УДК 517.95
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-3-17-31

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ГИРОТРОПНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ НАМАГНИЧИВАНИИ

© Ширапов Дашадондок Шагдарович
доктор физико-математических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: shir48@mail.ru

© Итигилов Гарма Борисович
кандидат технических наук, доцент,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
E-mail: gablz@mail.ru

© Юмов Игорь Бимбаевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: igyumov@mail.ru

© Анахин Владимир Дмитриевич
доктор технических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: anakhin@mail.ru

© Дамбаев Жаргал Гомбоевич
доктор технических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: g.dambaev@rambler.ru

Поставлена и решена задача Дирихле для уравнений Гельмгольца электромагнитных волн, распространяющихся в эллиптическом цилиндре, заполненном продольно намагниченным ферритом, который описывается тензором второго ранга. Предполагается, что цилиндр имеет бесконечно проводящую стенку. Для решения краевой задачи уравнений Гельмгольца для продольных компонент электромагнитных волн применяется метод укорочения исходного дифференциального уравнения и метод разделения переменных. Решение указанной краевой задачи в эллиптических координатах связано с использованием четных и нечетных обыкновенных и модифицированных функций Матье 1-го рода. Используя полученные результаты, определены все компоненты электромагнитных волн для четных и нечетных решений. Применив условие Дирихле к компонентам электромагнитных волн и решив систему линейных

однородных алгебраических уравнений, получены дисперсионные уравнения электромагнитных волн, которые имеют важное практическое значение и позволяют проводить исследования распространения гибридных волн в данной области.
Ключевые слова: эллиптический цилиндр; феррит; задача Дирихле; уравнение Гельмгольца; электромагнитная волна; продольное намагничивание; гиротропная область; поперечные компоненты электромагнитного поля; функции Матье; дисперсионное уравнение.

Для цитирования:
Ширапов Д. Ш., Итигилов Г. Б., Юмов И. Б., Анахин В. Д., Дамбаев Ж. Г. Задача Дирихле для уравнений Гельмгольца в гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 3. С. 17–31.

Введение

Вопросам распространения электромагнитных волн в магнитоактивных средах начали уделять пристальное внимание во второй половине XX в. в связи с дальнейшим развитием радиотехники и совершенствованием технологии получения ферритов, когда стало возможным изготовление невзаимных устройств в области сверхвысоких частот. Большой вклад в развитие теории распространения электромагнитных волн в ферритовых средах внесли такие видные ученые, как Г. Сул, Л. Уокер [1], Б. Лакс, К. Баттон [2], в чьих работах определение векторов электромагнитного поля осуществляется прямым решением системы уравнений Максвелла в строгом виде. В этих и других работах, как правило, не рассматриваются эллиптические волноводы с ферритовым заполнением или рассматривается изотропный случай [3]. Поэтому является актуальным анализ распространения электромагнитных волн в эллиптических волноводах с ферритовым заполнением.

Рассматривается продольно намагниченный эллиптический цилиндр с бесконечно проводящей стенкой. Область цилиндра заполнена ферритом, диэлектрическая проницаемость ε которого изотропна, а тензор магнитной проницаемости определяется выражением

$$\begin{pmatrix} \mu & jk & 0 \\ -jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix},$$

где j — мнимое число, $\mu = \mu_0 - \mu_0 \dfrac{\omega_0 \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, $\omega_0 = \mu_0 Y H_0$ — частота ферромагнитного резонанса, $Y = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг — гиромагнитное отношение, H_0 — напряженность постоянного магнитного поля, $\omega_m = \mu_0 Y M_0$, M_0 — намагниченность насыщения феррита, $k = \mu_0 \dfrac{\omega\omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2}$, ω — циклическая частота, $\mu_\| \approx \mu_0$.

Для исследования распространения электромагнитных волн (ЭМВ) в этой области необходимо знать в эллиптической системе координат (ξ, φ, z), как поперечные компоненты электрического (E_ξ, E_φ) и магнитного (H_ξ, H_φ) полей, так и продольные компоненты E_z, H_z.

Если в [4] были получены поперечные компоненты электромагнитного поля для данной области

$$\begin{cases} E_\xi = -\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi} + \dfrac{\omega\mu}{\gamma}\dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \dfrac{j\omega^2\varepsilon k}{a^2}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\dfrac{\partial H_z}{\partial\xi}\right)_z\right], \\ E_\varphi = -\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi} - \dfrac{\omega\mu}{\gamma}\dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial\xi} + \dfrac{j\omega^2\varepsilon k}{a^2}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi} + \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\dfrac{\partial H_z}{\partial\varphi}\right)_z\right], \\ H_\xi = \dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial H_z}{\partial\xi} + \dfrac{j\omega^2\varepsilon k}{a^2}\left(\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi} + \dfrac{\partial H_z}{\partial\varphi}\right)_z\right], \\ H_\varphi = -\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\dfrac{1}{ed}\left[\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\xi} + \dfrac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \dfrac{j\omega^2\varepsilon k}{a^2}\left(\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial H_z}{\partial\xi}\right)_z\right], \end{cases} \qquad (1)$$

то продольные компоненты E_z электрического поля и H_z магнитного поля неизвестны. Здесь γ — постоянная распространения,
$g_+^2 = \omega^2\varepsilon\mu + \omega^2\varepsilon k - \gamma^2$, $g_-^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \omega^2\varepsilon k - \gamma^2$,
$d = \sqrt{ch^2\xi - \cos^2\varphi} = \sqrt{0{,}5(ch2\xi - \cos 2\varphi)}$ — геометрический параметр,
$a^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \gamma^2$, e — фокусное расстояние эллипса, $c^2 = \omega^2\mu_\perp\varepsilon - \gamma^2$.

