УДК 51-7
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-3-77-86

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ДЕФЕКТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

© Соболев Владимир Иванович
доктор технических наук, профессор,
Иркутский национальный исследовательский технический университет
Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83
E-mail: vladsobol@yandex.ru

© Черниговская Татьяна Николаевна
старший преподаватель,
Иркутский государственный университет путей сообщения
Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15
E-mail: tannikch@gmail.com

Статья посвящена разработке определения остаточных жесткостей различных конструктивных элементов на основе результатов инструментальных замеров параметров собственных колебаний, проведенных при помощи высокоточных приборов. Предлагаемые исследования чрезвычайно актуальны при определении степени дефектности зданий, несущих конструкций авиационных, судовых и других систем, прошедших определенный период эксплуатации, или же конструкций, подвергавшихся интенсивным воздействиям. Динамические способы анализа состояния несущих конструкций имеют неоспоримые преимущества, поскольку исключают необходимость детального обследования, связанного зачастую с необходимостью вскрытия ограждающих конструкций. Преимущества использования такого подхода особо проявляются при обследовании большого массива жилых застроек, находящихся в разнородных условиях эксплуатации. В работе рассмотрены вопросы определения жесткостных свойств конструктивных элементов с преобладающим характером сдвиговых деформаций при наличии непрерывности и дискретности распределения инерционных параметров. Существует необходимость определения уровня накопления дефектов, для этого вычисляют отношения реальных, определенных в процессе динамических испытаний жесткостных параметров к некоторым изначальным (проектным), свойственным конструкциям без наличия дефектов. В работе показана инвариантность таких отношений при учете свойств дискретности и непрерывности математических моделей конструктивных элементов. Практическое применение таких методов опробовано при обследовании многоэтажных жилых домов серии 1–335 г. Иркутска.
Ключевые слова: остаточная жесткость; обратная задача динамики; частота собственных колебаний; деформации сдвига; распределение масс; дискретные параметры.

Для цитирования:
Соболев В. И., Черниговская Т. Н. Математические модели обратных задач динамики дефектных конструкций // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 3. С. 77–86.

Введение

Одним из наиболее простых вариантов задачи обратной динамики является определение жесткости многоэтажного здания по фактическим величинам собственных колебаний, замеренных при помощи высокоточных приборов. Среди различных задач обратной динамики [1–3] определение жесткостных свойств здания является, безусловно, устойчивым в вычислительном плане и не относится к категории некорректных задач [3–5]. Однако для нахождения параметров жесткости по результатам определения частоты основного тона приходится пользоваться некоторым приближением расчетной схемы, вносящим погрешности в определение собственных параметров здания [4; 6]. Можно отметить, что определение величины потери жесткости характеризует количественную оценку накопления дефектов здания, подверженного некоторому периоду эксплуатации [4], что оказывает влияние на функциональные свойства несущих конструкций [7]. Методы такой оценки на основе динамических испытаний имеют явные преимущества, поскольку исключают необходимость демонтажа ограждающих конструкций для обследования внутренних несущих конструкций здания[1]. Необходимо заметить, что обязательные периодические определения частот собственных колебаний основного тона здания определены для сейсмических регионов условиями государственных стандартов[1].

1 Постановка задачи

Решение обратной задачи динамики является не единственной причиной, обусловливающей потребность в оценке точности определения собственных динамических параметров; стоит привести примеры необходимости такой оценки при выборе дискретной расчетной схемы и определения уровня дискретизации, который в большинстве случаев бывает излишне высоким [6; 8; 9].

Подавляющее преобладание завышения размерности задач динамики в расчетной практике не исключает возможность формирования динамических моделей «малой» размерности, не отражающих с достаточной точностью необходимые динамические свойства рассчитываемого объекта [10].

Среди прочих задач оценки погрешности определения собственных динамических параметров многоэтажных зданий актуальна задача определения погрешности при использовании простейших расчетных схем с сосредоточенными массами [6; 10]. Распространенные способы определения решений подобных задач основаны преимущественно на применении преобразований подобия [11; 12].

Использование подобных оценок не учитывает специфику конструктивных элементов рассчитываемого сооружения, и решение такой задачи является, на наш взгляд, чрезвычайно актуальным.

[1] ГОСТ 31037-2011 — Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния. 67 с.

2

Рассмотрим величины погрешностей, получаемых при аппроксимации различных конструктивных элементов одномассовыми динамическими моделями.

