УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 517.977.52
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-4-12-30

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

© Алекберов Айдын Абдулла оглы
диссертант Ленкоранского государственного университета
Азербайджан, Az4200, г. Ленкорань, пр-т Ази Асланова, 50
E-mail: kmansimov@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений, а также функционалом качества терминального типа. Области управления являются открытыми. Доказаны неявные необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. При исследовании этих необходимых условий оптимальности доказан аналог уравнения Эйлера и аналог условия Лежандра — Клебша. Полученные последовательности многоточечных необходимых условий оптимальности особых в классическом смысле управлений позволяют сузить множество допустимых управлений, подозрительных на оптимальность.

Ключевые слова: одномерное интегральное уравнение второго порядка типа Вольтерра; обыкновенное дифференциальное уравнение; необходимое условие оптимальности; вариация функционала качества; уравнение Эйлера.

Для цитирования:
Алекберов А. А. Аналог уравнения Эйлера и необходимые условия оптимальности второго порядка в одной задаче оптимального управления с переменной структурой // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 4. С. 12–30.

Введение

Среди множества задач оптимального управления особое место занимают задачи оптимального управления многоэтапными процессами, так называемые задачи оптимального управления системами с переменной структурой (напр. [1–7]). Ряд задач оптимального управления, описываемых на различных отрезках времени, изучен в работах [1–7].

В статье ставится и рассматривается задача оптимального управления, описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных (типа Вольтерра) уравнений. Доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме уравнения Эйлера. Затем получены необходимые условия оптимальности второго порядка для классических экстремалей и изучен случай вырождения аналога, условия Лежандра — Клебша.

1 Постановка задачи

Допустим, что управляемый непрерывный процесс на фиксированном отрезке времени $T = T_1 \cup T_2$ $\left(T_1 = [t_0, t_1],\ T_2 = [t_1, t_2]\right)$ описывается совокупностью обыкновенных дифференциальных и интегральных (типа Вольтерра) уравнений вида:

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in T_1, \\ x(t_0) = x_0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$y(t) = \int_{t_1}^{t} g(t, s, y(s), v(s))\,ds + G(x(t_1)), \quad t \in T_2, \tag{2}$$

Здесь $f(t, x, u)$ $\left(g(t, s, y, v)\right)$ — заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) $\left((y, v)\right)$ до второго порядка включительно, t_0, t_1, t_2 $(t_0 < t_1 < t_2)$ — заданы, x_0 — заданный постоянный вектор, $G(x)$ — заданная m-мерная дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $u(t)$ $\left(v(t)\right)$ — r (q)-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества U (V), т. е.

$$\begin{aligned} & u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ & v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Пару $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$, удовлетворяющую вышеприведенным условиям, назовем допустимым управлением.

Под решением системы (1), (2), соответствующим допустимому управлению $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$, понимается пара $\left(x^o(t), y^o(t)\right)$, удовлетворяющая соотношениям (1), (2), где $x^o(t)$ — непрерывная и кусочно-гладкая вектор-функция, а $y^o(t)$ — непрерывная вектор-функция.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ соответствует единственное решение системы (1), (2).

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\mathrm{I}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \varphi_1\left(x(t_1)\right) + \varphi_2\left(y(t_2)\right) \tag{4}$$

при ограничениях (1)–(3).

Здесь $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление, доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)–(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\left(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t)\right)$ — оптимальным процессом.

2 Формула для приращения функционала

Пусть $\left(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t)\right)$ — фиксированный допустимый процесс. Через
$\left(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t),\ \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t)\right)$
обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала качества

$$\begin{gathered}\Delta \mathrm{I}\left(\mathrm{u}^o, \mathrm{v}^o\right) = \mathrm{I}\left(\bar{\mathrm{u}}, \bar{\mathrm{v}}\right) - \mathrm{I}\left(\mathrm{u}^o, \mathrm{v}^o\right) = \\ = \left[\varphi_1\left(\bar{x}(t_1)\right) - \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)\right] + \left[\varphi_2\left(\bar{y}(t_2)\right) - \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)\right].\end{gathered} \tag{5}$$

