ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93, 517.937
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-3-3-16

К РЕАЛИЗАЦИИ ПОЛИЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

© Лакеев Анатолий Валентинович
доктор физико-математических наук,
Институт динамики систем и теории
управления имени В. М. Матросова (ИДСТУ СО РАН)
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: lakeyev@icc.ru

© Линке Юрий Эрниевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Иркутский национальный исследовательский технический университет
Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83
E-mail: linkeyurij@gmail.com

© Русанов Вячеслав Анатольевич
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории
управления имени В. М. Матросова (ИДСТУ СО РАН)
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: v.rusanov@mail.ru

Изучены некоторые качественные вопросы существования решения обратной задачи нелинейного бесконечномерного системного анализа в области разрешимости операторной реализации инвариантного полилинейного регулятора нестационарной гиперболической системы. Исследуемая постановка прецизионного математического моделирования рассматривает случай, когда для двух различных пучков (конечных, счетных или даже континуальных) нелинейных управляемых динамических процессов типа «траектория, программное управление», индуцированных в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве некоторой заданной нестационарной гиперболической системой, но с разными полилинейными регуляторами, получены достаточные условия разрешимости задачи реализации оператор-функций общего (инвариантного) полилинейного регулятора, при наличии которого в структуре уравнений данной гиперболической системы объединение этих динамических пучков представляет фиксированное семейство ее допустимых решений. Исследование проведено в свете современных представлений о геометрии бесконечномерных векторных полей на основе качественного изучения свойства полуаддитивности нелинейного функционального оператора Релея — Ритца.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты: 19-01-00301, 19-08-00746).

Ключевые слова: качественная теория нелинейной дифференциальной реализации; нестационарная гиперболическая система; функциональный оператор Релея — Ритца; полилинейный регулятор.

Для цитирования:
Лакеев А. В., Линке Ю. Э., Русанов В. А. К реализации полилинейного регулятора нестационарной гиперболической системы // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 3. С. 3–16.

Введение

Проведение точного количественного анализа сложной динамической системы, как правило, методологически разделяют на *прямую* и *обратную* задачи; даже в конечномерной постановке среди нелинейных дифференциальных уравнений лишь для немногих удается получить точное аналитическое решение первой задачи — построение интегральной кривой системы. Для обратной задачи [1] на практике подобный анализ может осложняться еще и тем, что важно определить по поведению системы не только «параметрическую модель» уравнений ее состояния [2], но и описание структуры модели в целом на *качественном* уровне, в том числе когда необходимо знать, допустима ли в этой структуре реализация такого позиционного закона управления, при котором режим функционирования будет содержать заданный пучок управляемых траекторий. На эти (и близкие) вопросы отвечает качественная теория нелинейной дифференциальной реализации динамических систем.

В настоящее время теория дифференциальной реализации/идентификации нелинейных моделей представляет собой довольно активную область теоретико-системных исследований [3–7]. В данном контексте авторы продолжают изыскания [4–6]. Их основная цель — исследовать проблему существования специальных оператор-функций инвариантного полилинейного регулятора нестационарной гиперболической системы; впрочем, ее результаты распространимы и на стационарные случаи [1; 6]. Инвариантность регулятора предполагает, что моделируемая гиперболическая система должна содержать в классе допустимых решений фиксированное конечное семейство нелинейных динамических пучков-процессов, при этом каждый пучок неограничен по мощности (конечный/счетный/континуальный) и индуцирован своим (индивидуальным) полилинейным регулятором.

1 Постановка задачи

Далее $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$, $(Z_i,\|\cdot\|_Z)$, $i=1,\ldots,n$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (предгильбертовость [8] определяют нормы $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_Z$), $U:=Y\times Z_1\times\ldots\times Z_n$ — гильбертово пространство-произведение с нормой

$$\|(\mathrm{y},\mathrm{z}_1,\ldots,\mathrm{z}_n)\|_U := (\|\mathrm{y}\|_Y^2 + \sum_{i=1,\ldots,n}\|\mathrm{z}_i\|_Z^2)^{1/2},$$

$L(Y,X)$ — банахово пространство с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(Y,X)}$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства Y в X (аналогично ($L(X,X)$, $\|\cdot\|_{L(X,X)}$) и ($L(Z_i,X)$, $\|\cdot\|_{L(Z,X)}$)), X^i — i-я декартова степень пространства X, $\mathrm{L}(X^i,Z_i)$ — пространство всех непрерывных i-линейных (полилинейных) отображений из X в Z_i.

