УДК 519.624.2
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-3-32-41

О ВЫБОРЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

© Ботороева Мария Николаевна
старший преподаватель,
Иркутский государственный университет, Педагогический институт
Россия, 664011, г. Иркутск, ул. Нижняя Набережная, 6

научный сотрудник,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: masha888888@mail.ru

© Будникова Ольга Сергеевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Иркутский государственный университет, Педагогический институт
Россия, 664011, г. Иркутск, ул. Нижняя Набережная, 6
E-mail: osbud@mail.ru

© Соловарова Любовь Степановна
кандидат физико-математических наук,
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, а/я 292
E-mail: soleilu@mail.ru

В статье рассмотрены системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на конечном отрезке интегрирования с тождественно вырожденной квадратной матрицей перед второй производной — так называемые дифференциально-алгебраические уравнения второго порядка. Такие постановки задач достаточно часто возникают в приложениях. Отмечены сложности качественного исследования и построения численных методов решения рассматриваемых уравнений. Предполагается, что для систем, исследуемых в данной работе, заданы краевые условия, число которых меньше, чем удвоенная размерность исходной системы. Выделен класс дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка, для которого, используя известные результаты теории проекторов, предложен алгоритм выбора недостающих краевых условий. Для иллюстрации разрабатываемого авторами метода рассмотрен простой пример. В заключении статьи уделено внимание перспективам дальнейшего исследования данного алгоритма.

---

[1] Ботороева М. Н. поддержана грантом РФФИ, № 18-51-54001_Вьет_а, и Министерством образования и науки РФ, проект 1.5049.2017/БЧ; Будникова О. С. поддержана грантом РФФИ, № 18-51-54001_Вьет_а; Соловарова Л. С. поддержана грантом РФФИ, № 18-29-10019 мк.

Ключевые слова: краевая задача; краевые условия; дифференциально-алгебраические уравнения; вырожденные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка; метод матричной прогонки; начальная задача; алгебро-дифференциальные уравнения; численные методы; дифференциальные уравнения второго порядка; трехточечная аппроксимация.

Для цитирования:
Ботороева М. Н., Будникова О. С., Соловарова Л. С. О выборе краевых условий для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 3. С. 32–41.

Введение

Ряд природных и технических явлений можно описать взаимосвязанными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) первого и второго порядков и конечномерными (трансцендентными) уравнениями [8; 10; 14]. Объединяя эти уравнения в виде системы, мы получим систему ОДУ второго порядка с тождественно вырожденной матрицей перед второй производной. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) второго порядка.

В настоящее время бурно развивается качественная теория и численные методы решения ДАУ первого порядка. Это связано с тем, что такие уравнения имеют принципиальные отличия от систем ОДУ и, кроме того, имеют многочисленные приложения [8–10; 12; 14].

С ДАУ порядка выше первого, как правило, поступают следующим образом: вводят новую вектор-функцию, размерность которой равна kn (n — размерность исходной задачи, k — порядок ДАУ), и переписывают исходную задачу в виде ДАУ первого порядка [13].

Описанный подход значительно усложняет как качественное исследование, так и создание численных алгоритмов для полученной задачи. Этот факт и инициировал исследования, приведенные ниже, которые являются продолжением работ [3; 4; 7; 11].

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$A(t)x''(t)+B(t)x'(t)+C(t)x(t)=f(t),\ t\in[0,1], \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — $(n\times n)$ матрицы, $f(t)$ — заданная, а $x(t)$ — неизвестная n-мерные вектор-функции.

В дальнейшем изложении предполагается, что

$$\det A(t)\equiv 0. \tag{2}$$

Системы (1) с условием (2) будем называть дифференциально-алгебраическими уравнениями второго порядка (ДАУ2).

Предполагается, что для системы (1) заданы краевые условия

$$\begin{cases} \alpha_0 x(0) + \beta_0 x'(0) = \gamma_0 \\ \alpha_1 x(1) + \beta_1 x'(1) = \gamma_1 \end{cases}, \tag{3}$$

где α_0, β_0 — $(m_0 \times n)$-матрицы, α_1, β_1 — $(m_1 \times n)$-матрицы. В частности, начальную задачу для (1) можно переписать в виде (3) с матрицами $\alpha_0 = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_n \end{pmatrix}$, α_1 и β_1 — нулевые матрицы, а E_n — единичная матрица, 0 — нулевая матрица размерности $(n \times n)$.

В отличие от ОДУ второго порядка для выделения единственного решения ДАУ2 начальные или краевые условия можно не задавать.

