УДК 519.716
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-2-16-27

О КЛАССАХ ГИПЕРФУНКЦИЙ РАНГА 2, ПОРОЖДЕННЫХ МАКСИМАЛЬНЫМИ ЧАСТИЧНЫМИ УЛЬТРАКЛОНАМИ [1]

© Бадмаев Сергей Александрович
преподаватель,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: badmaevsa@mail.ru

В данной работе рассматривается множество гиперфункций, которое является подмножеством множества мультифункций, определенных на двухэлементном множестве. В качестве оператора замыкания выступает специальным образом введенная операция суперпозиции, при которой множество всех мультифункций образует полный частичный ультраклон ранга 2. Для гиперфункций, как и для других дискретных функций, интересной является задача их классификации. Один из вариантов классификации основан на принадлежности функций максимальным клонам. Основной целью работы является классификация всех гиперфункций относительно принадлежности максимальным частичным ультраклонам. Отношение принадлежности максимальным частичным ультраклонам является отношением эквивалентности и порождает соответствующее разбиение на классы эквивалентности. С помощью компьютерных вычислений и путем выявления специальных свойств гиперфункций получено полное описание всех классов эквивалентности, общее число которых равно 28.

Ключевые слова: мультифункция; булева функция; клон; максимальный клон; частичный клон; мультиклон; суперпозиция; подмножество функций; классификация функций; базис.

Для цитирования:
Бадмаев С. А. О классах гиперфункций ранга 2, порожденных максимальными частичными ультраклонами // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 2. С. 16–27.

Введение

В последние десятилетия активно исследуются мультифункции. Под мультифункцией на k-элементном множестве A понимается функция, определенная на множестве A и принимающая в качестве значений его подмножества. Очевидно, что суперпозиция в обычном смысле при работе с мультифункциями не подходит. Поэтому для них необходимо дать новое определение суперпозиции. Обычно рассматривается два способа определения суперпозиции: в основе первого лежит объединение подмножеств

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-31-00020.

множества A, и в этом случае замкнутые множества, содержащие все проекции, называются мультиклонами, а в основе второго — пересечение подмножеств множества A, и замкнутые множества, содержащие все проекции, называются частичными ультраклонами. Множество мультифункций на A, с одной стороны, содержит в себе все функции k-значной логики, а с другой — является подмножеством функций 2^k -значной логики с суперпозицией, сохраняющей это подмножество.

В теории функций интересной является задача классификации. Одним из известных вариантов классификации функций k-значной логики является тот, при котором функции в замкнутом подмножестве B замкнутого множества M могут быть разбиты согласно их принадлежности предполным в M классам. В данной работе в роли подмножества B выступает множество всех гиперфункций на двухэлементном множестве, а в качестве множества M — множество всех мультифункций на двухэлементном множестве, и при этом предполными классами являются максимальные частичные ультраклоны. Используя разбиение на классы эквивалентности по отношению принадлежности максимальным классам, можно оценить мощности всевозможных базисов и описать все типы базисов.

Отметим, что классы эквивалентности и типы базисов для различных множеств функций k-значной логики изучались, например, в [4; 5; 6; 7].

1 Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0,1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$$P_{2,n}^{\overset{-}{*}} = \{f \mid f : E^n \to F\},\ P_2^{\overset{-}{*}} = \bigcup_n P_{2,n}^{\overset{-}{*}},$$

$$P_{2,n}^{-} = \{f \mid f : E^n \to F \setminus \{\varnothing\}\},\ P_2^{-} = \bigcup_n P_{2,n}^{-},$$

$$P_{2,n}^{*} = \{f \mid f : E^n \to F \setminus \{\{0,1\}\}\},\ P_2^{*} = \bigcup_n P_{2,n}^{*},$$

$$P_{2,n} = \{f \mid f : E^n \to E\},\ P_2 = \bigcup_n P_{2,n}.$$

Функции из $P_2^{\overset{-}{*}}$ называются мультифункциями на E, из P_2^{-} — гиперфункциями на E, из P_2^{*} — частичными функциями на E, из P_2 — булевыми функциями.