В статье ставится задача определения продольных компонент электромагнитного поля.

1 Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца

Для решения поставленной задачи необходимо решить следующую задачу Дирихле для уравнений Гельмгольца *EH*-обыкновенной и *HE*-необыкновенной волн [5]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial\phi^2} + e^2 d^2\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2\right)E_Z - je^2 d^2\gamma\omega\mu_\|\dfrac{k}{\mu}H_Z = 0, \\ \dfrac{\partial^2 H_Z}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 H_Z}{\partial\phi^2} + e^2 d^2\left(\omega^2\varepsilon\mu_\| - \dfrac{\mu_\|}{\mu}\gamma^2\right)H_Z + je^2 d^2\gamma\omega\varepsilon\dfrac{k}{\mu}E_Z = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\mu_\perp = \dfrac{\mu^2 - k^2}{\mu}$.

При этом условие Дирихле для электрического поля на границе бесконечно проводящей эллиптической области будет иметь вид:

$$E_Z\,|_{\xi=\xi_0} = E_\varphi\,|_{\xi=\xi_0} = 0\,. \tag{3}$$

Отметим, что система дифференциальных уравнений (2) описывает распространение гибридных ЭМВ, возникающих из-за гиротропности области распространения [1; 2; 6].

Для решения системы (2) преобразуем ее, применяя метод укорочения исходного дифференциального уравнения [1; 7]. Для этого умножим второе уравнение (2) на $j\Lambda$ и сложим с первым

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\left(E_Z + j\Lambda H_Z\right)}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\left(E_Z + j\Lambda H_Z\right)}{\partial\varphi^2} + e^2d^2\left(\omega^2\varepsilon\mu_\parallel - \frac{\mu_\parallel}{\mu}\gamma^2\right)j\Lambda H_Z + \\ + e^2d^2\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2\right)E_Z - \Lambda e^2d^2\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}E_Z - je^2d^2\gamma\omega\mu_\parallel\frac{k}{\mu}H_Z = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Введем обозначение

$$E_Z + j\Lambda H_Z = \psi\,. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4) и учитывая, что $E_Z = \Psi - j\Lambda H_Z$, после компоновки относительно Ψ и E_Z, получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + e^2d^2\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\right)\Psi = \\ = \left[-\Lambda^2e^2d^2\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu} - \Lambda e^2d^2\left(\omega^2\varepsilon\mu_\parallel - \frac{\mu_\parallel}{\mu}\gamma^2 - \omega^2\varepsilon\mu_\perp + \gamma^2\right) + e^2d^2\gamma\omega\mu_\parallel\frac{k}{\mu}\right]jH_Z.\end{gathered} \tag{6}$$

В правой части (6) имеем квадратное уравнение относительно Λ

$$\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\Lambda^2 + \left(\omega^2\varepsilon\mu_\parallel - \frac{\mu_\parallel}{\mu}\gamma^2 - \omega^2\varepsilon\mu_\perp + \gamma^2\right)\Lambda - \gamma\omega\mu_\parallel\frac{k}{\mu} = 0\,. \tag{7}$$

В предположении, что $\Lambda_{1,2}$ являются корнями уравнения (7), формула (6) принимает вид:

$$\frac{\partial^2\Psi_{1,2}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Psi_{1,2}}{\partial\varphi^2} + e^2d^2\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda_{1,2}\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\right)\Psi_{1,2} = 0. \tag{8}$$

Подставляя корни Λ_1 и Λ_2 в (8), получим два его решения Ψ_1 и Ψ_2. Тогда из (5) будем иметь:

$$\begin{cases} E_Z + j\Lambda_1H_Z = \Psi_1; \\ E_Z + j\Lambda_2H_Z = \Psi_2. \end{cases} \tag{9}$$

Из (9) получим:

$$E_Z = \frac{\Psi_1\Lambda_2 - \Psi_2\Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1}, \tag{10}$$

$$H_Z = j\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1}. \tag{11}$$

При известных Ψ_1 и Ψ_2 уравнение (6) может быть записано

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial\varphi^2} + e^2d^2\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\dfrac{k}{\mu}\right)\Psi_1 = 0, \\ \dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial\varphi^2} + e^2d^2\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda_2\gamma\omega\varepsilon\dfrac{k}{\mu}\right)\Psi_2 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Уравнения Гельмгольца (12) после подстановки

$$d^2 = \frac{1}{2}(ch2\xi - \cos 2\varphi)$$

примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial\varphi^2} + \dfrac{e^2}{2}(ch2\xi - \cos 2\varphi)\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\dfrac{k}{\mu}\right)\Psi_1 = 0, \\ \dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{e^2}{2}(ch2\xi - \cos 2\varphi)\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda_2\gamma\omega\varepsilon\dfrac{k}{\mu}\right)\Psi_2 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Далее уравнения (13) решаются методом разделения переменных [8]. Решения будем искать в виде

$$\Psi_1 = \Psi_{\xi1}\Psi_{\varphi1},\ \Psi_2 = \Psi_{\xi2}\Psi_{\varphi2}, \tag{14}$$

где $\Psi_{\xi1}$ и $\Psi_{\xi2}$ — функции, зависящие только от ξ, а $\Psi_{\varphi1}$ и $\Psi_{\varphi2}$ — только от φ.