Консольная система с подавляющим преобладанием деформаций сдвига и равномерным распределением масс. Такими конструктивными элементами являются диафрагмы жесткости и несущие стеновые конструкции зданий [6].

С использованием метода динамических перемещений [13] расчетная схема такого конструктивного элемента может быть представлена в виде вертикального стержня с распределенной массой интенсивности ρ, длины l и сдвиговой жесткости GF, где G — модуль сдвига, F — площадь поперечного сечения (рис. 1).

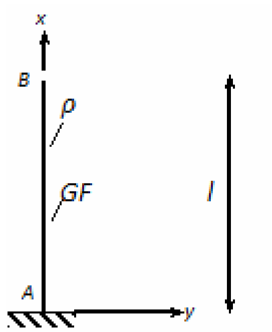

Рис. 1. Расчетная схема элемента с деформациями сдвига, с распределенной массой ρ

Уравнение собственных колебаний такого элемента является уравнением в частных производных и имеет вид:

$$\frac{\rho\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot GF=0, \qquad (1)$$

где v — горизонтальные перемещения точек элемента в процессе собственных колебаний, t — параметр времени. Допустим, что собственные колебания такой системы осуществляются с некоторой частотой w.

Тогда с использованием приема разделения переменных [14] можем записать

$$v(t,x)=y(x)\cdot\sin(\omega t). \qquad (2)$$

При подстановке (2) в (1) имеем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-\rho\cdot\omega^2\cdot y(x)\cdot\sin(\omega x)+GFy''(x)\cdot\sin(\omega x)=0,$$

после упрощения которого получаем следующее уравнение:

$$y''(x) - \frac{\rho \cdot \omega^2}{GF} \cdot y(x) = 0\,. \qquad (3)$$

Характеристическое уравнение для (3) имеет вид:

$$\mu^2 - \frac{\rho \cdot \omega^2}{GF} = 0\,.$$

Корни этого уравнения имеют вид:

$$\mu_1 = \omega\sqrt{\frac{\rho}{GF}} \qquad \mu_2 = -\omega\sqrt{\frac{\rho}{GF}}$$

или $\mu_1 = \omega\mu$, $\mu_2 = -\omega\mu$, где $\mu = \sqrt{\frac{\rho}{GF}}$.

Общее решение уравнения (3) представляет собой линейную комбинацию двух линейно независимых частных решений, образующих базисную вектор-функцию:

$$h(x) = [\sin(\omega\mu\, x), \cos(\omega\mu\, x)].$$

В этом случае решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(\omega\mu\, x) + C_2 \cdot \cos(\omega\mu\, x),$$

где C_1, C_2 — коэффициенты линейной комбинации, определяющиеся краевыми условиями уравнения (3) [15].

При $x = 0$ имеем равенство:

$$C_2 \cdot \cos(\omega\mu\, x) = 0 \;\text{, откуда}\; C_2 = 0\,.$$

Таким образом, с учетом закрепления узла в точке $x = 0$ имеем решение:

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(\omega\mu\, x)\,.$$

Поскольку функция колебательной формы при собственных колебаниях определена с точностью до множителя, то C_1 положим равной 1, тогда

$$y(x) = \sin(\omega\mu\, x)\,.$$

При перемещении точки B на некоторую величину Δ имеем равенство:

$$\sin(\omega\mu\, l) = \Delta\,.$$

В частности, при $\Delta = 1$ получаем равенство вида:

$$C_1 \cdot \sin(\omega\mu\, l) = \sin\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{GF}} \cdot l\right) = 1\,.$$

Если на точку B, перемещенную на величину $\Delta = 1$, наложить горизонтальную связь (рис. 2), то в этой связи возникает реакция H_B , равная

$$EI \cdot \left.\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right|_{x=1} = \cos(\omega\mu l) \cdot EI \cdot \omega\mu .$$

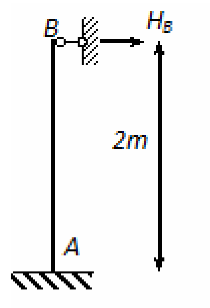

Рис. 2. Расчетная схема для определения реакции H_B
в линейной связи верхнего узла элемента *AB*