Для того чтобы суперпозиция $f(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$ определяла некоторую мультифункции $g(x_1,\dots,x_n)$ определим значения мультифункции g на наборах из подмножеств множества E.

Если $(a_1,...,a_n) \in E^n$, то по определению

$$g(a_1,...,a_n) = \begin{cases} \bigcap\limits_{b_i \in f_i(a_1,...,a_n)} f(b_1,...,b_m); \\ \bigcup\limits_{b_i \in f_i(a_1,...,a_n)} f(b_1,...,b_m), \end{cases}$$

пересечение берется, если оно не пусто, в противном случае берется объединение. На наборах, содержащих пустое множество, значение мультифункции равно пустому множеству.

Это определение позволяет вычислить значение мультифункции на любом наборе $(a_1,...,a_n) \in F^n$.

Для упрощения записи договоримся использовать кодировку: $\varnothing \leftrightarrow *, \{0\} \leftrightarrow 0, \{1\} \leftrightarrow 1, \{0,1\} \leftrightarrow -$.

Константную гиперфункцию, принимающую на всех наборах значение –, обозначим через f^-.

Отметим, что в настоящей работе мы будем придерживаться терминологии, принятой в [1; 2], что позволит нам здесь не вводить дополнительных определений.

В [1] доказано, что максимальными частичными ультраклонами ранга 2 являются только следующие 12 множеств:

1) K_1 — множество, состоящее из всех мультифункций *f*, принимающих на нулевом наборе либо значение 0, либо значение *;

2) K_2 — множество, состоящее из всех мультифункций *f*, принимающих на единичном наборе либо значение 1, либо значение *;

3) K_3 — множество, состоящее из всех мультифункций *f*, для которых выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{0}) = *$ или $f(\tilde{1}) = *$;
- $f(\tilde{0}) = 0$ и $f(\tilde{1}) = 1$.

4) K_4 — множество, состоящее из всех мультифункций *f*, таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из трех условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = f(\overline{\tilde{\alpha}}) = -$;
- $f(\tilde{\alpha}) = f(\overline{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\overline{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0,1\}$.

5) K_5 — множество, состоящее из всех мультифункций *f*, таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = *$ или $f(\overline{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\overline{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0,1\}$.

6) $K_6 = P_2^- \cup \{*\}$;

7) $K_7 = P_2^*$;

8) K_8 — множество всех мультифункций *f*, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0,1\}$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ — двоичные наборы, такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000),(001),(010),(111)\}$ для любого $i \in \{1,...,n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$, такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 1$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1,...,n\}$, тогда, если $f(\tilde{\alpha}) = *$, то $f(\tilde{\beta}) = *$.

9) K_9 — множество всех мультифункций *f*, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0,1\}$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ — двоичные наборы, такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000),(011),(101),(111)\}$ для любого $i \in \{1,...,n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$, такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 0$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1,...,n\}$, тогда, если $f(\tilde{\beta}) = *$, то $f(\tilde{\alpha}) = *$.

10) K_{10} — множество всех мультифункций *f*, сохраняющих предикат:

$$R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & \delta \end{pmatrix},$$

где $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$ — всевозможные столбцы, в которых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0,1,-,*\}$ одновременно удовлетворяют двум условиям:

- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$ среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как минимум два принимают значение *;
- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$, если среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ встречаются 0 или 1, то все они не равны –.

11) K_{11} — множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат:

$$R_{11}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix};$$

12) K_{12} — множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат:

$$R_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

Далее для каждой мультифункции f однозначно определим вектор принадлежности $\tau(f)=(\tau_1,\ldots,\tau_{12})$ множествам K_1 – K_{12}, в котором для всех $i\in\{1,\ldots,12\}$ компонента τ_i равна 0, если $f\in K_i$, и равна 1, если $f\notin K_i$.