Например, ДАУ2 вида

$$\begin{pmatrix} a_1(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} b_1(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0,1] \tag{4}$$

при достаточно гладких функциях $a_1(t), b_1(t), \varphi(t)$ имеет единственное решение: $x_1(t) = \varphi(t), \ x_2(t) = -a_1(t)\varphi''(t) - b_1(t)\varphi'(t)$.

Краевые условия (3) должны также быть заданы корректно, т. е. быть согласованными с правой частью (1).

Приведем критерий корректности задания краевых условий (3). Нам понадобится известное определение.

Определение 1. (см, например, [2; 5]). Матрица A^- называется полуобратной к матрице A, если она удовлетворяет матричному уравнению $AA^-A = A$.

Из этого определения следует, что

$$VA = (E - AA^-)A = 0. \tag{5}$$

Умножаем систему (1) на матрицу V в точках $t = 0$ и $t = 1$.

В силу (5) получим:

$$\begin{cases} V(0)C(0)x(0) + V(0)B(0)x'(0) = V(0)f(0), \\ V(1)C(1)x(1) + V(1)B(1)x'(1) = V(1)f(1). \end{cases} \tag{6}$$

Вводя обозначения $y_0 = (x^T(0), x'^T(0))$, $y_1 = (x^T(1), x'^T(1))$, $V(0)C(0) = L_0$, $V(0)B(0) = M_0$, $V(0)f(0) = N_0$, $V(1)C(1) = L_1$, $V(1)B(1) = M_1$, $V(1)f(1) = N_1$, краевые условия (3) и условия (6) перепишем в виде:

$$\begin{cases} (\alpha_0 | \ \beta_0) y_0 = \gamma_0 \\ (\alpha_1 | \ \beta_1) y_1 = \gamma_1 \end{cases}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} (L_0 \ | \ M_0) y_0 = N_0 \\ (L_1 \ | \ M_1) y_1 = N_1 \end{cases}. \tag{8}$$

Здесь и всюду в дальнейшем изложении обозначение $(\alpha|\beta)$ означает расширенную матрицу. Таким образом, если задача (1), (3) имеет решение (возможно, не единственное), то множество решений системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (7) является и множеством решений СЛАУ (8). Обратное неверно.

Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$x''(t)+B(t)x'(t)+C(t)=f(t),$$

где $B(t)$ и $C(t)$ — функции. В этом случае $A^{-}=1,\ V(0)=V(1)=L_0=$ $=M_0=L_1=M_1=N_0=N_1=0,$ то есть решением системы (8) является любой вектор из R^2.

2 Методы решения краевой задачи

Опишем алгоритм численного решения краевой задачи (1), (3). Стандартным образом введем на отрезке интегрирования сетку $t_i=ih,\ i=0,1,\ldots,N,\ h=\dfrac{1}{N}$ и обозначим $A_i=A(t_i),\quad B_i=B(t_i),\quad C_i=C(t_i),$ $f_i=f(t_i),\ x_i\approx x(t_i).$

Классическая трехточечная дискретизация [1; 6] системы (1) дает

$$\mathbf{D}_i x_{i+1}+\mathbf{E}_i x_i+\mathbf{F}_i x_{i-1}=\mathbf{G}_i,\qquad i=1,2,\ldots,N-1, \tag{9}$$

где $(n\times n)$-матрицы $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{F}_i$ зависят от формулы, применяемой для аппроксимации (1).

Краевые условия (3) после двухточечной аппроксимации примут вид:

$$\begin{cases}\mathbf{D}_0 x_1+\mathbf{E}_0 x_0=\mathbf{G}_0, & (10a)\\ \mathbf{E}_N x_N+\mathbf{F}_N x_{N-1}=\mathbf{G}_N, & (10b)\end{cases}$$

где $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{E}_0$ — $(m_0\times n)$-матрицы, $\mathbf{E}_N$ и $\mathbf{F}_N$ — $(m_1\times n)$-матрицы.

Условий $(10a)$, $(10b)$ недостаточно для того, чтобы применить метод матричной прогонки для решения СЛАУ (9), $(10a)$, $(10b)$, так как эта система является недоопределенной (содержит $(m_0+m_1+n\cdot(N-2))$ уравнений, а неизвестных $n\cdot N$). Поэтому мы предлагаем поступить следующим образом. Умножим (1) на матрицу $V(t)=E-A(t)A^{-}(t)$ и вычислим полученное выражение в точках $t=0$ и $t=1$.