Далее ясно, что $\left(\Delta x(t), \Delta y(t)\right)$ является решением задачи

$$\Delta\dot{x}(t) = f\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t, x^o(t), u^o(t)\right), \tag{6}$$

$$\Delta x(t_0) = 0\,, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\Delta y(t) = \int_{t_1}^{t}\left[g\left(t, s, \bar{y}(s), \bar{v}(s)\right) - g\left(t, s, y^o(s),\ v^o(s)\right)\right]ds + \\ + G\left(\bar{x}(t_1)\right) - G\left(x^o(t_1)\right).\end{gathered} \tag{8}$$

Предположим, что $\psi^0(t), p^o(t)$ — пока произвольные n и m-мерные соответственно вектор-функции.

При этом из (6) и (8) получаем справедливость тождеств

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\ \Delta\dot{x}\ (t)\ dt = \int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\left[f\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t, x^o(t),\ u^o(t)\right)\right]dt, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t)\ \Delta y\ (t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t)\left[G\left(\bar{x}(t_1)\right) - G\left(x^o(t_1)\right)\right]dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t)\left[\int_{t_1}^{t}\left[g\left(t, s, \bar{y}(s), \bar{v}(s)\right) - g\left(t, s, y^o(s),\ v^o(s)\right)\right]ds\right]dt.\end{gathered} \tag{10}$$

Учитывая тождества (9), (10), приращение (5) функционала (4) запишем в виде

$$\begin{gathered}\Delta \mathrm{I}\left(\mathrm{u}^o, \mathrm{v}^o\right) = \left[\varphi_1\left(\bar{x}(t_1)\right) - \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)\right] + \left[\varphi_2\left(\bar{y}(t_2)\right) - \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)\right] + \\ + \psi^{o'}(t_1)\Delta x\ (t_1)\ - \int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}^{o'}(t)\Delta x(t)\,dt -\end{gathered} \tag{11}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\left[f\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t, x^o(t),\ u^o(t)\right)\right]dt + \int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t)\Delta y(t)\,dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t_1}^{t} p^{o'}(s)\left[g\left(s,t,\bar{y}(s),\bar{v}(s)\right)-g\left(s,t,y^o(s),\ v^o(s)\right)\right]ds\right]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t)\left[G\left(\bar{x}(t_1)\right)-G\left(x^o(t_1)\right)\right]dt.$$

Полагая

$$N\left(p^o(t),x\right)=p^{o'}(t)G(x)$$

и используя формулу Тейлора, формулу приращения (11) запишем в виде

$$\Delta \mathrm{I}\left(\mathrm{u}^o,\mathrm{v}^o\right)=\frac{\partial\varphi_1'\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1'\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\varphi_2'\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y}\left[g\left(t_2,t,\bar{y}(t),\bar{v}(t)\right)-g\left(t_2,t,y^o(t),\ v^o(t)\right)\right]dt+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2'\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^o(t),x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+$$

$$+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right)+\left[\psi^{o'}(t)-\int_{t_0}^{t_1}G_x'\left(x^o(t_1)\right)p^o(t)dt\right]\Delta x(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}^{o'}(t)\Delta x(t)dt- \qquad (12)$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\left[f\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)-f\left(t,x^o(t),\ u^o(t)\right)\right]dt+\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\Delta y(t)dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(s)\left[g\left(s,t,\bar{y}(t),\bar{v}(t)\right)-g\left(s,t,y^o(t),\ v^o(t)\right)\right]ds\right]dt-\int_{t_1}^{t_2}o_3\left(t,\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)dt.$$

Здесь $o(\alpha^2)$ величина более высокого порядка чем α^2, т. е. $o(\alpha^2)/\alpha^2\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Введя аналоги функций Гамильтона — Понтрягина посредством формул

$$H\left(t,x,u,\psi^o\right)=\psi^{o'}f\left(t,x,u\right),$$

$$M\left(t,y,v,p^o\right)=-\frac{\partial\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y}g\left(t_2,t,y,v\right)+\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(s)g\left(t,s,y,v\right)ds,$$