Отношение принадлежности множествам K_1 – K_{12} является отношением эквивалентности и порождает разбиение $P_2^{\bar{*}}$ на классы эквивалентности. У мультифункций из одного класса векторы принадлежности множествам K_1 – K_{12} совпадают. Так как число максимальных частичных ультраклонов равно 12, то наибольшее возможное число классов эквивалентности равно $2^{12}=4096$.

В данной работе найдем число классов эквивалентности, которые состоят только из гиперфункций.

2 Основной результат

В [3] показано, что множество булевых функций разбивается на 15 классов эквивалентности относительно принадлежности максимальным частичным ультраклонам. Поэтому на протяжении всей статьи будем рассматривать только гиперфункции из множества $P_2^{-}\setminus P_2$. Очевидно, что каждая гиперфункция принадлежит классу K_6 и не принадлежит классу K_7.

Лемма 1. Для любой $f\in P_2^{-}\setminus P_2$ справедливы утверждения:

1) $f\notin K_5$;

2) если f не является константной гиперфункцией f^{-}, то $f\notin K_{10}$;

3) $f\in K_1\cap K_2$ тогда и только тогда, когда $f\in K_3$.

Доказательство. 1. Пусть f — произвольная гиперфункция из множества $P_2^{-}\setminus P_2$. Обязательно существует набор $\tilde{\alpha}$, такой, что $f(\tilde{\alpha})=-$. При этом очевидно, что $f(\overline{\tilde{\alpha}})\in\{0,1,-\}$. Следовательно, $f\notin K_5$. 2. Пусть f — произвольная гиперфункция, отличная от константной гиперфункции f^{-}. Найдутся наборы $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$, такие, что $f(\tilde{\alpha})=-$,

$f(\widetilde{\beta}) = \lambda \in \{0,1\}$. Тогда $f\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} \\ \widetilde{\alpha} \\ \widetilde{\beta} \\ \widetilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \notin R_{10}$, при этом для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$ набор $(\alpha_i \alpha_i \beta_i \beta_i)^t$ принадлежит предикату R_{10}.

3. Справедливость утверждения следует непосредственно из определений классов K_1, K_2, K_3.

Лемма доказана.

Лемма 2. Для любой $f \in P_2^- \setminus P_2$ справедливы утверждения:

1) если $f \notin K_8$, то $f \notin K_{11}$;
2) если $f \notin K_9$, то $f \notin K_{12}$.

Доказательство. 1. Пусть $f \notin K_8$. Предположим, что f не удовлетворяет первому условию в определении класса K_8. Найдутся наборы $\widetilde{\alpha}^i$, где $i \in \{1,2,3\}$, такие, что столбец $(\alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3)^t$ совпадает с одним из столбцов $(000)^t, (001)^t, (010)^t, (111)^t$ для любого $j \in \{1,\ldots,n\}$ и $f\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}^1 \\ \widetilde{\alpha}^2 \\ \widetilde{\alpha}^3 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Если $f\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}^1 \\ \widetilde{\alpha}^2 \\ \widetilde{\alpha}^3 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, то, учитывая, что $(000)^t, (001)^t, (010)^t, (111)^t \in R_{11}$, получим $f \notin K_{11}$. Если $f\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}^1 \\ \widetilde{\alpha}^2 \\ \widetilde{\alpha}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $f\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}^1 \\ \widetilde{\beta} \\ \widetilde{\alpha}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \notin R_{11}$, где набор $\widetilde{\beta}$ такой, что $\beta_k = -$ для тех k, для которых $(\alpha_k^1 \alpha_k^2 \alpha_k^3)^t = (010)^t$, и $\beta_k = \alpha_k^2$ для остальных k. Следовательно, $f \notin K_{11}$.