В силу формулы (4) имеем:

$$V(0)C(0)x(0)+V(0)B(0)x'(0)=V(0)f(0)$$

и

$$V(1)C(1)x(1)+V(1)B(1)x'(1)=V(1)f(1).$$

Аппроксимируя эти условия, например простейшей формулой численного дифференцирования, получим:

$$\begin{cases}S_0x_1+T_0x_0=H_0, & (11a)\\ S_Nx_N+T_Nx_{N-1}=H_N, & (11b)\end{cases}$$

где $S_0 = V(0)[B(0) + hC(0)]$, $T_0 = -V(0)B(0)$, $H_0 = V(0)f(0)$, $S_N = V(1)[B(1) + hC(1)]$, $T_N = -V(1)B(1)$, $H_N = V(1)f(1)$.

С краевыми условиями $(10a)$, $(10b)$ поступим следующим образом: умножим системы

$$\left(\mathbf{D}_0 \middle| \mathbf{E}_0\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_0,$$

и

$$\left(\mathbf{E}_N \middle| \mathbf{F}_N\right)\begin{pmatrix} x_N \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{G}_N$$

на матрицы $\mathbf{D}_0^T$, $\mathbf{E}_0^T$ и $\mathbf{E}_N^T$, $\mathbf{F}_N^T$ соответственно. Получим:

$$\mathbf{D}_0^T\mathbf{D}_0 x_1 + \mathbf{D}_0^T\mathbf{E}_0 x_0 = \mathbf{D}_0^T\mathbf{G}_0, \tag{12}$$

$$\mathbf{E}_0^T\mathbf{D}_0 x_1 + \mathbf{E}_0^T\mathbf{E}_0 x_0 = \mathbf{E}_0^T\mathbf{G}_0, \tag{13}$$

$$\mathbf{E}_N^T\mathbf{E}_N x_N + \mathbf{E}_N^T\mathbf{F}_N x_{N-1} = \mathbf{E}_N^T\mathbf{G}_N, \tag{14}$$

$$\mathbf{F}_N^T\mathbf{E}_N x_N + \mathbf{F}_N^T\mathbf{F}_N x_{N-1} = \mathbf{F}_N^T\mathbf{G}_N. \tag{15}$$

С краевыми условиями $(11a)$, $(11b)$ поступим аналогично: умножим системы

$$\left(S_0 \middle| T_0\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = H_0$$

и

$$\left(S_N \middle| T_N\right)\begin{pmatrix} x_N \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = H_N$$

на матрицы S_0^T, T_0^T и S_N^T, T_N^T. Получим:

$$S_0^T S_0 x_1 + S_0^T T_0 x_0 = S_0^T H_0, \tag{16}$$

$$T_0^T S_0 x_1 + T_0^T T_0 x_0 = T_0^T H_0, \tag{17}$$

$$S_N^T S_N x_N + S_N^T T_N x_{N-1} = S_N^T H_N, \tag{18}$$

$$T_N^T S_N x_N + T_N^T T_N x_{N-1} = T_N^T H_N. \tag{19}$$

Итогом суммирования уравнений (12), (13), (16), (17) и (14), (15), (18), (19) является

$$\begin{cases} K_0 x_1 + P_0 x_0 = q_0, & (20) \\ K_N x_N + P_N x_{N-1} = q_N, & (21) \end{cases}$$

где K_0, P_0, K_N и P_N — квадратные $(n \times n)$-матрицы, определенные по правилу

$$K_0 = \mathbf{D}_0^T\mathbf{D}_0 + \mathbf{E}_0^T\mathbf{D}_0 + S_0^T S_0 + T_0^T S_0,$$

$$P_0 = \mathbf{D}_0^T\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^T\mathbf{E}_0 + S_0^T T_0 + T_0^T T_0,$$

$$K_N = \mathbf{E}_N{}^T\mathbf{E}_N + \mathbf{F}_N{}^T\mathbf{E}_N + S_N{}^T S_N + T_N{}^T S_N,$$
$$P_N = \mathbf{E}_N{}^T\mathbf{F}_N + \mathbf{F}_N{}^T\mathbf{F}_N + S_N{}^T T_N + T_N{}^T T_N,$$
$$q_0 = \mathbf{D}_0{}^T\mathbf{G}_0 + \mathbf{E}_0{}^T\mathbf{G}_0 + S_0{}^T H_0 + T_0{}^T H_0,$$
$$q_N = \mathbf{E}_N{}^T\mathbf{G}_N + \mathbf{F}_N{}^T\mathbf{G}_N + S_N{}^T H_N + T_N{}^T H_N.$$

Для иллюстрации предлагаемого метода выбора недостающих краевых условий рассмотрим простой пример.