формулу приращения (12) запишем в виде:

$$\Delta \mathrm{I}\left(\mathrm{u}^o,\mathrm{v}^o\right)=-\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\ \psi^o(t)\right)-H\left(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t)\right)\right]dt+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1'(x^o(t_1))}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2'(y^o(t_2))}{\partial y^2}\Delta y(t_2)-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[M\left(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t),\,p^o(t)\right)-M\left(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t)\right)\right]dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N(p^o(t),x^o(t_1))}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+$$

$$+\left[\psi^o(t_1)+\frac{\partial\varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x}-\int_{t_1}^{t_2}G_x'(x^o(t_1))p^o(t)dt\right]'\Delta x(t_1)-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\Delta y(t)dt+o_1\left(\|\Delta x(t_1)\|\right)+o_2\left(\|\Delta y(t_2)\|\right)-\int_{t_1}^{t_2}o_3\left(t,\|\Delta x(t_1)\|^2\right)dt. \quad (13)$$

Предположим, что $(\psi^o(t),\ p^o(t))$ является решением системы уравнений

$$\dot{\psi}^o(t)=-H_x(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)),$$

$$\psi^o(t_1)=-\frac{\partial\varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x}+\int_{t_1}^{t_2}G_x'(x^o(t_1))p^o(t)dt,$$

$$p^o(t)=M_y(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)).$$

Тогда формула приращения (13) может быть представлена в виде:

$$\Delta\mathrm{I}(\mathrm{u}^o,\mathrm{v}^o)= \quad (14)$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\Delta u(t)dt-\int_{t_1}^{t_2}M_v'\left(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t)\right)\Delta v(t)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\Delta x(t)+2\Delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\Delta x(t)+$$

$$+\Delta u'(t)H_{uu}\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\Delta u(t)\Big]dt-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big[\Delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),\,v^o(t),p^o(t)\right)\Delta y(t)+$$

$$+2\Delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t)\right)\Delta y(t)+$$

$$+\Delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t)\right)\Delta v(t)\Big]dt+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\,\frac{\partial^2\varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}\Delta y(t_2)-\int_{t_1}^{t_2}o_3\left(t,\,\|\Delta x(t_1)\|^2\right)dt+$$

$$+o_1\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right)+o_2\left(\|\Delta y(t_2)\|^2\right)-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N(p^o,x^o(t_1))}{\partial x^2}\Delta x(t_1).$$

3 Оценка нормы приращения состояния

Из тождеств (6)–(8), используя условие Липшица, получим

$$\|\Delta x(t)\| \le L_1 \int_{t_0}^{t} \left[\|\Delta x(s)\| + \|\Delta u(s)\|\right] ds , \tag{15}$$

$$\|\Delta y(t)\| \le L_2 \int_{t_0}^{t} \left[\|\Delta y(\tau)\| + \|\Delta v(\tau)\|\right] d\tau + L_3 \|\Delta x(t_1)\|, \tag{16}$$

где $L_i = const > 0$, $i = \overline{1,3}$ — некоторые постоянные.

Применяя к неравенствам (15), (16) обобщенную лемму Гронуолла — Беллмана, (напр. [8]) получим справедливость оценок

$$\|\Delta x(t)\| \le L_4 \int_{t_0}^{t} \|\Delta u(s)\| ds , \tag{17}$$

$$\|\Delta y(t)\| \le L_5 \left[\int_{t_1}^{t} \|\Delta v(s)\| ds + \|\Delta x(t_1)\| \right], \tag{18}$$

где $L_i = const > 0$, $i = 4,5$ — некоторые постоянные.

Из (18) с учетом (17) следует, что

$$\|\Delta y(t)\| \le L_6 \left[\int_{t_1}^{t} \|\Delta v(s)\| ds + \int_{t_0}^{t} \|\Delta u(s)\| ds \right], \qquad L_6 = const > 0 . \tag{19}$$

4 Вариации функционала (4) и уравнения в вариациях

Из (6)–(8) получаем, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x^o(t), y^o(t))$ является решением следующей линеаризованной системы

$$\Delta \dot{x}(t) = f_x(t, x^o(t), u^o(t))\Delta x(t) + f_u(t, x^o(t), u^o(t))\Delta u(t) + o(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|), \tag{20}$$

$$\Delta x(t_0) = 0 , \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t) = \int_{t_1}^{t} \Big[& g_y(t, s, y^o(s),\ v^o(s))\Delta y(s) + g_v(t, s, y^o(s),\ v^o(s))\Delta v(s) + \\ & + o\left(\|\Delta y(s)\| + \|\Delta v(s)\|\right) \Big] ds + G_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) + o(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned} \tag{22}$$