Теперь предположим, что f не удовлетворяет второму условию в определении класса K_8. Найдутся наборы $\widetilde{\alpha}^1$ и $\widetilde{\alpha}^2$, такие, что $f(\widetilde{\alpha}^1) = -$ и $f(\widetilde{\alpha}^2) = 1$. Рассмотрим значение f на единичном наборе. Если $f(\widetilde{1}) \in \{0,1\}$, то $f\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}^1 \\ \widetilde{1} \\ \widetilde{\alpha}^1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 1 \\ - \end{pmatrix} \right\} \notin R_{11}$. Если $f(\widetilde{1}) = -$, то

$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^2\\ \tilde{1}\\ \tilde{\alpha}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -\\ 1\end{pmatrix}\notin R_{11}$. Следовательно, $f\notin K_{11}$.

2. Доказательство аналогично доказательству предыдущего пункта в силу двойственности.

Лемма доказана.

Лемма 3. Для любой $f\in P_2^-\setminus P_2$ справедливы утверждения:

1) если $f\in K_1$, то $f\notin K_9$ и $f\notin K_{12}$;
2) если $f\in K_2$, то $f\notin K_8$ и $f\notin K_{11}$;
3) если $f\in K_1\cap K_2$, то $f\notin K_8\cup K_9$ и $f\notin K_{11}\cup K_{12}$.

Доказательство. 1. Пусть гиперфункция $f\in K_1$. Тогда $f(\tilde{0})=0$, т. е. существует набор, на котором значение f равно 0. Поэтому, учитывая обязательное существование набора, на котором значение функции f равно –, получим, что гиперфункция f не удовлетворяет второму условию в определении класса K_9. Следовательно, $f\notin K_9$ и в силу пункта 2 леммы 2 получим, что $f\notin K_{12}$.

2. Доказательство аналогично доказательству предыдущего пункта в силу двойственности.

3. Справедливость утверждения следует из пунктов 1 и 2 настоящей леммы, а также пунктов 1 и 2 леммы 2.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $f\in P_2^-\setminus P_2$. Если $f\in K_1\setminus K_2$ или $f\in K_2\setminus K_1$, то $f\notin K_4$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $f\in K_1\setminus K_2$. Тогда $f(\tilde{0})=0$ и $f(\tilde{1})\in\{0,-\}$. Покажем, что в каждом случае гиперфункция f не удовлетворяет условиям в определении класса K_4. Если $f(\tilde{1})=0$, то $f(\overline{\tilde{1}})=f(\tilde{0})=0\neq 1=\overline{f(\tilde{0})}=\overline{f(\overline{\tilde{1}})}$. Если же $f(\tilde{1})=-$, то $f(\overline{\tilde{1}})=f(\tilde{0})=0\neq -$. Для случая, когда гиперфункция f принадлежит множеству $f\in K_2\setminus K_1$, доказательство аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 5. Для любой $f\in P_2^-\setminus P_2$ справедливы утверждения:

1) если $f\in K_8\cap K_9$, то гиперфункция f является константной гиперфункцией f^-;
2) если $f\in K_{11}\cap K_{12}$, то гиперфункция f является константной гиперфункцией f^-.

Доказательство. 1. Предположим, что гиперфункция f не является константной гиперфункцией f^{-}. Тогда существует набор $\widetilde{\alpha}$, такой, что $f(\widetilde{\alpha}) = \lambda \in \{0,1\}$. При этом обязательно найдется набор, на котором значение f равно –. Поэтому если $\lambda = 0$, то f не удовлетворяет второму условию в определении класса K_9, если же $\lambda = 1$, то f не удовлетворяет второму условию в определении класса K_8. Следовательно, либо $f \notin K_9$, либо $f \notin K_8$, что противоречит принадлежности f множеству $K_8 \cap K_9$.