При воздействии единичной силы по направлению связи амплитуда гармонического перемещения $y(l)$ определяется выражением:

$$y(l) = \frac{1}{\cos(\omega\mu l) \cdot EI \cdot \omega\mu} = \frac{\sqrt{GP}}{\cos(\omega\mu l) \cdot EI \cdot \omega\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\cos(\omega\mu l) \cdot \omega\sqrt{EI\rho}} . \quad (4)$$

При величине резонанса амплитуда достигается при знаменателе выражения (4), равном нулю. При этом

$$\cos(\omega\mu l) = 0 .$$

Низшая частота собственных колебаний определяется в этом случае из равенства:

$$\gamma_1 \mu l = \frac{\pi}{2} .$$

Таким образом, частота γ_1 колебаний низшего тона такой системы определяется выражением:

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2\mu l} = \frac{\pi}{2l} \cdot \sqrt{\frac{GF}{\rho}} .$$

Воспользовавшись этим выражением, оценим относительную величину остаточной жесткости здания, полученную в результате инструментальных замеров, определивших частоту γ_{1r} собственных колебаний основного тона. Если $\gamma_{1\rho}$ — исходная (проектная) частота собственных колебаний здания, то отношение q остаточной жесткости к изначальной определяется в виде:

$$q = \left(\frac{\gamma_{1r}}{\gamma_{1\rho}}\right)^2 .$$

Определим относительную величину остаточной жесткости здания в аппроксимации модели конструкций с массами, сосредоточенными в уровнях перекрытий.

Рассмотрим приближение наиболее простой динамической системы, представленной двухэтажным зданием. Частоты собственных колебаний такой системы могут быть определены достаточно просто. Расчетная схема двухэтажной конструкции с массами, сосредоточенными в уровне перекрытий, изображена на рис. 3.

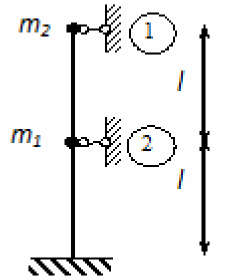

Рис. 3. Динамическая модель двухэтажного здания со стеновыми несущими конструкциями. 1, 2 — номера связей

Для построения системы уравнений динамического равновесия используем метод перемещений [6], для чего на перемещения точек сосредоточения масс наложим линейные связи в горизонтальном направлении (рис. 3).

Сосредотачивая массы здания в точках, обозначим величины масс через m_1 и m_2.

Матрица R единичных реакций такой системы имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{2GF}{l} & -\frac{GF}{l} \\ -\frac{GF}{l} & \frac{GF}{l} \end{bmatrix}.$$

Матрица D динамических реакций модели имеет вид:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2GF}{l \cdot m_1} & -\frac{GF}{l \cdot m_1} \\ -\frac{GF}{l \cdot m_2} & \frac{GF}{l \cdot m_2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

При $m_1 = m_2 = m$ частоты собственных колебаний могут быть определены из условия

$$\left| D - \lambda \cdot E \right| = 0, \quad (6)$$

где λ — собственные значения, E — единичная матрица.

В развернутом виде уравнение (6) может быть записано следующим образом:

$$\left(\frac{2GF}{l\cdot m}-\lambda\right)\left(\frac{GF}{l\cdot m}-\lambda\right)-\left(\frac{GF}{l\cdot m}\right)^2=0. \qquad (7)$$

Корни уравнения (7) определяются в виде:

$$\lambda_{12}=3GF/(l\cdot m)\mp\sqrt{9\left(\frac{GF}{l\cdot m}\right)^2-\left(\frac{GF}{l\cdot m}\right)^2},$$

$$\lambda_{12}=\frac{GF}{l\cdot m}\left(3\mp2\sqrt{2}\right).$$

Таким образом, минимальное собственное значение:

$$\lambda_1=\frac{GF}{l\cdot m}\left(3-2\sqrt{2}\right),$$

а минимальная частота собственных колебаний γ_1 определена в виде:

$$\gamma_1=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\frac{GF}{l\cdot m}\left(3-2\sqrt{2}\right)}. \qquad (8)$$

В этом случае отношение q остаточной жесткости к изначальной, как и для модели с распределенными параметрами масс, определяется в виде:

$$q=\left(\frac{\gamma_{1r}}{\gamma_{1\rho}}\right)^2. \qquad (9)$$

Компоненты вектора A_1 собственных колебаний определим из решения системы уравнений:

$$(D-\lambda_1\cdot E)A=0,$$

где $A=(a_1\,a_2)^T$ — собственный вектор двухмерной динамической системы, соответствующий собственному значению γ_1.