Подставив (14) в уравнения (13) и разделив первое уравнение (13) на $\Psi_{\xi1}\Psi_{\varphi1}$, а второе — на $\Psi_{\xi2}\Psi_{\varphi2}$, получим:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{1}{\Psi_{\xi1}}\dfrac{\partial^2\Psi_{\xi1}}{\partial\xi^2} + \dfrac{e^2}{2}ch2\xi\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\dfrac{k}{\mu}\right)\right] + \\ \qquad + \left[\dfrac{1}{\Psi_{\varphi1}}\dfrac{\partial^2\Psi_{\varphi1}}{\partial\varphi^2} - \dfrac{e^2}{2}\cos 2\varphi\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\dfrac{k}{\mu}\right)\right] = 0, \\ \left[\dfrac{1}{\Psi_{\xi2}}\dfrac{\partial^2\Psi_{\xi2}}{\partial\xi^2} + \dfrac{e^2}{2}ch2\xi\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\dfrac{k}{\mu}\right)\right] + \\ \qquad + \left[\dfrac{1}{\Psi_{\varphi2}}\dfrac{\partial^2\Psi_{\varphi2}}{\partial\varphi^2} - \dfrac{e^2}{2}\cos 2\varphi\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp - \gamma^2 - \Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\dfrac{k}{\mu}\right)\right] = 0. \end{cases} \tag{15}$$

В (15) выражения в первых квадратных скобках зависят только от ξ, а во вторых квадратных скобках — только от φ.

Уравнения системы (15) могут выполняться только в том случае, если выражения в квадратных скобках в каждом из уравнений по отдельности будут равны одной постоянной величине, но с разными знаками, т. е.

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\Psi_{\xi 1}}\frac{\partial^2\Psi_{\xi 1}}{\partial\xi^2}+\frac{e^2}{2}ch2\xi\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp-\gamma^2-\Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\right)\right]=b, \\ \left[\frac{1}{\Psi_{\varphi 1}}\frac{\partial^2\Psi_{\varphi 1}}{\partial\varphi^2}-\frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp-\gamma^2-\Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\right)\right]=-b. \end{cases} \tag{16}$$

и

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\Psi_{\xi 2}}\frac{\partial^2\Psi_{\xi 2}}{\partial\xi^2}+\frac{e^2}{2}ch2\xi\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp-\gamma^2-\Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\right)\right]=s, \\ \left[\frac{1}{\Psi_{\varphi 2}}\frac{\partial^2\Psi_{\varphi 2}}{\partial\varphi^2}-\frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\left(\omega^2\varepsilon\mu_\perp-\gamma^2-\Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\right)\right]=-s. \end{cases} \tag{17}$$

Умножив первую формулу в (16) на $\Psi_{\xi 1}$, вторую — на $\Psi_{\varphi 1}$, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Psi_{\xi 1}}{\partial\xi^2}-\left(b-2q_1ch2\xi\right)\Psi_{\xi 1}=0, \\ \frac{\partial^2\Psi_{\varphi 1}}{\partial\varphi^2}+\left(b-2q_1\cos 2\varphi\right)\Psi_{\varphi 1}=0, \end{cases} \tag{18}$$

где

$$q_1=\frac{e^2\left(k_\perp^2-\gamma^2-\Lambda_1\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\right)}{4} \tag{19}$$

и $k_\perp^2=\omega^2\varepsilon\mu_\perp$, $\Psi_{\xi 1}=E_{Z\xi}+j\Lambda_1H_{Z\xi}$, $\Psi_{\varphi 1}=E_{Z\varphi}+j\Lambda_1H_{Z\varphi}$.

Умножив первую формулу в (17) на $\Psi_{\xi 2}$, а вторую — на $\Psi_{\varphi 2}$, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Psi_{\xi 2}}{\partial\xi^2}-\left(s-2q_2ch2\xi\right)\Psi_{\xi 2}=0, \\ \frac{\partial^2\Psi_{\varphi 2}}{\partial\varphi^2}+\left(s-2q_2\cos 2\varphi\right)\Psi_{\varphi 2}=0, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$q_2 = \frac{e^2\left(k_\perp^2 - \gamma^2 - \Lambda_2 \gamma\omega\varepsilon \dfrac{k}{\mu}\right)}{4} \tag{21}$$

и $\Psi_{\xi 2} = E_{Z\xi} + j\Lambda_2 H_{Z\xi}$, $\Psi_{\varphi 2} = E_{Z\varphi} + j\Lambda_2 H_{Z\varphi}$.

В системах (18), (20) вторые уравнения являются обыкновенными уравнениями Матье, а первые — модифицированными уравнениями Матье [3; 9]

$$\Lambda_1 = \frac{\mu}{\gamma\omega\varepsilon k}(k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2}),\ \Lambda_2 = \frac{\mu}{\gamma\omega\varepsilon k}(k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2}). \tag{22}$$

Далее, представляя решения (18) и (20) в виде $\Psi = \Psi_\xi \Psi_\varphi$ согласно [3; 9], получим частные решения $\Psi_\varphi = ce_m(\varphi, q_{1,2})$ или $se_m(\varphi, q_{1,2})$ с постоянным множителем, а для $\Psi_\xi = Ce_m(\xi, q_{1,2})$ или $Se_m(\xi, q_{1,2})$. Здесь $ce_m(\varphi, q_{1,2})$ и $se_m(\varphi, q_{1,2})$ — четная и нечетная, соответственно, периодические обыкновенные функции Матье целого порядка m с действительными b (или s) и q .

