\overline{q}-V(\xi))+P_i\right)\delta(\xi-a_i)\,d\xi\right)\cdot\varphi(x)dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\int_0^l\left[\left(k_i(d^{iT}\overline{q}-V(\xi))+P_i\right)\delta(\xi-a_i)\cdot\int_0^l\varphi(x)\delta(x-\xi)dx\right]d\xi=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\int_0^l\left[\left(k_i(d^{iT}\overline{q}-V(\xi))+P_i\right)\varphi(\xi)\delta(\xi-a_i)\cdot\right]d\xi=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(k_i(d^{iT}\overline{q}-V(a_i))+P_i\right)\varphi(a_i),$$

выражение, которое совпадает с правой частью (11).

Таким образом, доказана справедливость представления (10) для обобщенного решения $V(x)$ дифференциального уравнения системы (6). *Теорема доказана*.

Для нахождения $\overline{q}$ и $V(x)$, задающих положение равновесия системы твердых тел, прикрепленной к балке Эйлера — Бернулли в выбранной системе координат, в начале, подставив последовательно в соотношение (10) значения $x = a_i$, $(i = 1, 2, ..., m)$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $V(a_1), V(a_2), V(a_m)$

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_j - a_i) k_i d^{iT} \overline{q} - (1 - \eta_i(0) k_j) V(a_j) - \sum_{i=1,\, i \neq j}^{m} \eta_i (a_j - a_i) k_i V(a_i) = \\ = \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_j - a_i) P_i, \qquad (j = 1, ..., m). \tag{15}$$

Систему (15) с помощью матричных обозначений можно записать в виде

$$N\overline{q} - M\overline{V} = b_1, \tag{16}$$

где M — матрица размерности $m \times m$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \eta_1(0)k_1 & \eta_2(a_1 - a_2)k_2 .... \eta_m(a_1 - a_m)k_m \\ \eta_1(a_2 - a_1)k_1 & 1 + \eta_2(0)k_2 .... \eta_m(a_2 - a_m)k_m \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \eta_1(a_m - a_1)k_1 & \eta_2(a_m - a_2)k_2 .... 1 + \eta_m(0)k_m \end{pmatrix},$$

N — матрица размерности $m \times n$:

$$N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_1 - a_i) k_i d_1^i & \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_1 - a_i) k_i d_2^i ...... \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_1 - a_i) k_i d_n^i \\ \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_2 - a_i) k_i d_1^i & \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_2 - a_i) k_i d_2^i ...... \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_2 - a_i) k_i d_n^i \\ .... & \\ \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_m - a_i) k_i d_1^i & \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_m - a_i) k_i d_2^i ...... \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_m - a_i) k_i d_n^i \end{pmatrix},$$

b_1 — m-мерный вектор:

$$b_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_1 - a_i) P_i \\ \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_2 - a_i) P_i \\ .... \\ \sum_{i=1}^{m} \eta_i (a_m - a_i) P_i \end{pmatrix}.$$

Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\bar{q}$, $\bar{V}$, объединив первое уравнение системы (6) с системой (16).

$$\begin{cases} (C+\bar{C}D)\bar{q}-\bar{C}\bar{V}=b, \\ N\bar{q}-M\bar{V}=b_1. \end{cases} \tag{17}$$

Когда определены обобщенные решения $\eta_i(x), (i=1,...,m)$ уравнения (11), удовлетворяющие краевым условиям (12), то из решения системы (17) можем найти значения векторов $\bar{q}$ и $\bar{V}$, которые позволяют найти прогиб балки в соответствии с (10).

Функции $\eta_1(x),\eta_2(x),...,\eta_m(x)$, входящие в представление (10), можем определить решением m краевых задач для уравнения

$$c\frac{d^4\eta(x)}{dx^4}=\delta(x) \tag{18}$$

с краевыми условиями (12).

Общее обобщенное решение $\eta(x,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4)$ уравнения (18) можно найти в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\eta_0(x,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4)=\tilde{c}_1+\tilde{c}_2x+\tilde{c}_3x^2+\tilde{c}_4x^3,$$

где $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\tilde{c}_3,\tilde{c}_4$ — произвольные постоянные и некоторого обобщенного решения $\tilde{\eta}(x)$ неоднородного уравнения (18):

$$\eta(x,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4)=\eta_0(x,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4)+\tilde{\eta}(x). \tag{19}$$

В качестве частного обобщенного решения $\tilde{\eta}(x)$ уравнения (18) рассмотрим в соответствии с [3]

$$\tilde{\eta}(x)=g(x)\theta(x), \tag{20}$$

где $g(x)$ — решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$g(0)=0,\quad \frac{dg}{dx}(0)=0,\quad \frac{d^2g}{dx^2}(0)=0,\quad \frac{d^3y}{dx^3}(0)=\frac{1}{c}, \tag{21}$$

$\theta(x)$ — классическая функция Хэвисайда.

Решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (21), может быть найдено в виде:

$$g(x)=\frac{1}{6c}x^3.$$

Таким образом, общее обобщенное решение $\eta(x,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\tilde{c}_3,\tilde{c}_4)$ уравнения (18) в соответствии с (19)–(20) может быть представлено следующим образом:

$$\eta(x,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\tilde{c}_3,\tilde{c}_4)=\tilde{c}_1+\tilde{c}_2x+\tilde{c}_3x^2+\tilde{c}_4x^3+\frac{1}{6c}x^3\theta(x). \tag{22}$$

После вычисления значений произвольных констант $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4$ при условии выполнения граничных условий (12) находим обобщенные решения $\eta_1(x), \eta_2(x), ..., \eta_m(x)$.