Пример 1. Система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u''(t) \\ v''(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Краевые условия имеют вид $\begin{cases} u(0) + u'(0) = 1, \\ u(1) + u'(1) = \sin 1 + \cos 1. \end{cases}$

Точное решение данной системы $u(t) = \sin t, \ \ v(t) = e^t$.

Применим описанный алгоритм поиска недостающих краевых условий. Полагая $A^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^+$ (псевдообратная матрица), имеем $V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Умножим исходную систему слева на $V(t)$ и вычислим полученное выражение в точках $t = 0$ и $t = 1$.

В силу (5) получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Из второго уравнения видно, что $\begin{cases} v(0) = 1, \\ v(1) = e. \end{cases}$

Обозначим $x(t) = (u(t), \ \ v(t))^T$ и с учетом введенных ранее обозначений система (7) примет вид:

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) y_1 = \begin{pmatrix} \sin 1 + \cos 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases},$$

а системе (8) соответствует

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Далее применим двухточечную дискретизацию для исходных и полученных краевых условий и выполним дальнейшие указания описанного алгоритма. В результате, опустив все громоздкие выкладки, получим искомые краевые условия в виде:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} h-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} h+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_N - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_{N-1} = \begin{pmatrix} h(\sin 1 + \cos 1) \\ e \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Заключение

В статье не рассматривается конкретный вид трехточечной аппроксимации (9). Отметим, что ряд известных формул численного дифференцирования нельзя применять для (1) даже с корректно заданными (согласованными с правой частью) краевыми условиями

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x(1) = x_N \end{cases} \qquad (22)$$

и в предположении, что решение задачи (1), (22) существует, единственно и достаточно гладкое. Это происходит, в частности, потому, что соотношения (9) и условия (22) дают вырожденную СЛАУ или процесс матричной прогонки является неустойчивым.

Также отметим, что предлагаемый подход не всегда дает СЛАУ (20), (21) полного ранга. Например, если применить предлагаемый подход для ДАУ (4), имеющей единственное решение, не зависящее от условий (3), и полагая $a_1(0) \neq 0,\ a_1(1) \neq 0,$ то краевые условия (19), (20) имеют вид:

$$\begin{cases} x_1(0) = \varphi(0) \\ x_1(1) = \varphi(1) \end{cases}. \qquad (23)$$

Условия (3) для данного примера не заданы, а условий (23) недостаточно, чтобы формально реализовать метод матричной прогонки для данного примера (после трехточечной аппроксимации (9)).

В дальнейшем планируется выделить классы ДАУ (1) с краевыми условиями (3), для которых предлагаемый алгоритм выбора недостающих краевых условий и подходящая трехточечная аппроксимация порождали бы устойчивый процесс матричной прогонки.

Литература

1. Бахвалов Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука, 1975. 632 с.

2. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 222 с.

3. Булатов М. В., Рахвалов Н. П., Phuong T. D. Численное решение краевой задачи для линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, № 1. С. 52–58.

4. Булатов М. В., Рахвалов Н. П., Фыонг Та Зуй. О методе матричной прогонки для одного класса дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // Известия Иркутского государственного университета. Математика. 2011. Т. 4, № 4. С. 2–11.

5. Ваарман О. Обобщенные обратные отображения. Таллинн: Валгус, 1988. 120 с.

6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.

7. Соловарова Л. С. О выборе начальных условий для дифференциально-алгебраических уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2017. № 1. С. 18–22. DOI: 10.18101/2304-5728-2017-1-18-22.

8. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: пер. с англ. М.: Мир, 1999. 685 с.

9. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. 280 с.

10. Bock H. G., Schloder J. P., Schulz V. H. Differential-algebraic equations and their connections to optimization. Heidelberg: Interdisziplinares Zentrum fur wiss. Rechnen der Univ. Heidelberg, 1996. 188 p.

11. Bulatov M. V., Lee M. G. Application of matrix polynomials to the analysis of linear differential algebraic equations of higher order // Differential Equations. 2008. V. 44. P. 1353–1360.

12. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. Zurich, Switzerland: EMS Publishing House, 2006. 192 p.

13. Mehrmann V., Shi C. Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order // Numerical Algorithms. 2006. V. 42, Issue 3–4. P. 281–307.

14. Lamour R., März R., Tischendorf C. Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Berlin: Springer, 2013. 649 p.