Пусть $T:=[t_0,t_1]$ — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и ρ_μ — σ-алгебра всех μ-измеримых подмножеств из T. Если ниже $(\mathbf{B},\|\cdot\|)$ — некоторое банахово пространство, то через $L_p(T,\mu,\mathrm{B})$, $p\in[1,\infty)$ будем обозначать банахово фактор-пространство классов μ-эквивалентности всех интегрируемых по Бохнеру [8] отображений $f:T\to\mathrm{B}$ с нормой $(\int_T\|f(\tau)\|^p\,\mu(d\tau))^{1/p}$, через $L_\infty(T,\mu,\mathrm{B})$ — пространство всех (эквивалентных классов) μ-измеримых и μ-существенно ограниченных функций из T в $\mathbf{B}$. Кроме того, далее $AC^1(T,X)$ — множество всех функций $\varphi:T\to X$, первая производная которых является абсолютно непрерывной на T функцией (относительно меры μ), сверх того, для упрощения примем обозначение

$$\mathbf{\Pi} := AC^1(T,X)\times \mathrm{L}_2(T,\mu,Y)\times \mathrm{L}_2(T,\mu,Z_1)\times\ldots\times \mathrm{L}_2(T,\mu,Z_n).$$

Введем вспомогательные конструкции, связанные с системой обозначений. Через

$$H_2 := \mathrm{L}_2(T,\mu,Y)\times \mathrm{L}_2(T,\mu,Z_1)\times\ldots\times \mathrm{L}_2(T,\mu,Z_n)$$

обозначим пространство-произведение с топологией, индуцированной нормой

$$\|(w_0,\ldots,w_n)\|_H := (\int_T\|(w_0(\tau),\ldots,w_n(\tau))\|_U^2\,\mu(d\tau))^{1/2},\quad (w_0,\ldots,w_n)\in H_2,$$

ясно, что H_2 — гильбертово пространство (в силу [8] конструкции нормы $\|\cdot\|_H$).

Далее, рассмотрим банахово пространство-произведение

$$\mathrm{L}_2 := \mathrm{L}_2(T,\mu,L(Y,X))\times \mathrm{L}_2(T,\mu,L(Z_1,X))\times\ldots\times \mathrm{L}_2(T,\mu,L(Z_n,X))$$

классов μ-эквивалентности упорядоченных систем оператор-функций с нормой

$$\|(B_0,\ldots,B_n)\|_{\mathrm{L}} := (\int_T\|B_0(\tau)\|_{L(Y,X)}^2 + \sum_{i=1,\ldots,n}\|B_i(\tau)\|_{L(Z,X)}^2)\,\mu(d\tau))^{1/2}.$$

Пусть заданы оператор-функции $A_0, A_1 \in \mathrm{L}_1(T, \mu, L(X, X))$, $A_2 \in \mathrm{L}_\infty(T, \mu, L(X, X))$, при этом μ-почти всюду в T оператор $A_0(t),\ t \in T$ самосопряженный и строго положительно определенный, а также фиксированы натуральное число n, i-линейные отображения $\mathrm{B}_i \in \mathsf{L}(X^i, Z_i),\ i = 1, \ldots, n$ и

$$N_1 \subset \{(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in \mathbf{\Pi}\},\ \mathrm{Card}\, N_1 \le \exp\aleph_0,$$

$$N_2 \subset \{(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in \mathbf{\Pi}\},\ \mathrm{Card}\, N_2 \le \exp\aleph_0, \tag{1}$$

два варианта поведения исследуемой системы с траекториями x, программным управлением u и позиционными обратными связями (формами) $\mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)$, при этом $N_1 \cap N_2 = \varnothing$; здесь и далее $\aleph_0$ — алеф нуль, $\exp\aleph_0$ — континуум, $\mathrm{Card}\, N_j$ — мощность множества (пучка) N_j. Ясно, что

$\mathsf{B}_i(x, \ldots, x) \in L_\infty(T, \mu, Z_i),\ i = 1, \ldots, n,\ (x, u, \mathsf{B}_1(x), \ldots, \mathsf{B}_n(x, \ldots, x)) \in N_j$, $j = 1,2$.

Условимся далее отличать в обозначениях вектор-функцию $(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in \mathbf{\Pi}$ как класс эквивалентности $(\mathrm{mod}\,\mu)$ от конкретного представителя из этого класса — «индивидуальной» вектор-функции $t \mapsto (x(t), u(t), \mathrm{B}_1(x(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x(t), \ldots, x(t)))$.

Далее предполагаем, что в действительности управляемые динамические пучки N_1, N_2 — суть решения *одной* гиперболической системы с *разными* полилинейными регуляторами:

$$\exists (B_{01}, \ldots, B_{n1}) \in \mathrm{L}_2 : \forall (x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in N_1,$$
$$A_2 d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x = B_{01}u + \sum_{i=1,\ldots,n} B_{i1}\mathrm{B}_i(x, \ldots, x),$$

$$\exists (B_{02}, \ldots, B_{n2}) \in \mathrm{L}_2 : \forall (x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in N_2, \tag{2}$$
$$A_2 d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x = B_{02}u + \sum_{i=1,\ldots,n} B_{i2}\mathrm{B}_i(x, \ldots, x),$$

$$(B_{01}, \ldots, B_{n1}) \ne (B_{02}, \ldots, B_{n2}).$$

Рассмотрим задачу: определить (в терминах траекторий объединенного пучка $N_1 \cup N_2$) аналитические условия существования упорядоченной системы оператор-функций $(B_0^+, \ldots, B_n^+) \in \mathrm{L}_2$, для которой осуществима дифференциальная реализация динамического пучка $N_+ := N_1 \cup N_2$ вида

$$A_2 d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x = B_0^+ u + \sum_{i=1,\dots,n} B_i^+ \mathrm{B}_i(x,\dots,x), \tag{3}$$

$(x, u, \mathrm{B}_1(x), \dots, \mathrm{B}_n(x,\dots,x)) \in N_+$.