В силу открытости множеств U и V специальное приращение $(u^o(t), v^o(t))$ можно определить по формуле

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon(t) &= \varepsilon\, \delta u(t), \quad t \in T_1, \\ \Delta v_\varepsilon(t) &= \varepsilon\, \delta v(t), \quad t \in T_2 . \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$, $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$ — произвольные кусочно-непрерывные (с конечным числом точек разрыва первого рода) ограниченные вектор-функции, а ε — произвольное, достаточно малое по абсолютной величине число.

Допустим, что $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$ специальное приращение траектории $(x^o(t), y^o(t))$, соответствующее приращению $(u^o(t), v^o(t))$.

Из (20)–(21) ясно, что

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \int_{t_0}^{t} \Big[f_x\big(s, x^o(s),\ u^o(s)\big)\Delta x_\varepsilon(s) + f_u\big(s, x^o(s),\ u^o(s)\big)\Delta u(s) + +o\big(\|\Delta x(s)\| + \|\Delta u(s)\|\big)\Big] ds, \tag{24}$$

$$\Delta y_\varepsilon(s) = \int_{t_1}^{t} \Big[g_y\big(t, s, y^o(s),\ v^o(s)\big)\Delta y_\varepsilon(s) + g_v\big(t, s, y^o(s),\ v^o(s)\big)\Delta v_\varepsilon(s) + +o\big(\|\Delta y_\varepsilon(s)\| + \|\Delta v_\varepsilon(s)\|\big)\Big] ds + G_x\big(x^o(t_1)\big)\Delta x_\varepsilon(t_1) + o\big(\|\Delta x_\varepsilon(t_1)\|\big). \tag{25}$$

Теперь $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$ будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta x_\varepsilon(t) &= \varepsilon\,\delta x(t) + o(\varepsilon; t), \\ \Delta y_\varepsilon(t) &= \varepsilon\,\delta y\ (t) + o\ (\varepsilon; t), \end{aligned} \tag{26}$$

где $(\delta x(t), \delta y(t))$ — пока неизвестная $(n+m)$-мерная вектор-функция.

Принимая во внимание оценки (17) и (19) в (24)–(25), докажем, что в разложении (26) $(\delta x(t), \delta y(t))$ является решением следующего уравнения в вариациях:

$$\delta\dot{x}(t) = f_x\big(t, x^o(t), u^o(t)\big)\delta x(t) + f_u\big(t, x^o(t), u^o(t)\big)\delta u(t), \tag{27}$$

$$\delta x(t_0) = 0, \tag{28}$$

$$\delta y(t) = \int_{t_1}^{t} \Big[g_y\big(t, s, y^o(s),\ v^o(s)\big)\delta y(s) + g_v\big(t, s, y^o(s),\ v^o(s)\big)\delta v(s)\Big] ds + +G_x\big(x^o(t_1)\big)\delta x(t_1). \tag{29}$$

Учитывая (23), оценки (17), (19) и разложения (26) в формуле приращения (14), приходим к разложению

$$\Delta \mathrm{I}_\varepsilon(\mathrm{u}^o, \mathrm{v}^o) = \mathrm{I}(\mathrm{u}^o + \Delta \mathrm{u}_\varepsilon, \mathrm{v}^o + \Delta v_\varepsilon) - \mathrm{I}(\mathrm{u}^o, \mathrm{v}^o) =$$

$$= -\varepsilon\left[\int_{t_0}^{t_1} H_u'\big(t, x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t)\big)\delta u(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} M_v'\big(t, y^o(t),\ v^o(t),\ p^o(t)\big)\delta v(t)\,dt \right] +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{ \delta x'(t_1)\frac{\partial^2 \varphi_1\big(x^o(t_1)\big)}{\partial x^2}\delta x(t_1) + \delta y'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2\big(y^o(t_2)\big)}{\partial y^2}\delta y(t_2) - \right.$$