Тогда, учитывая принцип суперпозиции, получим общие решения (18), (20) [3; 9]

$$\begin{aligned}\Psi_{1,2} = \Psi_{\xi 1,2}\Psi_{\varphi 1,2} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m1,2} Ce_m(\xi, q_{1,2}) ce_m(\varphi, q_{1,2}) \cos(\omega t - \gamma z) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} S_{m1,2} Se_m(\xi, q_{1,2}) se_m(\varphi, q_{1,2}) \cos(\omega t - \gamma z),\end{aligned} \tag{23}$$

где $C_{m1,2}$, $S_{m1,2}$ — произвольные постоянные.

Для любого m имеется два типа решений (четные и нечетные) [3; 9; 10]

$$\begin{cases} {}_C\Psi_{1,2} = {}_C\Psi_{\xi 1,2}\,{}_C\Psi_{\varphi 1,2} = C_{m1,2} Ce_m(\xi, q_{1,2}) ce_m(\varphi, q_{1,2}), \\ {}_S\Psi_{1,2} = {}_S\Psi_{\xi 1,2}\,{}_S\Psi_{\varphi 1,2} = S_{m1,2} Se_m(\xi, q_{1,2}) se_m(\varphi, q_{1,2}), \end{cases} \tag{24}$$

где ${}_C\Psi_{1,2}$ — четные решения, а ${}_S\Psi_{1,2}$ — нечетные.

В связи с тем, что в эллиптической области волны делятся на четные и нечетные, то (10) и (11) после объединения примут вид:

$$\begin{cases} {}_C E_Z = \dfrac{{}_C\Psi_1 \Lambda_2 - {}_C\Psi_2 \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1},\ {}_S E_Z = \dfrac{{}_S\Psi_1 \Lambda_2 - {}_S\Psi_2 \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1}, \\ {}_C H_Z = j\dfrac{{}_C\Psi_1 - {}_C\Psi_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1},\ {}_S H_Z = j\dfrac{{}_S\Psi_1 - {}_S\Psi_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1}. \end{cases} \tag{25}$$

Выражения (25) с учетом (24) примут вид:

$$\begin{cases} {}_CE_Z = \dfrac{1}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left({}_C\Psi_1\Lambda_2 - {}_C\Psi_2\Lambda_1\right) = \dfrac{1}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left({}_C\Psi_{\xi 1}{}_C\Psi_{\varphi 1}\Lambda_2 - {}_C\Psi_{\xi 2}{}_C\Psi_{\varphi 2}\Lambda_1\right) = \\ \quad = \dfrac{1}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left[\Lambda_2 C_{m1}Ce_m(\xi,q_1)ce_m(\varphi,q_1) - \Lambda_1 C_{m2}Ce_m(\xi,q_2)ce_m(\varphi,q_2)\right], \\ {}_SE_Z = \dfrac{1}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left({}_S\Psi_1\Lambda_2 - {}_S\Psi_2\Lambda_1\right) = \dfrac{1}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left({}_S\Psi_{\xi 1}{}_S\Psi_{\varphi 1}\Lambda_2 - {}_S\Psi_{\xi 2}{}_S\Psi_{\varphi 2}\Lambda_1\right) = \\ \quad = \dfrac{1}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left[\Lambda_2 S_{m1}Se_m(\xi,q_1)se_m(\varphi,q_1) - \Lambda_1 S_{m2}Se_m(\xi,q_2)se_m(\varphi,q_2)\right], \\ {}_CH_Z = \dfrac{j}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left({}_C\Psi_1 - {}_C\Psi_2\right) = \dfrac{j}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left({}_C\Psi_{\xi 1}{}_C\Psi_{\varphi 1} - {}_C\Psi_{\xi 2}{}_C\Psi_{\varphi 2}\right) = \\ \quad = \dfrac{j}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left[C_{m1}Ce_m(\xi,q_1)ce_m(\varphi,q_1) - C_{m2}Ce_m(\xi,q_2)ce_m(\varphi,q_2)\right], \\ {}_SH_Z = \dfrac{j}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left({}_S\Psi_1 - {}_S\Psi_2\right) = \dfrac{j}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left({}_S\Psi_{\xi 1 C}\Psi_{\varphi 1} - {}_S\Psi_{\xi 2 C}\Psi_{\varphi 2}\right) = \\ \quad = \dfrac{j}{\Lambda_2-\Lambda_1}\left[S_{m1}Se_m(\xi,q_1)se_m(\varphi,q_1) - S_{m2}Se_m(\xi,q_2)se_m(\varphi,q_2)\right]. \end{cases} \tag{26}$$

Выражения (26), определяющие продольные компоненты электромагнитного поля, являются общим решением дифференциальных уравнений (2).

Подставив (26) в (1) и добавив продольные компоненты, получим выражения для всех шести составляющих (четных) гибридных волн

$$\begin{aligned} {}_CE_\xi &= \frac{1}{g_+^2 g_-^2 ed\left(\Lambda_2-\Lambda_1\right)}\times \\ &\times\Big[jC_{m1}Ce_m'(\xi,q_1)ce_m(\phi,q_1)\left\{\gamma^2\omega k - \gamma a^2\Lambda_2\right\} - \\ &- jC_{m2}Ce_m'(\xi,q_2)ce_m(\phi,q_2)\left\{\gamma^2\omega k - \gamma a^2\Lambda_1\right\} + \\ &+ C_{m1}Ce_m(\xi,q_1)ce_m'(\phi,q_1)\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2\varepsilon k\Lambda_2\right\} - \\ &- C_{m2}Ce_m(\xi,q_2)ce_m'(\phi,q_2)\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2\varepsilon k\Lambda_1\right\}\Big], \end{aligned} \tag{27_1}$$