Постановку обратной задачи (3) можно трактовать как синтез общего (для динамических пучков N_1, N_2) векторного поля [9]; данная постановка приводит к некоторому количеству теоретических схем, правильно объясняющих физическую действительность, попутно вырабатывая новую математическую интуицию в апостериорном моделировании гиперболических систем [1; 10–12].

Замечание 1. Отметим, что нет структурных препятствий, чтобы распространить полученные ниже результаты на качественную теорию реализации нестационарного инвариантного регулятора гиперболической системы (3), включающего в свой состав полилинейные операторы — программно-позиционные связи из $\mathsf{L}(X^i \times Y, Z_i)$, и содержащие в качестве дополнительных переменных k раз ($k \le i$) производную dx/dt и 1 раз программное управление u; ясно, что в данной постановке имеет место $\mathrm{B}(x,\dots,dx/dt,\dots,u) \in \mathrm{L}_2(T,\mu,Z_i)$ для любого отображения $\mathrm{B} \in \mathsf{L}(X^i \times Y, Z_i)$. При этом если для дифференциальной реализации (3) ставить задачу разрешимости реализации полилинейных форм из $\mathsf{L}(X^i \times Y, Z_i)$, $i = 1,\dots,n$, то основой математического аппарата может служить конструкция тензорного произведения [9, с. 237] гильбертовых пространств, так как его структура сводит изучение полилинейных отображений к изучению линейных отображений путем введения новой операции на категории линейных пространств.

2 Вспомогательный математический формализм

Обозначим через $\mathrm{L}(T,\mu,R)$ пространство классов μ-эквивалентности всех вещественных μ-измеримых на T функций и пусть $\le_{\mathrm{L}}$ — квазиупорядочение в $\mathrm{L}(T,\mu,R)$, такое, что $\phi_1 \le_{\mathrm{L}} \phi_2$, если $\phi_1(t) \le \phi_2(t)$ μ-почти всюду в T. Наименьшую верхнюю грань для подмножества $W \subset \mathrm{L}(T,\mu,R)$ обозначим через $\sup_{\mathrm{L}} W$, если эта грань существует для подмножества W в структуре частичного упорядочения $\le_{\mathrm{L}}$.

Определение 1 [4]. *Рассмотрим оператор* $\Psi : \mathbf{\Pi} \to \mathrm{L}(T,\mu,R)$, *построенный согласно правилу*

$$\Psi(q,w_0,\dots,w_n)(t) := \begin{cases} \| A_2(t)d^2q(t)/dt^2 + A_1(t)\,dq(t)/dt + \\ + A_0(t)q(t)\,\|_X\,(\|w_0(t)\|_Y^2 + \sum_1^n \|w_i(t)\|_Z^2)^{-1/2}, \\ \text{если } (w_0(t),\dots,w_n(t)) \neq 0 \in U; \\ \ 0 \in R, \quad \text{если } (w_0(t),\dots,w_n(t)) = 0 \in U; \end{cases} \tag{4}$$

следуя терминологии [12; 13], *оператор* (4) *будем называть оператором Релея — Ритца*.

В конструкции оператора Ψ корректно включение $d^2q/dt^2 \in \mathrm{L}_1(T,\mu,X)$.

Пусть $N \subset \{(x,u,\mathrm{B}_1(x),\dots,\mathrm{B}_n(x,\dots,x)) \in \mathbf{\Pi}\}$, $\mathrm{Card}\,N \le \infty$ и Q — некоторое (т. е. любое) поглощающее множество в линейной оболочке $\mathrm{Span}\,N$; в геометрии поглощающего множества следуем [8], т. е. $\cup\{\alpha Q\}_{\alpha>0} = \mathrm{Span}\,N$. Фиксируя терминологию (мотивации см. в теореме 2 [4]), будем говорить, что пучок управляемых динамических процессов N регулярный для тройки оператор-функций (A_0, A_1, A_2) гиперболической системы (3) в том и только в том случае, если имеет место следующее положение:

$$\{t \in T : \| A_2(t)d^2q(t)/dt^2 + A_1(t)\,dq(t)/dt + A_0(t)q(t)\,\|_X = 0\} \supset$$
$$\supset \{t \in T : \| w_0(t)\|_Y + \textstyle\sum_{i=1,\dots,n} \|w_i(t)\|_Z = 0\}\ (\mathrm{mod}\,\mu),\ (q,w_0,\dots,w_n) \in Q.$$

Замечание 2

(i) Если при анализе динамического пучка N обнаруживается

$\cup_{i=1,\dots,n} \mathrm{supp}\| \mathrm{B}_i(x,\dots,x)\|_Z = \mathrm{supp}\| x\|_X\ (\mathrm{mod}\,\mu)$,

$(x,u,\mathrm{B}_1(x),\dots,\mathrm{B}_n(x,\dots,x)) \in N$,

то пучок N будет регулярным для любой тройки оператор-функций $(A_0,A_1,A_2) \in \mathrm{L}_1(T,\mu,L(X,X)) \times \mathrm{L}_1(T,\mu,L(X,X)) \times \mathrm{L}_\infty(T,\mu,L(X,X))$;

(ii) в силу теоремы 2 [4] и представления (2) N_1, N_2 из (1) суть регулярные динамические пучки.