$$-\delta x'(t_1)\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 N\left(p^o(t),x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}dt\right]\delta x(t_1)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\delta x(t)+2\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\delta x(t)+$$

$$+\delta u'(t)H_{uu}\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\delta u(t)\Big]dt-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),\,v^o(t),p^o(t)\right)\delta y(t)+$$

$$+2\delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^o(t),\,v^o(t),p^o(t)\right)\delta y(t)+$$

$$+\delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^o(t),\,v^o(t),p^o(t)\right)\delta v(t)\Big]dt\Big\}+o\left(\varepsilon^2\right). \qquad (30)$$

Из разложения (30) ясно, что первая и вторая вариации (в классическом смысле (напр. [9; 10])) функционала критерия качества (4) имеют соответственно вид:

$$\delta^1\mathrm{I}\left(\mathrm{u}^o,\mathrm{v}^o;\,\delta u,\delta v\right)=-\left[\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\delta u(t)dt+\right.$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}M_v'\left(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t)\right)\delta v(t)dt\right], \qquad (31)$$

$$\delta^2\mathrm{I}\left(\mathrm{u}^o,\mathrm{v}^o;\,\delta u,\delta v\right)=$$
$$=\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)+\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)- \qquad (32)$$

$$-\delta x'(t_1)\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 N\left(p^o(t),x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}dx\right]\delta x(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\delta x(t)+$$

$$+2\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\delta x(t)+\delta u'(t)H_{uu}\left(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t)\right)\delta u(t)\Big]dt+$$

$$+\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),\,v^o(t),p^o(t)\right)\delta y(t)+$$

$$+2\delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^o(t),\,v^o(t),p^o(t)\right)\delta y(t)+\delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^o(t),\,v^o(t),p^o(t)\right)\delta v(t)\Big]dt\,.$$

Запишем интегральное представление решения $(\delta x,\delta y)$ уравнения в вариациях. Решение линейной задачи Коши (27), (28) допускает представление (напр. [9; 11])

$$\delta x(t)=\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)f_u\left(\tau,x^o(\tau),\,u^o(\tau)\right)\delta u(\tau)d\tau\,, \qquad (33)$$

где $F(t,\tau)$ $(n\times n)$ — матрица Коши, являющаяся решением задачи

$$F_\tau(t,\tau)=-F(t,\tau)f_x(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau)),\ F(t,t)=E_1,$$

(E_1 – $(n\times n)$ единичная матрица).

Решение $\delta y(t)$ линейного неоднородного интегрального уравнения (29) допускает представление [12–14]

$$\delta y(t)=\int_{t_1}^{t}R(t,\tau)\left[\int_{t_1}^{\tau}g_v(\tau,s,y^o(s),\ v^o(s))\delta v(s)ds+G_x(x^o(t_1))\delta x(t_1)\right]d\tau+ \\ +\int_{t_1}^{t}g_v(t,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau))\delta v(\tau)d\tau+G_x(x^o(t_1))\delta x(t_1), \tag{34}$$

где $R(t,s)$ — $(m\times m)$-матричная функция (резольвента), которая удовлетворяет матричным интегральным уравнениям

$$R(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}R(t,s)g_x(s,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau))ds+g_y(t,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau)),$$

$$R(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}g_y(s,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau))R(s,\tau)ds+g_z(t,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau)).$$

Из (34), используя формулу Дирихле (напр. [9]), будем иметь

$$\delta y(t)=\int_{t_1}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}R(t,s)g_v(s,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau))ds\right]\delta v(\tau)d\tau+ \\ +\int_{t_1}^{t}R(t,\tau)G_x(x^o(t_1))\delta x(t_1)d\tau+ \\ +\int_{t_1}^{t}g_v(t,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau))\delta v(\tau)d\tau+G_x(x^o(t_1))\delta x(t_1).$$

Следовательно,

$$\delta y(t)=\int_{t_1}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}R(t,s)g_v(s,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau))ds+g_v(t,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau))\right]\delta v(\tau)d\tau+ \\ +\left[\int_{t_1}^{t}R(t,\tau)G_x(x^o(t_1))d\tau+G_x(x^o(t_1))\right]\delta x(t_1). \tag{35}$$