$$\begin{aligned} {}_CE_\phi &= \frac{1}{g_+^2 g_-^2 ed\left(\Lambda_2-\Lambda_1\right)}\Big[jC_{m1}Ce_m(\xi,q_1)ce_m'(\phi,q_1)\left\{\gamma^2\omega k - \gamma a^2\Lambda_2\right\} - \\ &- jC_{m2}Ce_m(\xi,q_2)ce_m'(\phi,q_2)\left\{\gamma^2\omega k - \gamma a^2\Lambda_1\right\} - \\ &- C_{m1}Ce_m'(\xi,q_1)ce_m(\phi,q_1)\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2\varepsilon k\Lambda_2\right\} + \\ &+ C_{m2}Ce_m'(\xi,q_2)ce_m(\phi,q_2)\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2\varepsilon k\Lambda_1\right\}\Big], \end{aligned} \tag{27_2}$$

$$ {}_C E_Z = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1}\left[\Lambda_2 C_{m1} Ce_m(\xi, q_1) ce_m(\phi, q_1) - \Lambda_1 C_{m2} Ce_m(\xi, q_2) ce_m(\phi, q_2)\right], \quad (27_3) $$

$$ \begin{aligned} {}_C H_\xi = \frac{1}{g_+^2 g_-^2 ed(\Lambda_2 - \Lambda_1)} \Big[& jC_{m1} Ce_m(\xi, q_1) ce_m'(\varphi, q_1)\{\omega\varepsilon a^2 \Lambda_2 - \gamma\omega^2 \varepsilon k\} - \\ & - jC_{m2} Ce_m(\xi, q_2) ce_m'(\phi, q_2)\{\omega\varepsilon a^2 \Lambda_1 - \gamma\omega^2 \varepsilon k\} + \\ & + C_{m1} Ce_m'(\xi, q_1) ce_m(\phi, q_1)\{\gamma a^2 - \omega^3 \varepsilon^2 k \Lambda_2\} - \\ & - C_{m2} Ce_m'(\xi, q_2) ce_m(\phi, q_2)\{\gamma a^2 - \omega^3 \varepsilon^2 k \Lambda_1\} \Big], \end{aligned} \quad (27_4) $$

$$ \begin{aligned} {}_C H_\phi = \frac{1}{g_+^2 g_-^2 ed(\Lambda_2 - \Lambda_1)} \Big[& jC_{m1} Ce_m'(\xi, q_1) ce_m(\phi, q_1)\{\gamma\omega^2 \varepsilon k - \omega\varepsilon a^2 \Lambda_2\} - \\ & - jC_{m2} Ce_m'(\xi, q_2) ce_m(\phi, q_2)\{\gamma\omega^2 \varepsilon k - \omega\varepsilon a^2 \Lambda_1\} + \\ & + C_{m1} Ce_m(\xi, q_1) ce_m'(\phi, q_1)\{\gamma a^2 - \omega^3 \varepsilon^2 k \Lambda_2\} - \\ & - C_{m2} Ce_m(\xi, q_2) ce_m'(\phi, q_2)\{\gamma a^2 - \omega^3 \varepsilon^2 k \Lambda_1\} \Big], \end{aligned} \quad (27_5) $$

$$ {}_C H_Z = \frac{j}{\Lambda_2 - \Lambda_1}\left[C_{m1} Ce_m(\xi, q_1) ce_m(\phi, q_1) - C_{m2} Ce_m(\xi, q_2) ce_m(\phi, q_2)\right]. \quad (27_6) $$

Здесь C_{m1}, C_{m2} — амплитудные коэффициенты, $ce_m(\varphi, q_{1,2})$ — обыкновенная функция Матье 1-го рода целого порядка *m*, $Ce_m(\xi, q_{1,2})$ — присоединенные (модифицированные) функции Матье 1-го рода (с целым индексом) и $ce_m'(\varphi, q_{1,2})$, $Ce'(\xi, q_{1,2})$ — производные функций Матье 1-го рода. Параметры функций Матье q_1, q_2 и корни (7) $\Lambda_{1,2}$ определяются, соответственно, по формулам (19), (21) и (22).

Выражения для нечетных волн получаются аналогично, только необходимы следующие замены

$$ C_{m1} \to S_{m1}, C_{m2} \to S_{m2}, Ce \to Se, ce \to se. $$

Для определения произвольных постоянных C_{m1}, C_{m2} в (27) используем граничные условия (3). Из (3) следует, что тангенциальные составляющие электрического поля равны нулю на стенках ($\xi = \xi_0$), ограничивающих эллиптическую область, т. е.

$$ E_Z = E_\varphi = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} {}_C E_Z = {}_C E_\varphi = 0, \\ {}_S E_Z = {}_S E_\varphi = 0. \end{cases} \quad (28) $$

Применяя условие (28) к (27) для E_Z и E_φ, получим:

$$\begin{cases} {}_C E_\phi = C_{m1}\Big[jCe_m\left(\xi_0, q_1\right) ce_m^{'}\left(\phi, q_1\right)\left\{\gamma^2 \omega k - \gamma a^2 \Lambda_2\right\} - \\ -Ce_m^{'}\left(\xi_0, q_1\right) ce_m\left(\phi, q_1\right)\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2 \varepsilon k \Lambda_2\right\}\Big] - \\ -C_{m2}\Big[jCe_m\left(\xi_0, q_2\right) ce_m^{'}\left(\phi, q_2\right)\left\{\gamma^2 \omega k - \gamma a^2 \Lambda_1\right\} - \\ -Ce_m^{'}\left(\xi_0, q_2\right) ce_m\left(\phi, q_2\right)\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2 \varepsilon k \Lambda_1\right\}\Big] = 0, \\ {}_C E_Z = C_{m1} Ce_m\left(\xi_0, q_1\right) ce_m\left(\phi, q_1\right)\Lambda_2 - C_{m2} Ce_m\left(\xi_0, q_2\right) ce_m\left(\phi, q_2\right)\Lambda_1 = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Равенства (29) являются системой линейных однородных алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов C_{m1} и C_{m2}.