Приведем необременительные исходные положения, уточняющие позицию (i) замечания 2.

Лемма 1 (модификация леммы 1 [6]). *Если* $\ker \mathrm{B}_1 = 0$, *то динамический пучок* N *будет регулярным для любых оператор-функций* $A_0, A_1 \in \mathrm{L}_1(T,\mu,L(X,X))$, $A_2 \in \mathrm{L}_\infty(T,\mu,L(X,X))$.

Следствие 1. *Если* $(x,u,\mathrm{B}_1(x),\dots,\mathrm{B}_n(x,\dots,x)) \in \mathbf{\Pi}$ *и* $\ker \mathrm{B}_1 = 0$, *то* $\rho_\nu \subset \rho_{\nu_-}$, *где* ρ_ν, ρ_{ν_-} — *соответствующие лебеговски пополненные* σ*-алгебры следующих бихевиористических мер*:

$$\nu(S) := \int_S (\|u(\tau)\|_Y^2 + \sum_{i=1,\ldots,n} \|\mathrm{B}_i(x(\tau),\ldots,x(\tau))\|_Z^2)\,\mu(d\tau),$$

$$\nu\_(S) := \int_S \left\| A_2(\tau) d^2x(\tau)/d\tau^2 + A_1(\tau)dx(\tau)/d\tau + A_0(\tau)x(\tau)\right\|_X \ \mu(d\tau),$$

если $S \in \rho_\mu$. *При этом если* $\mathrm{Im}\,\mathrm{B}_1 = Z_1$, *то*

$$\frac{\| A_2 d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x\|_X}{(\|u\|_Y^2 + \sum_{i=1,\ldots,n} \|\mathrm{B}_i(x,\ldots,x)\|_Z^2)^{-1/2}} \in \mathrm{L}_2(T,\mu,R) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\| A_2 d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x\|_X}{(\|u\|_Y^2 + \|x\|_X^2 + \sum_{i=2,\ldots,n} \|\mathrm{B}_i(x,\ldots,x)\|_Z^2)^{-1/2}} \in \mathrm{L}_2(T,\mu,R),$$

для любых оператор-функций $A_0, A_1 \in \mathrm{L}_1(T,\mu,L(X,X))$, $A_2 \in \mathrm{L}_\infty(T,\mu,L(X,X))$.

Из функциональной конструкции (4) следует, что оператор Релея — Ритца удовлетворяет простым (но важным) соотношениям:

$$0 \le_{\mathrm{L}} \Psi(\phi),\ \Psi(\beta\phi) = \Psi(\phi), \text{где } 0 \in \mathrm{L}(T,\mu,R),\ \phi \in \Pi, 0 \ne \beta \in R. \qquad (5)$$

Теперь, прежде чем идти дальше, введем дополнительную терминологию.

Определение 2 [13]. *Оператор Релея — Ритца назовем полуаддитивным с весом* $\alpha \in R$ *на множестве* $E \subset \Pi$, *если для любой пары* $(\phi_1, \phi_2) \in E \times E$ *справедливо*

$$\Psi(\phi_1 + \phi_2) \le_{\mathrm{L}} \alpha\Psi(\phi_1) + \alpha\Psi(\phi_2).$$

Лемма 2. *Полуаддитивность (с фиксированным весом) оператора Релея — Ритца есть свойство конечного характера для подмножеств множества* Π.

Взаимоотношение между леммой 2 и леммой Тьюки (аналог леммы Цорна [8]) приводит к важной геометрической характеристике полуаддитивности оператора Релея — Ритца, а именно: в Π существуют максимальные множества, на которых оператор (4) полуаддитивен с некоторым весом $\alpha > 0$, при этом данные множества не могут быть *линейными* в случае $\alpha \in (0, 1)$; чтобы убедиться, достаточно рассмотреть действие Ψ на паре $(\varphi, 0) \in E \times E$, $\varphi \ne 0$, за исключением тривиального варианта $E = \{0\} \subset \Pi$, именно поэтому ниже в лемме 3 (и по умолчанию дальше) предполагается, что вес полуаддитивности оператора Ψ — некоторая фиксированная постоянная $\alpha \in [1, \infty)$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha \in [1, \infty)$, *тогда в* Π *существует (не единственное) максимальное относительно теоретико-множественного включения линейное множество* E, *на котором функциональный оператор Релея — Ритца полуаддитивен с весом* α.

Теперь задействуем конструкцию *непрерывности* оператора Релея — Ритца [14]. Для этого на линейном пространстве $\mathrm{L}(T,\mu,R)$ будем рассматривать векторную топологию, порождаемую сходимостью по мере μ. Хорошо известно [8], что эта топология порождается квазинормой вида

$$\rho(f_1,f_2):=\int\limits_T (1+|f_1(\tau)-f_2(\tau)|)^{-1}\,|f_1(\tau)-f_2(\tau)|\mu(d\tau);$$

в данном контексте $(\mathrm{L}(T,\mu,R),\rho)$ — полное квазинормированное [8] пространство.