Принимая во внимание (33), в (35) получим

$$\delta y(t)=\int_{t_1}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}R(t,s)g_v(s,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau))ds+g_v(t,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau))\right]\delta v(\tau)d\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_1}^{t}R(t,\tau)G_x(x^o(t_1))d\tau+G_x(x^o(t_1))\right]F(t_1,s)f_u(s,x^o(s),\ u^o(s))\delta u(s)ds. \tag{36}$$

Положим

$$Q_1(t,\tau)=\int_\tau^t R(t,s)g_v\left(s,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau)\right)ds+g_v\left(t,\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau)\right),$$

$$Q_2(t,s)=\left[\int_{t_1}^t R(t,\tau)G_x\left(x^o(t_1)\right)d\tau+G_x\left(x^o(t_1)\right)\right]F(t_2,s)f_u\left(s,x^o(s),\ u^o(s)\right).$$

Тогда формула представления (36) записывается в виде

$$\delta y(t)=\int_{t_1}^t Q_1(t,\tau)\ \delta v(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t_1} Q_2(t,s)\ \delta u(s)ds. \quad (37)$$

Из первых вариаций (31) и (32) функционала качества в силу известных результатов классического вариационного исчисления следует, что вдоль оптимального процесса $\left(u^o(t),\ v^o(t),\ x^o(t),\ y^o(t)\right)$ выполняются соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t)\right)\delta u(t)dt+\int_{t_1}^{t_2} M_v'\left(t,y^o(t),\ v^o(t),\ p^o(t)\right)\delta v(t)dt=0, \quad (38)$$

$$\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)+\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)-$$

$$-\delta x'(t_1)\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 N\left(p^o(t),x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}dx\right]\delta x(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t)\right)\delta x(t)+$$

$$+2\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t)\right)\delta x(t)+\delta u'(t)H_{uu}\left(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t)\right)\delta u(t)\Big]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),\ v^o(t),\ p^o(t)\right)\delta y(t)+2\delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^o(t),\ v^o(t),\ p^o(t)\right)\delta y(t)+$$

$$+\delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^o(t),\ v^o(t),\ p^o(t)\right)\delta v(t)\Big]dt\ge 0. \quad (39)$$

Соотношения (38), (39) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядка соответственно.

Из (38), применяя схему, например из [10], получим

$$H_u\left(\theta,x^o(\theta),u^o(\theta),\psi^o(\theta)\right)=0,\quad \text{для всех } \theta\in[t_0,t_1), \quad (40)$$

$$M_v\left(\xi,y^o(\xi),v^o(\xi),p^o(\xi)\right)=0,\quad \text{для всех } \xi\in[x_0,x_1). \quad (41)$$

Здесь и в дальнейшем через $\theta\in[t_0,t_1)$ $\left(\xi\in[t_1,t_2)\right)$ обозначена произвольная точка непрерывности допустимого управления $u^o(t)$ $\left(v^o(t)\right)$.

Пара соотношений (40), (41) есть аналог уравнения Эйлера [9; 10] для рассматриваемой задачи.

Каждое допустимое управление $\left(u^o(t),\ v^o(t)\right)$, удовлетворяющее уравнению Эйлера (40), (41), назовем классической экстремалью.

С помощью неравенства (39) удается получить необходимые условия оптимальности второго порядка, носящие конструктивный характер. Полагая в неравенстве (39) $\delta u(t)\neq 0$ и $\delta v(t)=0$, получаем, что вдоль классической оптимальной экстремали

$$\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x^2}\delta x(t_1)+\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}\delta y(t_2)-$$
$$-\delta x'(t_1)\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 N(p^o(t),x^o(t_1))}{\partial x^2}dx\right]\delta x(t_1)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t))\delta x(t)+2\delta u'(t)H_{ux}(t,x^o(t),u^o(t),\ \psi^o(t))\delta x(t)+$$
$$+\delta u'(t)H_{uu}(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t))\delta u(t)\Big]dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\delta y'(t)M_{yy}(t,y^o(t),\ v^o(t),\ p^o(t))\delta y(t)dt\geq 0. \tag{42}$$

При этом решение уравнения в вариациях (27) принимает вид

$$\delta y(t)=\int_{t_0}^{t_1}Q_2(t,s)\ \delta u(s)ds. \tag{43}$$

Используя представление (33) и (43) займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенстве (42).