2. Предположим, что гиперфункция f не является константной гиперфункцией f^{-}. Из предыдущего пункта получим, что либо $f \notin K_9$, либо $f \notin K_8$. Далее, используя утверждения леммы 2, получим, что $f \notin K_{12}$ либо $f \notin K_{11}$, что противоречит принадлежности f множеству $K_{11} \cap K_{12}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $f \in P_2^{-} \setminus P_2$. Если $f \notin K_1 \cup K_2$ и $f \in K_4$, то либо гиперфункция f является константной гиперфункцией f^{-}, либо $f \notin K_8 \cup K_9 \cup K_{11} \cup K_{12}$.

Доказательство. Так как $f \notin K_1 \cup K_2$, то $f(\widetilde{0}) \in \{1,-\}$ и $f(\widetilde{1}) \in \{0,-\}$. С учетом того, что $f \in K_4$ остаются варианты $f(\widetilde{0}) = 1$, $f(\widetilde{1}) = 0$ и $f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{1}) = -$. В случае когда $f(\widetilde{0}) = 1$, $f(\widetilde{1}) = 0$, также как и в доказательстве леммы 3, получим, что $f \notin K_8 \cup K_9 \cup K_{11} \cup K_{12}$. Если же $f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{1}) = -$, то либо f является константной гиперфункцией f^{-} и утверждение леммы справедливо, либо существует набор $\widetilde{\alpha}$, такой, что $f(\widetilde{\alpha}) = \lambda \in \{0,1\}$. Без ограничения общности можно считать, что $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Так как $f \in K_4$, то $f(\overline{\widetilde{\alpha}}) = 1$. Таким образом существуют наборы, на которых f равна 0, 1 и –. Следовательно, $f \notin K_8 \cup K_9 \cup K_{11} \cup K_{12}$.

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $f \in P_2^{-} \setminus P_2$. Если $f \notin K_1 \cup K_2$ и $f \notin K_4$, $f \notin K_{11} \cup K_{12}$.

Доказательство. Так как $f \notin K_1 \cup K_2$, то $f(\widetilde{0}) \in \{1,-\}$ и $f(\widetilde{1}) \in \{0,-\}$. Если $f(\widetilde{0})$ и $f(\widetilde{1})$ одновременно не равны –, то получим

$$f\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{1}\\ \tilde{0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\0\\-\end{pmatrix}\right\} \notin R_{11} \text{ и } f\begin{pmatrix}\tilde{1}\\ \tilde{0}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\1\\-\end{pmatrix}\right\} \notin R_{12}.$$

Предположим, что $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1}) = -$. Так как $f \notin K_4$, то f не является константной гиперфункцией f^- и, следовательно, найдется набор $\tilde{\alpha}$, такой, что $f(\tilde{\alpha}) = \lambda \in \{0,1\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{\alpha}\\ \tilde{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ \lambda\\ -\end{pmatrix} \notin R_{11}$ и

$$f\begin{pmatrix}\tilde{1}\\ \tilde{\alpha}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ \lambda\\ -\end{pmatrix} \notin R_{12}.$$

Лемма доказана.

Далее докажем две основные теоремы.

Теорема 1. Множество всех гиперфункций ранга 2, отличных от булевых функций, порождает не более 13 классов эквивалентности относительно принадлежности максимальным частичным ультраклонам.

Доказательство. Из первых двух пунктов леммы 1 следует, что для каждой из рассматриваемых гиперфункций в векторе $(\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5 01\tau_8\tau_9\tau_{10}\tau_{11}\tau_{12})$ принадлежности максимальным частичным ультраклонам $K_1 - K_{12}$ компоненты τ_5 и τ_{10} равны 1, а из третьего пункта этой же леммы получим, что набор $(\tau_1\tau_2\tau_3)$ совпадает с одним из наборов (000), (011), (101), (111). Рассмотрим все эти варианты.

Из третьего пункта леммы 3 следует, что гиперфункции, принадлежащие одновременно классам K_1, K_2, K_3, разбиваются не более чем на 2 класса эквивалентности, которым соответствуют векторы (000010111111), (000110111111).