Для существования нетривиальных решений системы (29) ее определитель должен равняться нулю

$$\begin{cases} Ce_m\left(\xi_0, q_2\right) ce_m\left(\phi, q_2\right)\Lambda_1\Big[jCe_m\left(\xi_0, q_1\right) ce_m^{'}\left(\phi, q_1\right)\left\{\gamma^2 \omega k - \gamma a^2 \Lambda_2\right\} - \\ \quad - Ce_m^{'}\left(\xi_0, q_1\right) ce_m\left(\phi, q_1\right)\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2 \varepsilon k \Lambda_2\right\}\Big] - Ce_m\left(\xi_0, q_1\right) ce_m\left(\phi, q_1\right)\Lambda_2 \times \\ \times\Big[jCe_m\left(\xi_0, q_2\right) ce_m^{'}\left(\phi, q_2\right)\left\{\gamma^2 \omega k - \gamma a^2 \Lambda_1\right\} - \\ -Ce_m^{'}\left(\xi_0, q_2\right) ce_m\left(\phi, q_2\right)\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2 \varepsilon k \Lambda_1\right\}\Big] = 0. \end{cases} \tag{30}$$

В (30) вынеся за скобки $Ce_m(\xi_0, q_1)$ в первом слагаемом и $Ce_m(\xi_0, q_2)$ — во втором, полученный результат разделим на $ce_m(\varphi, q_1) ce_m(\varphi, q_2)$

$$\begin{cases} -\Lambda_1 \dfrac{Ce_m^{'}(\xi_0, q_1)}{Ce_m(\xi_0, q_1)}\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2 \varepsilon k \Lambda_2\right\} + \Lambda_2 \dfrac{Ce_m^{'}(\xi_0, q_2)}{Ce_m(\xi_0, q_2)}\left\{\mu\omega c^2 - \gamma\omega^2 \varepsilon k \Lambda_1\right\} + \\ + \dfrac{jce_m^{'}(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)}\left\{\gamma^2 \omega k - \gamma a^2 \Lambda_2\right\}\Lambda_1 - \dfrac{jce_m^{'}(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)}\left\{\gamma^2 \omega k - \gamma a^2 \Lambda_1\right\}\Lambda_2 = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Вначале преобразуем первые две слагаемые величины в левой части (31)

$$-\Lambda_1 \frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_1)}{Ce_m(\xi_0,q_1)}\left\{\mu\omega c^2-\gamma\omega^2\varepsilon k\Lambda_2\right\}+\Lambda_2 \frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_2)}{Ce_m(\xi_0,q_2)}\left\{\mu\omega c^2-\gamma\omega^2\varepsilon k\Lambda_1\right\}=$$

$$=-\Lambda_1 \frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_1)}{Ce_m(\xi_0,q_1)}\left\{\mu\omega\left(k_\perp^2-\gamma^2-\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\Lambda_2\right)\right\}+ \tag{32}$$

$$+\Lambda_2 \frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_2)}{Ce_m(\xi_0,q_2)}\left\{\mu\omega\left(k_\perp^2-\gamma^2-\gamma\omega\varepsilon\frac{k}{\mu}\Lambda_1\right)\right\}$$

В (32) выражения в круглых скобках выразим через q_1 (19) и q_2 (21), а затем вместо Λ_1 и Λ_2 подставим их значения (22). Тогда получим:

$$-\Lambda_1 \frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_1)}{Ce_m(\xi_0,q_1)}\left\{\mu\omega c^2-\gamma\omega^2\varepsilon k\Lambda_2\right\}+\Lambda_2 \frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_2)}{Ce_m(\xi_0,q_2)}\left\{\mu\omega c^2-\gamma\omega^2\varepsilon k\Lambda_1\right\}=$$

$$=-\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_1}{e^2}\right)\frac{\mu^2}{\gamma\varepsilon k}\frac{4q_2}{e^2}\frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_1)}{Ce_m(\xi_0,q_1)}+ \tag{33}$$

$$+\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_2}{e^2}\right)\frac{\mu^2}{\gamma\varepsilon k}\frac{4q_1}{e^2}\frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_2)}{Ce_m(\xi_0,q_2)}.$$

Далее преобразуем третье и четвертое слагаемые выражения в (31)

$$\frac{jce_m^{'}(\phi,q_1)}{ce_m(\phi,q_1)}\left\{\gamma^2\omega k-\gamma a^2\Lambda_2\right\}\Lambda_1-\frac{jce_m^{'}(\phi,q_2)}{ce_m(\phi,q_2)}\left\{\gamma^2\omega k-\gamma a^2\Lambda_1\right\}\Lambda_2=$$

$$=\gamma a^2\Lambda_1\Lambda_2\left\{\frac{jce_m^{'}(\phi,q_2)}{ce_m(\phi,q_2)}-\frac{jce_m^{'}(\phi,q_1)}{ce_m(\phi,q_1)}\right\}+ \tag{34}$$

$$+\gamma^2\omega k\left\{\frac{jce_m^{'}(\phi,q_1)}{ce_m(\phi,q_1)}\Lambda_1-\frac{jce_m^{'}(\phi,q_2)}{ce_m(\phi,q_2)}\Lambda_2\right\}.$$