SAMPLING BOUNDARY CONDITIONS FOR SECOND ORDER DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Mariya N. Botoroeva
Senior Lecturer,
Irkutsk State University
6 Nizhnyaya Naberezhnaya, Irkutsk 664011, Russia

Researcher,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: masha888888@mail.ru

Olga S. Budnikova
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Irkutsk State University
6 Nizhnyaya Naberezhnaya, Irkutsk 664011, Russia
E-mail: osbud@mail.ru

Lubov S. Solovarova
Cand. Sci. (Phys. and Math.),
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS
134 Lermontova St., Irkutsk 664033, Russia
E-mail: soleilu@mail.ru

The article considers systems of second-order linear ordinary differential equations with an identically degenerated square matrix preceding the second derivative (second order differential-algebraic equations). Such problem statements often arise in applications. We have noted the difficulties in qualitative study and development of numerical methods for solving the equations under consideration. It is assumed that boundary conditions are given and their number is less than the doubled dimension of the initial system. We have defined a class of second order differential-algebraic equations, and using the known results of projection theory proposed an algorithm for sampling the missing boundary conditions. The method developed is illustrated by a simple example. At the conclusion of the article we have paid attention to the further research of this algorithm.

Keywords: boundary value problem; boundary conditions; differential-algebraic equations; ordinary second order degenerate differential equations; tridiagonal matrix algorithm; initial boundary value problem; algebraic-differential equations; numerical methods; second order differential equations; three-point approximation.

References

1. Bakhvalov N. S. *Chislennye metody (analiz, algebra, obyknovennye differentsialnye uravneniya)* [Numerical Methods (analysis, algebra, ordinary differential equations)]. Moscow: Nauka Publ., 1975. 632 p.

2. Boyarintsev Yu. E. *Regulyarnye i singulyarnye sistemy obyknovennykh differentsialnykh uravnenii* [Regular and Singular Systems of Ordinary Differential Equations]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1980. 222 p.

3. Bulatov M. V., Rakhvalov N. P., Phuong T. D. Chislennoe reshenie kraevoi zadachi dlya lineinykh differentsialno-algebraicheskikh uravnenii vtorogo poryadka [Numerical Solution of Boundary Value Problem for Linear Second Order Differential-Algebraic Equations]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 2010. V. 12. No. 1. Pp. 52–58.

4. Bulatov M. V., Rakhvalov N. P., Phuong T. D. O metode matrichnoi progonki dlya odnogo klassa differentsialno-algebraicheskikh uravnenii vtorogo poryadka [On the Tridiagonal Matrix Algorithm for One Class of Second Order Differential-Algebraic Equations]. *Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics.* 2011. V. 4. No. 4. Pp. 2–11.

5. Vaarman O. *Obobschennye obratnye otobrazheniya* [Generalized Inverse Mappings]. Tallin: Valgus Publ., 1988. 120 p.

6. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow: Nauka Publ., 1989. 616 p.

7. Solovarova L. S. O vybore nachalnykh uslovii dlya differentsialno-algebraicheskikh uravnenii [Sampling the Initial Conditions for Differential-Algebraic Equations]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika, informatika.* 2017. No. 1. Pp. 18 – 22. DOI: 10.18101/2304-5728-2017-1-18-22.

8. Hairer E. Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems.* Berlin: Springer-Verlag, 1996. 614 p.

9. Chistyakov V. F. *Algebro-differentsialnye operatory s konechnomernym yadrom* [Differential-Algebraic Operators with a Finite-Dimensional Kernel]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1996. 280 p.

10. Bock H. G., Schloder J. P., Schulz V. H. *Differential-Algebraic Equations and Their Connections to Optimization.* Heidelberg: Interdisziplinares Zentrum fur wiss. Rechnen der Univ. Heidelberg, 1996. 188 p.

11. Bulatov M. V., Lee M. G. Application of Matrix Polynomials to the Analysis of Linear Differential Algebraic Equations of Higher Order // *Differential Equations*. 2008. V. 44. Pp. 1353–1360.

12. Kunkel P., Mehrmann V. *Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution.* Zurich, Switzerland: EMS Publishing House, 2006. 192 p.

13. Mehrmann V., Shi C. Transformation of High Order Linear Differential-Algebraic Systems to First Order. *Numerical Algorithms.* 2006. V. 42. Iss. 3–4. Pp. 281–307.

14. Lamour R., März R., Tischendorf C. *Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis.* Berlin: Springer, 2013. 649 p.