В дальнейшем для любой функции $f\in\mathrm{L}(T,\mu,R)$ через $\operatorname{supp} f:=\{t\in T: f(t)\neq 0\}$ будем обозначать ее носитель, определяемый с точностью до множества меры нуль.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{\Pi}^*$ *— конечномерное подпространство в* $\mathbf{\Pi}$, *и пусть* $(\mathbf{\Pi}^*,\rho^*)$ *— метрическое пространство с метрикой*

$$\rho^*((g,w_0,\dots,w_n),(\hat g,\hat w_0,\dots,\hat w_n)):=\rho(\|g\|_X,\|\hat g\|_X)+$$
$$+\rho(\|(w_0,\dots,w_n)\|_U,\|(\hat w_0,\dots,\hat w_n)\|_U)+\rho^\mu((w_0,\dots,w_n),(\hat w_0,\dots,\hat w_n)),$$
$$\rho^\mu((w_0,\dots,w_n),(\hat w_0,\dots,\hat w_n)):=$$
$$:=2^{-1}\,\mu(\operatorname{supp}\|(\hat w_0,\dots,\hat w_n)\|_U\,\Delta\operatorname{supp}\|(\hat w_0,\dots,\hat w_n)\|_U),$$
$$(g,w_0,\dots,w_n),(\hat g,\hat w_0,\dots,\hat w_n)\in AC^1(T,X)\times\mathrm{L}_2^{n+1}(T,\mu,Y).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *метрика* ρ^* *не является квазинормой, при этом порождаемая* ρ^* *топология не будет векторной (операции векторного пространства* $\mathbf{\Pi}^*$ *не являются непрерывными в данной топологии)*;

(ii) *оператор Релея — Ритца* $\Psi:(\mathbf{\Pi}^*,\rho^*)\to(\mathrm{L}(T,\mu,R),\rho)$ *является непрерывным*.

Следствие 2. (i) *Метрическое пространство* $(\mathbf{\Pi}^*,\rho^*)$ *полное, при этом класс фундаментальных последовательностей из* $(\mathbf{\Pi}^*,\rho^*)$ *содержится (строго) в классе последовательностей Коши пространства* $(\mathbf{\Pi}^*,\mathrm{T})$, *где* T *— топология, индуцированная в* $\mathbf{\Pi}^*$ *из пространства* $\mathrm{L}_2(T,\mu,X)\times H_2$;

(ii) *метрика* ρ^* *будет квазинормой, а топология* T^*, *порождаемая* ρ^*, *векторной, если*

$$\forall g\in\mathbf{\Pi}^*\setminus\{\chi_\varnothing h\}:\operatorname{supp}\|g\|_U:=T\,(\operatorname{mod}\mu),$$

где $h\in U,\ \|h\|_U:=1$, *при этом* $\mathrm{T}^*=\mathrm{T}$, *а* $\Psi[\mathbf{\Pi}^*]$ *—* ρ*-квазинормированный компакт*.

3 Реализация полилинейного регулятора в конструкциях оператора Релея — Ритца

Теорема 2 [6] показывает, что следующая теорема может стать основой качественного анализа разрешимости (на нелинейных траекторных пучках) задачи реализации полилинейных регуляторов дифференциальных систем высших порядков, по существу развивая качественную геометрическую теорию векторных полей [9, с. 275] на траекторных многообразиях в бесконечномерной постановке.

Теорема 2. *Если выполнены условия пункта* (ii) *следствия 2, то справедливо утверждение*

$$\exists \sup_{\mathrm{L}} \Psi[\mathbf{\Pi}^*] \Leftrightarrow \rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \sup_{\mathrm{L}} W_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

где $W_n = \cup\{V_i : i = 1,\dots,n\}$, $\{V_p\}_{p=1,2,\dots}$ *— счетное семейство конечных* p^{-1}*-сетей в* $\Psi[\mathbf{\Pi}^*]$.

Замечание 3. Пусть $W_n = \{\xi_1,\dots,\xi_k\}$, тогда $\sup_{\mathrm{L}} W_n = \xi_1 \vee \dots \vee \xi_k$, где

$$\xi' \vee \xi'' := 2^{-1}(\xi' + \xi'' + |\xi' - \xi''|).$$

Доказательство теоремы 2. (Установление $\ldots \Rightarrow \ldots$). Ясно, что множество $W_\infty := \cup\{V_i : i = 1,2,\dots\}$ всюду плотно в $\Psi[\mathbf{\Pi}^*]$, причем, очевидно (в силу исходного условия для $\ldots \Rightarrow \ldots$ и предложения 1 [8, с. 507]), существует $\sup_{\mathrm{L}} W_\infty \in \mathrm{L}(T,\mu,R)$. Таким образом, достаточно показать, что

$$\rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \sup_{\mathrm{L}} W_m) \le \rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \sup_{\mathrm{L}} W_\infty) + \rho(\sup_{\mathrm{L}} W_m, \sup_{\mathrm{L}} W_\infty) \to 0$$

при $n,m \to 0$.