Подставив (33), (34) в (31) и умножив полученное выражение на $\dfrac{\gamma\varepsilon k}{\mu^2}$, имеем:

$$\left[-\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_1}{e^2}\right)\frac{4q_2}{e^2}\frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_1)}{Ce_m(\xi_0,q_1)}+\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_2}{e^2}\right)\frac{4q_1}{e^2}\frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_2)}{Ce_m(\xi_0,q_2)}\right]+$$

$$+j\left[\frac{\gamma^2\varepsilon k a^2\Lambda_1\Lambda_2}{\mu^2}\left\{\frac{ce_m^{'}(\phi,q_2)}{ce_m(\phi,q_2)}-\frac{ce_m^{'}(\phi,q_1)}{ce_m(\phi,q_1)}\right\}+\right. \tag{35}$$

$$\left.+\frac{\gamma^3\omega\varepsilon k}{\mu^2}\left\{\frac{ce_m^{'}(\phi,q_1)}{ce_m(\phi,q_1)}\Lambda_1-\frac{ce_m^{'}(\phi,q_2)}{ce_m(\phi,q_2)}\Lambda_2\right\}\right]=0.$$

Подставляя в (35) Λ_1 и Λ_2 из (22), получим

$$\left[-\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_1}{e^2}\right)\frac{4q_2}{e^2}\frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_1)}{Ce_m(\xi_0,q_1)}+\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_2}{e^2}\right)\frac{4q_1}{e^2}\frac{Ce_m^{'}(\xi_0,q_2)}{Ce_m(\xi_0,q_2)}\right]+$$
$$+j\left[\frac{a^2}{\omega^2\varepsilon k}\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_1}{e^2}\right)\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_2}{e^2}\right)\left\{\frac{ce_m^{'}(\phi,q_2)}{ce_m(\phi,q_2)}-\frac{ce_m^{'}(\phi,q_1)}{ce_m(\phi,q_1)}\right\}+\right. \tag{36}$$
$$\left.+\frac{\gamma^2}{\mu}\left\{\frac{ce_m^{'}(\phi,q_1)}{ce_m(\phi,q_1)}\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_1}{e^2}\right)-\frac{ce_m^{'}(\phi,q_2)}{ce_m(\phi,q_2)}\left(k_\perp^2-\gamma^2-\frac{4q_2}{e^2}\right)\right\}\right]=0.$$

Формула (36) представляет собой дисперсионное уравнение четных волн, полученное в результате решения задачи Дирихле (2), (3). Отметим, что (36) имеет вид, аналогичный полученному для кругового гиротропного цилиндра [6].

Чтобы получить дисперсионное уравнение для нечетных волн, в (36) надо сделать замены

$$\begin{cases} Ce(\xi_0,q_{1,2})\to Se(\xi_0,q_{1,2}), Ce^{'}(\xi_0,q_{1,2})\to Se^{'}(\xi_0,q_{1,2}); \\ ce(\varphi,q_{1,2})\to se(\varphi,q_{1,2}), ce^{'}(\varphi,q_{1,2})\to se^{'}(\varphi,q_{1,2}), \end{cases}$$

где $Se(\xi_0,q_{1,2})$ и $Se^{'}(\xi_0,q_{1,2})$ — нечетные присоединенные (модифицированные) функции Матье1-го рода (с целым индексом) и их производные, $se(\varphi,q_{1,2})$ и $se^{'}(\varphi,q_{1,2})$ — нечетные обыкновенные функции Матье 1-го рода целого порядка m и их производные.

Заключение

Решение задачи Дирихле для уравнений Гельмгольца в гиротропном волноводе в строгой постановке приводит к большим затруднениям из-за громоздких выражений для компонент электромагнитного поля. В то же время в работе [11] для круглого продольно намагниченного ферритового волновода показано, что решения краевых задач методом укорочения исходного дифференциального уравнения полностью совпадают с решениями задачи в строгой постановке и образуют полные решения краевых задач для ферритовых волноводов.

В данной работе впервые осуществлена адаптация метода укорочения исходного дифференциального уравнения для случая эллиптического волновода с ферритовым заполнением при продольном намагничивании. Полученные результаты позволяют исследовать различные характеристики распространения ЭМВ в эллиптическом гиротропном волноводе при продольном намагничивании и поставить задачу идентификации параметров намагничивающего магнитного поля и управляемых переменных, характеризующих «свойства заполняющей пространство ферритовой среды», в заданном классе функций. В частности, провести исследование зависимости постоянной распространения ЭМВ от свойств заполняющей волновод ферритовой среды и параметров намагничивающего магнитного поля.

Основные выводы таковы:

1. Поставлена и решена задача Дирихле для уравнений Гельмгольца с целью нахождения компонент электромагнитного поля в гиротропном эллиптическом цилиндре с продольным намагничиванием.
2. На основе решения задачи Дирихле получены дисперсионные уравнения ЭМВ, позволяющие проводить исследования распространения гибридных в эллиптическом гиротропном волноводе, такие как установление зависимости постоянной распространения ЭМВ от свойств заполняющей волновод ферритовой среды и параметров намагничивающего магнитного поля.