Заключение

Уточнение обобщенной математической модели системы взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных к балке Эйлера — Бернулли упругими связями, описываемой ГСДУ (1), приводит к рассмотрению ГСДУ (4). В связи с этим возникает необходимость нахождения положения равновесия в выбранной системе координат. Найденные значения векторов $\overline{q}$ и $\overline{V}$ из решения системы линейных алгебраических уравнений (17) позволяют найти прогиб балки $V(x)$ в соответствии с соотношением (10). При этом вектор $\overline{q}$ и функция $V(x)$ определяют положение равновесия системы твердых тел, прикрепленной к балке Эйлера — Бернулли в выбранной системе координат.

Заметим, если сделаем замену переменных в ГСДУ (4)

$$q(t) = \tilde{q}(t) + \overline{q}, \quad u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + V(x),$$

то переменные $\tilde{q}(t)$ $\tilde{u}(x,t)$ можно интерпретировать как переменные, описывающие колебания механической системы относительно положения равновесия (состояния покоя). При этом они удовлетворяют ГСДУ (1). Отметим, что для систем твердых тел, прикрепленных к балке Эйлера — Бернулли, описываемых ГСДУ (1), разработано алгоритмическое [5] и программное [6] обеспечение исследования свободных колебаний.

Литература

1. Мижидон А. Д., Цыцыренова М. Ж. Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Вестник ВСГТУ. 2013. № 6. С. 5–12.

2. Мижидон А. Д. Теоретические основы исследования одного класса гибридных систем дифференциальных уравнений // Математический анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 155. С. 38–64.

3. Мижидон А. Д., Мижидон К. А. Собственные значения для одной системы гибридных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 911–922.

4. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.

5. Гармаева В. В. Алгоритмическое обеспечение исследования свободных колебаний балки Эйлера — Бернулли с прикрепленными телами // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2016. № 1. С. 79–87.

6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612387. Расчет собственных частот балки Эйлера — Бернулли с прикрепленными твердыми телами / А. Д. Мижидон, С. Г. Баргуев, М. Ж. Дабаева, В. В. Гармаева. 18.02.2015.

EQUILIBRIUM POSITION OF THE SYSTEM OF SOLIDS ATTACHED TO AN EULER—BERNOULLY BEAM, DESCRIBED BY A HYBRID SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Arsalan D. Mizhidon
Dr. Sci. (Engineering), Prof.,
East-Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: miarsdu@mail.ru

Valentina V. Garmaeva
Lecturer,
East-Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia
E-mail: gfiksiv@gmail.com

The article considers a refined generalized mathematical model that allows us to describe a wider class of systems of interconnected solids elastically attached to an Euler—Bernoulli beam. The model is described by a non-uniform linear hybrid system of differential equations with coefficients depending on the Dirac delta functions. Nonhomogeneity in the system necessitates finding the initial conditions corresponding to the position of bodies and beam deflection in a state of equilibrium. The equilibrium position of a mechanical system is understood as a solution of the initial hybrid system of differential equations that doesn't vary with time. It is proposed an approach to find the equilibrium position of the system of solids attached to an Euler—Bernoulli beam in the chosen coordinate system.
Keywords: solid; Euler—Bernoulli beam; hybrid system of differential equations; equilibrium position.

References

1. Mizhidon A. D., Dabaeva M. Zh. (Tsytsyrenova M. Zh.) Obobshchennaya matematicheskaya model sistemy tverdykh tel, ustanovlennykh na uprugom sterzhne [A Generalized Mathematical Model of the System of Solids Mounted on an Elastic Rod]. *Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta.* 2013. No. 6. Pp. 5–12.

2. Mizhidon A. D. Teoreticheskie osnovy issledovaniya odnogo klassa gibridnykh sistem differentsialnykh uravnenii [Theoretical Background for the Study of One Class of Hybrid Systems of Differential Equations]. *Itogi nauki i tekhniki. Matematicheskii analiz.* Ser. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. 2018. V. 155. Pp. 38–64.

3. Mizhidon A. D., Mizhidon K. A. Sobstvennye znacheniya dlya odnoi sistemy gibridnykh differentsialnykh uravnenii [Eigenvalues for One System of Hybrid Differential Equations]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2016. V. 13. Pp. 911–922.

4. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 280 p.

5. Garmaeva V. V. Algoritmicheskoe obespechenie issledovaniya svobodnykh kolebanii balki Eilera—Bernulli s prikreplennymi telami [Algorithmic Support for the Study of Free Vibrations of an Euler—Bernoulli Beam with Attached Bodies]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika.* 2016. No. 1. Pp. 79–87.

6. Mizhidon A. D., Barguev S. G., Dabaeva M. Zh., Garmaeva V. V. *Raschet sobstvennykh chastot balki Eilera—Bernulli s prikreplennymi tverdymi telami* [Calculation of Natural Frequencies of an Euler—Bernoulli beam with Attached Solids]. Svidetelstvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlya EVM no. 2015612387. 18.02.2015.