Рассуждаем от противного: пусть в $\{W_n\}_{n=1,2,\dots}$ найдется счетное подсемейство $\{W_k\}_{k\in\mathcal{K}}$, для которого $\forall k \in \mathcal{K} : \rho(\sup_{\mathrm{L}} W_k, \sup_{\mathrm{L}} W_\infty) \le \mathrm{const} = d_+$. Тогда, поскольку имеется монотонная цепь

$$\sup_{\mathrm{L}} W_1 \le_{\mathrm{L}} \sup_{\mathrm{L}} W_2 \le_{\mathrm{L}} \dots \le_{\mathrm{L}} \sup_{\mathrm{L}} W_n \le_{\mathrm{L}} \sup_{\mathrm{L}} W_{n+1} \le_{\mathrm{L}} \dots \le_{\mathrm{L}} \sup_{\mathrm{L}} W_\infty,$$

монотонность данной цепи влечет $\rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \chi_\varnothing) \le \rho(\sup_{\mathrm{L}} W_{n+1}, \chi_\varnothing)$, откуда приходим к

$$\exists d \in (0, d_+] : \rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \sup_{\mathrm{L}} W_\infty) \xrightarrow[n\to\infty]{} d,$$

что противоречит следующему равенству:

$$t \mapsto \sup\{\sup_{\mathrm{L}} W_i(t) : i = 1,2,\dots\} = \sup_{\mathrm{L}} W_\infty;$$

данное равенство означает поточечную сходимость $\{\sup_{\mathrm{L}} W_n\}$ к $\sup_{\mathrm{L}} W_\infty$, а значит, и сходимость по мере μ, что, в свою очередь, равносильно сходимости $\rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \sup_{\mathrm{L}} W_\infty) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Установление $\ldots \Leftarrow \ldots$). Доказательство прозрачно в силу положения

$$\chi_\varnothing \le_{\mathrm{L}} f \ \forall f \in \{\sup_{\mathrm{L}} W_n\} \subset \mathrm{L}(T, \mu, R)$$

и предложения 2 [8, с. 508]. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $N_1, N_2 \subset \mathbf{\Pi}$ *— пучки динамических процессов* (1), (2)*. Тогда задача* (3) *разрешима, если оператор Релея — Ритца полуаддитивен с некоторым весом на* $\mathrm{Span}\, N_1 + \mathrm{Span}\, N_2$.

Следствие 3. *Пусть множества* $N_1, N_2, \ldots, N_k \subset \mathbf{\Pi}$ *имеют реализации* (2)*. Тогда* $\cup N_i$ *— семейство решений системы* (3) *для некоторой упорядоченной системы* $(B_0^+, \ldots, B_n^+) \in \mathbf{L}_2$, *если* Ψ *полуаддитивен с весом на линейном многообразии суммы линейных оболочек этих множеств*

$$\mathbf{\Pi}^\# := \mathrm{Span}\, N_1 + \ldots + \mathrm{Span}\, N_k .$$

При этом если $\dim \mathbf{\Pi}^\# < \infty$ *и*

$$\forall g \in \mathbf{\Pi}^\# \setminus \{\chi_\varnothing h\} : \mathrm{supp} \| g \|_U := T \,(\mathrm{mod}\, \mu),$$

где $h \in U$, $\| h \|_U := 1$, *то образ* $\Psi[\mathbf{\Pi}^\#]$ *—* ρ*-квазинормированный компакт в* $\mathrm{L}_2(T, \mu, R)$, *причем*

$$\sup_{\mathrm{L}} \Psi[\mathbf{\Pi}^\#] = \lim_\rho \{\xi_p : p = 1, 2, \ldots\} \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R),$$

где $\xi_p := \xi_1 \vee \ldots \vee \xi_{m(p)}$, $\{\xi_1, \ldots, \xi_{m(p)}\}$ *— некоторая (т. е. любая) конечная* p^{-1}*-сеть в* $\Psi[\mathbf{\Pi}^\#]$, $\lim_\rho$ *— предел в топологии, индуцированной квазинормой* ρ.

Следствие 3 позволяет строить алгебру множеств динамических процессов с единицей $\cup N_i$, все элементы которой обладают реализацией с фиксированной моделью (3), при этом вопрос об «индивидуальном» характеристическом признаке дифференциальной реализации (т. е. условие (2)) для каждого отдельного динамического пучка $N_i \, (i = 1, \ldots, k)$ особенно просто (конструктивно) решается на k-семействе «одноэлементных» пучков:

$$N_i = \{(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x))_i\},$$

$$\Psi\,((x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x))_i) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R), \ i = 1, \ldots, k,$$

что есть аналитический факт теоремы 1 [4].

Если данные соотношения (или некоторые из них) не выполняются, то можно ставить задачу синтеза позиционных обратных связей (форм) $\mathrm{B}_i \in \mathsf{L}(X^i, Z_i), \ \ i = 1, \ldots, n$, обеспечивающих означенные условия (2), при этом методологически эту задачу можно трактовать как структурную идентификацию нелинейной компоненты уравнения (3); в данном контексте см. положения работы [15].

Заключение

Конструкция функционального оператора Релея — Ритца и ее многочисленные модификации сыграли значительную роль в становлении современной дифференциальной реализации как самостоятельной, вполне оригинальной математической теории, которая выделяется не только своей внутренней цельностью и простотой, но и новыми приложениями в нелинейных обратных задачах математической физики. С ее помощью были получены яркие результаты, при этом технический уровень исследований и их интенсивность значительно выросли. Надо отметить, что это не сопровождалось ростом разобщенности данных теоретических изысканий и потерей естественности в математических постановках их сложных теоретико-прикладных задач, напротив, глубокий результат из одной области качественных исследований влиял, как правило, на другие разделы.