Литература

1. Сул Г., Уокер Л. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах: пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. 192 с.
2. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики: пер. с англ. М.: Мир, 1965. 676 с.
3. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложение функций Матье / пер. с англ. В. А. Братановского. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 475 с.
4. Итигилов Г. Б., Ширапов Д. Ш. Метод инвариантных преобразований для определения поперечных компонент электромагнитного поля в гиротропных ограниченных областях // Вестник Бурятского государственного университета. 2012. Вып. 9: Математика, информатика. С. 162–166.
5. Ширапов Д. Ш., Итигилов Г. Б. Обобщенные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов произвольной формы поперечного сечения // Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн: материалы II Всерос. науч. конф. (г. Муром, 26–28 июня 2018 г.). Муром, 2018. С. 209–219.
6. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. Л.: Госэнергоиздат, 1963. 664 с.
7. Назаров А. В., Раевский С. Б. Электромагнитные волны в структурах, содержащих продольно намагниченные ферритовые слои // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2007. Т. 10, № 1. С. 76–82.
8. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1982. 336 с.
9. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967. 780 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические аморфные функции. Функции Ламэ и Матье / пер. с англ. Н. Я. Виленкина. М.: Наука, 1967. 300 с.
11. Назаров А. В., Новоселова Н. А., Раевский С. Б. О полноте системы решений краевых задач для ферритовых волноводов, полученных методом укорочения дифференциального уравнения // Антенны. М.: Радиотехника, 2016. Т. 7(227). С. 63–66.

DIRICHLET PROBLEM FOR HELMHOLTZ EQUATIONS IN GYROTROPIC ELLIPTICAL REGION WITH LONGITUDINAL MAGNETIZATION

Dashadondok Sh. Shirapov
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: shir48@mail.ru

Garma B. Itigilov
Cand. Sci. (Engineering), A/Prof.,
East-Siberian State University of Technology and Management
40v, bldg 1 Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia
E-mail: gablz@mail.ru

Igor B. Yumov
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: igyumov@mail.ru

Vladimir D. Anakhin
Dr. Sci. (Engineering), Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: anakhin@mail.ru

Zhargal G. Dambaev
Dr. Sci. (Engineering), Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: g.dambaev@rambler.ru

We have formulated and solved the Dirichlet problem for Helmholtz equations of electromagnetic waves, propagating in an elliptical cylinder filled with longitudinally magnetized ferrite which is described by a second-rank tensor. It is assumed that the cylinder has an infinitely conductive wall. To solve the boundary value problem of Helmholtz equations for longitudinal components of electromagnetic waves, we have used the method of shortening the initial differential equation and the method of variables separation. The solution of the above boundary value problem in elliptic coordinates is associated with the use of even and odd ordinary and modified Mathieu functions of the first kind. Using the results obtained, we have determined all the components of electromagnetic waves for even and odd solutions. Applying the Dirichlet condition to the components of electromagnetic waves and solving the system of linear homogeneous algebraic equations, we have obtained dispersion equations. The found dispersion equations of electromagnetic waves are of great practical importance and allow studying the propagation of hybrid waves in this region.

Keywords: elliptical cylinder; ferrite; Dirichlet problem; Helmholtz equation; electromagnetic wave; longitudinal magnetization; gyrotropic region; transverse components of the electromagnetic field; Mathieu functions; dispersion equation.

References

1. Suhl H. and Walker L. *Waveguide Propagation of Electromagnetic Waves in Gyrotropic Media* (Russ. transl.). Moscow: Inostrannya literatura, 1955.

2. Lax B., Button K. J. *Microwave Ferrites and Ferrimagnetics.* New York: Mac-Graw-Hill, 1962. 752 p.

3. McLachlan N. W. *Theory and Application of Mathieu Functions.* London: Oxford University Press, 1947.

4. Itigilov G. B., Shirapov D. Sh. Metod invariantnykh preobrazovanii dlya opredeleniya poperechnykh komponent elektromagnitnogo polya v girotropnykh ogranichennykh oblastyakh [Method of Invariant Transformations for Determining the Transverse Components of Electromagnetic Field in Gyrotropic Bounded Areas]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika.* 2012. V. 9. Pp.162–166.

5. Shirapov D. Sh., Itigilov G. B. Obobshchennye uravneniya Gelmgoltsa girotropnykh volnovodov proizvolnoi formy poperechnogo secheniya [Generalized Helmholtz Equations of Gyrotropic Waveguides with Arbitrary Cross-Section]. *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya, radiolokatsii, rasprostraneniya i difraktsii voln.* Proc. 2nd All-Russ. conf. (June 26–28, 2018). Pp. 209–219.

6. Mikaelyan A. L. *Teoriya i primenenie ferritov na sverkhvysokikh chastotakh* [Theory and Application of Ferrites at Microwave Frequencies]. Leningrad: Gosenergoizdat Publ., 1963. 664 p.

7. Nazarov A. V., Raevskii S. B. Elektromagnitnye volny v strukturakh, soderzhashchikh prodolno namagnichennye ferritovye sloi [Electromagnetic Waves in Structures Containing Longitudinally Magnetized Ferrite Layers]. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy.* 2007. V. 10. No. 1. Pp. 76–82.

8. Bitsadze A. V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. 2nd rev. ed. Moscow: Nauka Publ., 1982. 336 p.

9. Ango A. *Matematika dlya elektro- i radioinzhenerov* [Mathematics for Electrical and Radio Engineers]. Moscow: Nauka Publ., 1967. 780 p.

10. Bateman H., Erdélyi A. *Higher Transcendental Functions.* New York: McGraw-Hill, 1953–1955.

11. Nazarov A. V. Novoselova N. A., Raevskii S. B. O polnote sistemy reshenii kraevykh zadach dlya ferritovykh volnovodov, poluchennykh metodom ukorocheniya differentsialnogo uravneniya [On Completeness of the System of Boundary Value Problems Solutions for Ferrite Waveguides Obtained by the Method of Differential Equation Shortening]. *Telecommunications and Radio Engineering.* 2016. V. 7 (227). Pp. 63–66.