Теперь рассмотрим гиперфункции, которые либо принадлежат K_1 и не принадлежат K_2, K_3, либо принадлежат K_2 и не принадлежат K_1, K_3. Применяя лемму 2, первые два пункта леммы 3 и лемму 4, получим, что число классов эквивалентности для таких гиперфункций не более 6 и векторы, соответствующие этим классам, имеют вид (011110101101), (011110101111), (011110111111), (101110110110), (101110110111), (101110111111).

Осталось рассмотреть гиперфункции, не принадлежащие ни одному из классов K_1, K_2, K_3. Очевидно, что среди таких гиперфункций выделяются те, которые на каждом наборе принимают значение –. Легко проверить, что вектор принадлежности классам $K_1 - K_{12}$ для этих гиперфункций имеет вид (111010100000). Далее предполагаем, что гиперфункции неконстантные. По лемме 6 получим, что гиперфункции, принадлежащие классу K_4, могут порождать не более одного класса эквивалентности, которому соответствует вектор принадлежности (111010111111). Далее, применяя леммы 5 и 7, получим, что гиперфункции, не принадлежащие классу K_4, разбиваются не более чем на 3 класса эквивалентности, которым соответствуют векторы (111110101111), (111110110111), (111110111111).

Теорема доказана.

Теорема 2. Множество всех гиперфункций ранга 2 порождает 28 классов эквивалентности относительно принадлежности максимальным частичным ультраклонам.

Доказательство. Так как число классов булевых функций равно 15, с учетом предыдущей теоремы получим, что все гиперфункции разбиваются не более чем на 28 классов эквивалентности.

В результате компьютерных вычислений над гиперфункциями от трех переменных были найдены 28 различных векторов принадлежности классам $K_1 – K_{12}$. В таблице 1 приведены векторы принадлежности и соответствующие им гиперфункции.

Теорема доказана.

Таблица 1

№	$\tau(f)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	№	$\tau(f)$	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	(000000000000)	(00001111)	15	(101110000000)	(11111111)
2	(000000011011)	(01101001)	16	(101110011011)	(10011001)
3	(000000011111)	(00010111)	17	(101110011111)	(10000001)
4	(000010111111)	(000--111)	18	(101110110110)	(-1111111)
5	(000110001101)	(00000001)	19	(101110110111)	111111-1)
6	(000110010110)	(00111111)	20	(101110111111)	(100000-1)
7	(000110011111)	(00000111)	21	(111000011011)	(10010110)
8	(000110111111)	(000000-1)	22	(111000011111)	(10001110)
9	(011110000000)	(00000000)	23	(111010100000)	f^{-}
10	(011110011011)	(00111100)	24	(111010111111)	(100--110)
11	(011110011111)	(00000010)	25	(111110011111)	(10000000)
12	(011110101101)	(0000000-)	26	(111110101111)	(-0000000)
13	(011110101111)	(000000-0)	27	(111110110111)	(1111111-)
14	(011110111111)	(0000001-)	28	(111110111111)	(1000000-)

Заключение

Результат, полученный в данной работе, является существенным для дальнейших исследований разбиения множества мультифункций на двухэлементном множестве на классы эквивалентности относительно принадлежности максимальным частичным ультраклонам. Получив полное разбиение, можно перейти к решению задачи оценивания мощности всех возможных базисов и подсчета количества различных типов базисов одинаковой мощности.