Если в выражении (5), определяющем матрицу D, жесткость GF вынести множителем, то оставшиеся коэффициенты матрицы определяются только через геометрические и инерционные параметры здания. Считая эти параметры неизменными в процессе эксплуатации здания, для выражения величины q получаем неизменным равенство (9).

Выполняя аналогичные преобразования для здания большей этажности при условии сохранения геометрических и инерционных параметров здания, приходим к неизменности выражения относительной величины остаточной жесткости в виде (9).

Заключение

1. Условие сохранения геометрических и инерционных параметров конструкций в процессе эксплуатации является достаточным для определения относительной величины остаточной жесткости в виде (9) при наличии конструктивных элементов с распределенными и сосредоточенными параметрами масс.

2. Величина   инвариантна по отношению к проявлениям свойств дискретности и непрерывности инерционных параметров конструктивных элементов.

Литература

1. Adams R. D., Cawley P., Stone B. J. A Vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures // Journal of Mechanical Engineering Science. 1978. V. 20, iss. 2. P. 93–100. DOI: 10.1243/jmes_jour_1978_020_016_02.
2. Cawley P., Adams R. D. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies // The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 1979. V. 14, iss. 2. P. 49–57.
3. Berman A. System identification of structural dynamic models – theoretical and practical bounds // Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. California: Palm Springs, 1984. P. 123–129.
4. Соболев В. И., Пинус Б. И. Определение параметров остаточной жесткости дефектных зданий на основе лазерных отображений колебаний и решения обратной задачи динамики // Вестник ВСГУТУ. 2019. № 1 (72). С. 55–67.
5. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987. 160 с.
6. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 319 с.
7. Пинус Б. И., Моргаев Д. Е. Оценка остаточного ресурса сейсмостойкости зданий серии 1–335 кс в городе Иркутске // V Российская национальная конф. по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию с международным участием: тез. докл. / Центр исследований сейсмостойкости сооружений. М.: Изд-во ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 2003. С. 81.
8. Соболев В. И. Расчет многоэтажных зданий, различных конструктивных систем на горизонтальное сейсмическое воздействие с учетом пространственного деформирования // Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: тр. XVIII Междунар. конф. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. Т. 1. 217 с.
9. Argyris J. H., Boni B., Hinderlang V. Finite element analysis of two- and three dimensional elastoplastic frames — the natural approach // Comp. Meth. Appl. Mech. 1982. V. 35, No. 2. P. 221–248.
10. Айзенберг Я. М. Развитие концепций и норм антисейсмического проектирования. М.: Строительство, 1997. 73 с.
11. Davies E. B., Gladwell G. M. L., Leydold J. S., Peter F. Discrete nodal domain theorems // Linear Algebra Appl. 2001. № 336. P. 51–60.
12. Икрамов Х. Д. Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Наука, 1991. 240 с.
13. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1965. 632 с.
14. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 384 с.
15. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 368 с.

MATHEMATICAL MODELS FOR INVERSE PROBLEMS OF DEFICIENT CONSTRUCTIONS DYNAMICS

Vladimir I. Sobolev
Dr. Sci. (Engineering), Prof.,
Irkutsk National Research Technical University
83 Lermontova St., Irkutsk 664074, Russia
E-mail: vladsobol@yandex.ru

Tatyana N. Chernigovskaya
Senior Lecturer,
Irkutsk State Transport University
15 Chernyshevskogo St., Irkutsk 664074, Russia
E-mail: tannikch@gmail.com

The article presents the solution for residual stiffnesses determination in various structural elements, which is based on the results of instrumental measurements of the parameters of natural vibrations carried out using high-precision instruments. Our research is extremely relevant to determine the degree of deficiencies in buildings, supporting structures of aircraft, ship and other systems with a certain operational cycle or structures that have been subjected to intense impacts. The use of dynamic methods for analyzing the state of load-bearing structures has undeniable advantages, since they exclude the need for a detailed surveying, often associated with the opening of enclosure structures. The advantages of using this approach are especially evident when surveying a large area of residential structures located in heterogeneous operating conditions. The article considers the problems of determining the stiffness properties of structural elements with the predominance of shearing strain in continuity and discreteness of inertial parameters distribution. There is a need to determine the level of defects accumulation, so we have calculated the ratio of real stiffness parameters, defined in the process of dynamic tests, to some initial ones, inherent to the constructions without defects. The article shows the invariance of such relations with account of discreteness and continuity properties of the mathematical models for structural elements. These methods have been tested in survey of 1-335 series high-rise residential buildings in Irkutsk.
Keywords: residual stiffness; dynamic inverse problem; frequency of natural vibrations; shearing strain; mass distribution; discrete parameters.