В настоящей работе продолжено изучение тополого-метрических свойств нелинейного оператора Релея — Ритца. Изложение велось в свете современных представлений о геометрии бесконечномерных векторных полей. На этой базе исследованы качественные вопросы существования решения обратной задачи нелинейного бесконечномерного системного анализа в области разрешимости операторной реализации инвариантного полилинейного регулятора нестационарной гиперболической системы, содержащей в качестве допустимых решений заданные неограниченные по мощности (конечные/счетные/континуальные) нелинейные пучки бесконечномерных управляемых (программно-позиционно) динамических процессов в сепарабельном гильбертовом пространстве.

В перспективе дальнейшего развития подобных исследований отметим, что общий случай, когда семейство моделируемых пучков лежит в равномерно выпуклом банаховом пространстве [8] и мощность семейства пучков $\geq \aleph_0$, значительно сложнее. В качестве подзадачи данная постановка содержит теорию дополняемых подпространств банахова пространства (в том числе сепарабельного равномерно выпуклого), которая еще недостаточно разработана. При этом необходимо учесть, что в данном контексте не продуктивно изначальное допущение, что *любое* замкнутое подпространство исследуемого банахова пространства дополняемо, поскольку тогда это пространство, по существу, будет изоморфно некоторому *гильбертову* пространству (теорема 2.0 [16]).

Литература

1. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 458 с.

2. Kaiser E., Kutz J. N., Brunton S. L. Sparse Identification of Nonlinear Dynamics for Model Predictive Control in the Low-data Limit [Электронный ресурс]. URL: https://arxiv.org/abs/1711.05501v2 (дата обращения: 10.09.2019).

3. Chen Y. A New One-Parameter Inhomogeneous Differential Realization of the spl(2,1) Superalgebra // Intern. Journal of Theoretical Physics. 2012. Vol. 51, № 12. P. 3763–3768. DOI: 10.1007/s10773-012-1261-0.

4. On Solvability of the Identification-Inverse Problem for Operator-Functions of a Nonlinear Regulator of a Nonstationary Hyperbolic System / V. A. Rusanov [et al.] // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2015. Vol. 16, № 2. P. 71–84. DOI: 10.17654/DE016020071.

5. Data-Driven Discovery of Partial Differential Equations / S. H. Rudy [et al.] // Science Advances. 2017. Vol. 3, № 4. P. 1–6. DOI: 10.1126/sciadv.1602614.

6. Higher-Order Differential Realization of Polylinear-Controlled Dynamic Processes in a Hilbert Space / V. A. Rusanov [et al.] // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2018. Vol. 19, № 3. P. 263–274. DOI: 10.17654/DE019030263.

7. System-Theoretical Foundation for Identification of Dynamic Systems. I / V. A. Rusanov [et al.] // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 106, № 1. P. 1–42. DOI: 10.17654/MS106010001.

8. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

9. Новиков С. П., Тайманов И. А. Современные геометрические структуры и поля. М.: Изд-во МЦНМО, 2014. 584 с.

10. Ahmed N. U. Optimization and Identification of Systems Governed by Evolution Equations on Banach Space. N.Y.: John Wiley and Sons, 1988. 187 p.

11. Данеев А. В., Русанов В. А., Русанов М. В. От реализации Калмана — Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. 2005. № 6. С. 137–157.

12. К апостериорному моделированию нестационарных гиперболических систем / А. В. Данеев [и др.] // Известия Самарского научного центра РАН. 2018. Т. 20, № 1. С. 106–113. DOI: 10.24411/1990-5378-2018-00003.

13. Русанов В. А., Данеев А. В., Линке Ю. Э. К геометрическим основам дифференциальной реализации динамических процессов в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. 2017. Т. 53, № 4. С. 71–83. DOI: 10.1007/s10559-017-9957-z .

14. Лакеев А. В., Линке Ю. Э., Русанов В. А. Об одном критерии непрерывности оператора Релея — Ритца // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2018. № 3. С. 3–13. DOI: 10.18101/2304-5728-2018-3-3-13.

15. Русанов В. А., Шарпинский Д. Ю. К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 1. С. 119–132.

16. Кадец М. И., Митягин Б. С. Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // Успехи математических наук. 1973. Т. 28, № 6. С. 77–94.

ON REALIZATION OF MULTIPLE-LINEAR REGULATOR OF NON-STATIONARY HYPERBOLIC SYSTEM

Anatoliy V. Lakeyev
Dr. Sci. (Phys. and Math.),
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS
134 Lermontova St., Irkutsk 664033, Russia
E-mail: lakeyev@icc.ru

Yuriy E. Linke
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Irkutsk National Research Technical University
83 Lermontova St., Irkutsk 664074, Russia
E-mail: linkeyurij@gmail.com

Vyacheslav A. Rusanov
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Senior Researcher,
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS
134 Lermontova St., Irkutsk 664033, Russia
E-mail: v.rusanov@mail.ru