Литература

1. Бадмаев С. А., Шаранхаев И. К. О максимальных клонах частичных ультрафункций на двухэлементном множестве // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 16. С. 3–18.
2. Бадмаев С. А. Критерий полноты множества мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2 // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 450–474. DOI: 10.17377/semi.2018.15.040.
3. Бадмаев С. А. О классах булевых функций, порожденных максимальными частичными ультраклонами // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2019. Т. 27. С. 3–14. DOI: 10.26516/1997-7670.2019.27.3.
4. Замарацкая С. В., Пантелеев В. И. Классификация и типы базисов ультрафункций ранга 2 // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 16. С. 58–70.
5. Зинченко А. С., Пантелеев В. И. О классах гиперфункций ранга 2, порожденных максимальными мультиклонами // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т. 21. С. 61–76. DOI: 10.26516/1997-7670.2017.21.61.
6. Казимиров А. С., Пантелеев В. И. О классах булевых функций, порожденных максимальными мультиклонами // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат., инф. 2015. № 9. С. 16–22.
7. Яблонский С. В. О суперпозициях функций алгебры логики // Мат. сб. 1952. Т. 30, № 2(72). С. 329–348.

ON CLASSES OF RANK-TWO HYPERFUNCTIONS GENERATED BY MAXIMAL PARTIAL ULTRACLONES

Sergey A. Badmaev
Lecturer,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: badmaevsa@mail.ru

The article considers the set of hyperfunctions, which is a subset of the set of multifunctions defined on a two-element set. The closure operator is a specially introduced superposition operation at which the set of all multifunctions makes a full partial two-rank ultraclone. The problem of classification for hyperfunctions, like for other discrete functions, appears to be interesting. One of the variants of classification is based on the belonging of functions to maximal clones. The article is predominantly aimed at classification of all hyperfunctions with respect to their belonging to maximal partial ultraclones. The relation of membership to maximal partial ultraclones is an equivalence relation and generates a corresponding partition into equivalence classes. We have obtained a complete description of all equivalence through computer calculations and identification of the special properties of hyperfunctions, the total number of which is 28.

Keywords: multifunction; Boolean function; clone; maximal clone; partial clone; multiclone; superposition; subset of functions; classification of functions; basis.

References

1. Badmaev S. A., Sharankhaev I. K. O maksimalnykh klonakh chastichnykh ultrafunktsii na dvukhelementnom mnozhestve [On Maximal Clones of Partial Ultrafunctions on a Two-Element Set]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.* 2016. V. 16. Pp. 3–18.
2. Badmaev S. A. Kriterii polnoty mnozhestva multifunktsii v polnom chastichnom ultraklone ranga 2 [A Completeness Criterion for a Set of Multifunction in Two-Rank Full Partial Ultraclone]. *Siberian Electronic Mathematical Reports.* 2018. V. 15. Pp. 450–474. DOI: 10.17377/semi.2018.15.040.
3. Badmaev S. A. O klassakh bulevykh funktsii, porozhdennykh maksimalnymi chastichnymi ultraklonami [On Classes of Boolean Functions Generated by Maximal Partial Ultraclones]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika.* 2019. V. 27. Pp. 3–14. DOI: 10.26516/1997-7670.2019.27.3.
4. Zamaratskaya S. V., Panteleev V. I. Klassifikatsiya i tipy bazisov ultrafunktsii ranga 2 [Classification and Types of Bases of Two-Rank Ultrafunctions]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika.* 2016. V. 16. Pp. 58–70.
5. Zinchenko A. S., Panteleev V. I. O klassakh giperfunktsii ranga 2, porozhdennykh maksimalnymi multiklonami [On Classes of Two-Rank Hyperfunctions Generated by Maximal Multiclones]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika.* 2017. V. 21. Pp. 61–76. DOI: 10.26516/1997-7670.2017.21.61.
6. Kazimirov A. S., Panteleev V. I. O klassakh bulevykh funktsii, porozhdennykh maksimalnymi multiklonami [On the Classes of Boolean Functions Generated by Maximal Multiclones]. *Vestnik Byryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika.* 2015. No. 9. Pp. 16–22.
7. Yablonskii S. V. O superpozitsiyakh funktsii algebry logiki [On the Superposition of Boolean Functions]. *Sbornik: Mathematics.* 1952. V. 30. No. 2 (72). Pp. 329–348.