References

1. Adams R. D., Cawley P., Stone B. J. A Vibration Technique for Non-Destructively Assessing the Integrity of Structures. *Journal of Mechanical Engineering Science.* 1978. V. 20. Iss. 2. Pp. 93–100. DOI: 10.1243/jmes_jour_1978_020_016_02.
2. Cawley P., and Adams R. D. The Location of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design.* 1979. V. 14. Iss. 2. Pp. 49–57.
3. Berman A. System Identification of Structural Dynamic Models – Theoretical and Practical Bounds. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference.* California, Palm Springs, 1984. Pp. 123–129.
4. Sobolev V. I., Pinus B. I. Opredelenie parametrov ostatochnoi zhestkosti de-

fektnykh zdanii na osnove lazernykh otobrazhenii kolebanii i resheniya obratnoi zadachi dinamiki [Determination of the Parameters of Deficient Buildings Residual Stiffness Based on Laser Imaging of Vibrations and Solving the Dynamic Inverse Problem]. *Vestnik VSGUTU.* 2019. No. 1 (72). Pp. 55–67.

5. Amelkin V. V. *Differentsialnye uravneniya v prilozheniyakh* [Differential Equations in Applications]. Moscow: Nauka Publ., 1987. 160 p.

6. Clough R. W., Penzien J. *Dynamics of Structures.* McGraw-Hill College, 1975. 634 p.

7. Pinus B. I., Morgayev D. E. Otsenka ostatochnogo resursa sei-smostoikosti zdanii serii 1-335 ks v gorode Irkutske [Assessment of the Residual Seismic Stability of 1-335 ks Series Buildings in Irkutsk]. *Tezisy dokladov V Rossiiskoi Natsional'noi konferentsii po seismostoikomu stroitel'stvu i seismicheskomu raionirovaniyu s mezhdunarodnym uchastiem.* Moscow, 2003. 81 p.

8. Sobolev V. I. Raschet mnogoetazhnykh zdanii razlichnykh konstruktivnykh sistem na gorizontalnoye seismicheskoye vozdeistvie s uchetom prostranstvennogo deformirovaniya [Calculation of Multistory Buildings of Various Structural Systems for Horizontal Earthquake Action Taking into Account Spatial Deformation]. *Matematicheskoye modelirovaniye v mekhanike sploshnykh sred na osnove metodov granichnykh i konechnykh elementov.* Proc. 18th Int. conf. St Petersburg, 2000. V. 1. 217 p.

9. Argyris J. H., Boni B., Hinderlang V. Finite Element Analysis of Two- and Three Dimensional Elastoplastic Frames — the Natural Approach. *Comp. Meth. Appl. Mech.* 1982. V. 35. No. 2. Pp. 221–248.

10. Aizenberg Ya. M. *Razvitie kontseptsii i norm antiseismicheskogo proektirovaniya* [Development of the Concepts and Regulations for Earthquake-Proof Engineering]. Moscow: Stroitelstvo Publ., 1997. 73 p.

11. Davies E. B., Gladwell G. M. L., Leydold J. S., Peter F. Discrete Nodal Domain Theorems. *Linear Algebra Appl.* 2001. No. 336. Pp. 51–60.

12. Ikramov Kh. D. *Nesimmetrichnaya problema sobstvennykh znachenii. Chislennye metody* [Asymmetric Eigenvalue Problem. Numerical Methods]. Moscow: Nauka Publ., 1991. 240 p.

13. Koloushek V. *Dinamika stroitelnykh konstruktsii* [Dynamics of Building Constructions]. Moscow: Building Literature Publishing Department, 1965. 632 p.

14. Farlow S. J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.* New York: Wiley, 1982. 402 p.

15. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsialnykh uravneniyakh matematicheskoi fiziki, imeyuschikh prilozhenie v tekhnicheskikh voprosakh* [About Some Differential Equations of Mathematical Physics, Having Application in Engineering]. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat Publ., 1950. 368 p.