The article studies some qualitative issues of the existing a solution to inverse problem of nonlinear infinite-dimensional system analysis, regarding the solvability of the operator realization of invariant multiple-linear regulator of non-stationary hyperbolic system. The studied statement for precision mathematical modeling considers the case, when for two different beams (finite, countable, or even continuous) of nonlinear controlled dynamic processes of the “trajectory, program control” type, induced in a real separable Hilbert space by some given non-stationary hyperbolic system, but with different multiple-linear regulators, we obtain sufficient conditions for solvability of the problem of realizing operator functions of a general (invariant) multiple-linear regulator, in which presence in equation structure of a given hyperbolic system the union of these dynamic beams represent a fixed family of its admissible solutions. The study was carried out in the light of modern ideas about the geometry of infinite-dimensional vector fields and based on a qualitative study of the semi-additivity of non-linear Rayleigh-Ritz functional operator.
Keywords: qualitative theory of nonlinear differential realization; non-stationary hyperbolic system; Rayleigh-Ritz functional operator; multiple-linear regulator.

References

1. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-posed Problems]. Novsibirsk: Siberian Scientific Publishing Department, 2009. 458 p.

2. Kaiser E., Kutz J. N., Brunton S. L. *Sparse Identification of Nonlinear Dynamics for Model Predictive Control in the Low-data Limit.* Available at: https://arxiv.org/abs/1711.05501v2 (accessed 10.09.2019).

3. Chen Y. A New One-Parameter Inhomogeneous Differential Realization of the spl (2,1) Superalgebra. *International Journal of Theoretical Physics.* 2012. V. 51. No. 12. Pp. 3763–3768. DOI: 10.1007/s10773-012-1261-0.

4. Rusanov V. A., Daneev A. V., Lakeyev A. V., Linke Yu. E. On Solvability of the Identification-Inverse Problem for Operator-Functions of a Nonlinear Regulator of a Nonstationary Hyperbolic System. *Advances in Differential Equations and Control Processes.* 2015. V. 16. No. 2. Pp. 71–84. DOI: 10.17654/DE016020071.

5. Rudy S. H., Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N. Data-Driven Discovery of Partial Differential Equations. *Science Advances.* 2017. V. 3. No. 4. Pp. 1–6. DOI: 10.1126/sciadv.1602614.

6. Rusanov V. A., Daneev A. V., Lakeyev A. V., Sizykh V. N. Higher-Order Differential Realization of Polylinear-Controlled Dynamic Processes in a Hilbert Space. *Advances in Differential Equations and Control Processes.* 2018. V. 19. No. 3. Pp. 263–274. DOI: 10.17654/DE019030263.

7. Rusanov V. A., Daneev A. V., Linke Yu. E., Sizykh V. N., Voronov V. A. System-Theoretical Foundation for Identification of Dynamic Systems. I. *Far East Journal of Mathematical Sciences.* 2018. V. 106. No. 1. Pp. 1–42. DOI: 10.17654/MS106010001.

8. Yosida K. *Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1980.

9. Novikov S. P., Taimanov I. A. *Sovremennye geometricheskie struktury i polya* [Modern Geometric Structures and Fields]. Moscow, 2014. 624 p.

10. Ahmed N. U. *Optimization and Identification of Systems Governed by Evolution Equations on Banach Space.* New York: John Wiley and Sons, 1988. 187 p.

11. Daneev A. V., Rusanov V. A., Rusanov M. V. Ot realizatsii Kalmana-Mesarovicha k lineinoi modeli normalno-giperbolicheskogo tipa [From Kalman–Mesarovic Realization to a Normal-Hyperbolic Linear Model]. *Cybernetics and Systems Analysis,* 2005. No. 6. Pp. 137–157.

12. Daneev A. V., Rusanov V. A., Rusanov M. V., Sizyh V. N. K aposteriornomu modelirovaniyu nestatsionarnykh giperbolicheskikh sistem [On a Posteriori Modeling of Nonstationary Hyperbolic Systems]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN.* 2018. V. 20. No. 1. Pp. 106–113. DOI: 10.24411/1990-5378-2018-00003.

13. Rusanov V. A., Daneev A. V., Linke Yu. E. K geometricheskim osnovam differentsialnoi realizatsii dinamicheskikh processov v gilbertovom prostranstve [On Geometrical Basis for Differential Realization of Dynamic Processes in a Hilbert Space]. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. V. 53. No. 4. Pp. 71–83. DOI: 10.1007/s10559-017-9957-z.

14. Lakeyev A. V., Linke Yu. E., Rusanov V. A. Ob odnom kriterii nepreryvnosti operatora Releya-Rittsa [On a Criterion of the Continuity of Relay-Ritz Operator]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i informatika.* 2018. V. 3. Pp. 3–13. DOI: 10.18101/2304-5728-2018-3-3-13.

15. Rusanov V. A., Sharpinskii D. Yu. K teorii strukturnoi identifikatsii nelineinykh mnogomernykh sistem [Towards a Theory of Structural Identification of Nonlinear Multidimensional Systems]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2010. V. 74. V. 1. Pp. 119–132.

16. Kadets M. I., Mityagin B. S. Dopolnyaemye podprostranstva v banakhovykh prostranstvakh [Complementary Subspaces in Banach Spaces]. *Russian Mathematical Surveys.* 1973. V. 28. No. 6. Pp. 77–94.