Имеем

$$\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x^2}\delta x(t_1)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)f_u'(\tau,x^o(\tau),\ u^o(\tau))F(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x^2}\times \tag{44}$$
$$\times F(t_1,s)f_u(s,x^o(s),\ u^o(s))\delta u(s)ds\,d\tau$$

$$\delta x'(t_1)\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 N(p^o(t),x^o(t_1))}{\partial x^2}dt\right]\delta x(t_1)= \tag{45}$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)f_u'(\tau,x^o(\tau),\ u^o(\tau))F'(t_1,\tau)\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 N(p^o(t),x^o(t_1))}{\partial x^2}dt\right]\times$$
$$\times F(t_1,s)f_u(s,x^o(s),\ u^o(s))\delta u(s)ds\,d\tau,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t)\right)\delta x(t)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\delta u'(\tau)H_{ux}\left(\tau,x^o(\tau),\ u^o(\tau),\ \psi^o(\tau)\right)\delta x(t)dt\right]f_u\left(t,x^o(t),\ u^o(t)\right)\delta u(t)dt, \tag{46}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t)\right)\delta x(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)f_u'\left(\tau,x^o(\tau),\ u^o(\tau)\right)\times$$
$$\times\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}F'(t,\tau)H_{xx}\left(\tau,x^o(\tau),\ u^o(\tau),\ \psi^o(\tau)\right)F(t,s)dt\right]f_u\left(s,x^o(s),\ u^o(s)\right)\delta u(s)ds\,d\tau, \tag{47}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),\ v^o(t),\ p^o(t)\right)\delta y(t)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\left[\int_{t_1}^{t_2}Q_2'(t,\tau)M_{yy}\left(t,y^o(t),\ v^o(t),\ p^o(t)\right)Q_2(t,s)dt\right]\delta u(s)ds\,d\tau, \tag{48}$$

$$\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\ Q_2'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}Q_2(t_2,s)\ \delta u(s)ds\,d\tau \tag{49}$$

Введя обозначение

$$K(\tau,s)=-f_u'\left(\tau,x^o(\tau),\ u^o(\tau)\right)\left[F'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}F(t_1,s)+\right.$$
$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}F'(t_1,\tau)H_{xx}\left(t,x^o(t),\ u^o(t),\ \psi^o(t)\right)F(t_1,s)dt-$$
$$-F'(t_1,\tau)\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2N\left(p^o(t),x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}dt\right]F(t_1,s)- \tag{50}$$
$$\left.-Q_2'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}Q_2(t_2,s)\right]f_u\left(s,x^o(s),\ u^o(s)\right),$$

и учитывая тождества (44)–(49) в неравенстве (42), получим

$$
\begin{aligned}
&+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)K(\tau,s)\delta u(s)\,ds\,d\tau+\\
&+2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\delta u'(\tau)\frac{\partial^2 H(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t))}{\partial u\,\partial x}F(\tau,t)dt\right]f_u(t,x^o(t),\,u^o(t))\delta u(t)dt+\\
&+\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(t)H_{uu}(t,x^o(t),\,u^o(t),\,\psi^o(t))\delta u(t)dt\le 0.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Теперь предположим, что $\delta u(t)\equiv 0$, $\delta v(t)\not\equiv 0$. Тогда из представлений (33), (37) следует, что $\delta x(t)=0$, а

$$
\delta y(t)=\int_{t_1}^{t}Q_1(t,\tau)\delta v(\tau)\,d\tau. \tag{52}
$$

При этом неравенство (39) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}\delta y(t_2)-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\delta y'(t)M_{yy}(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t))\delta y(t)+\\
&+2\delta v'(t)M_{vy}(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t))\delta y(t)+\\
&+2\delta v'(t)M_{vv}(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t))\delta v(t)\ge 0.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Используя представление (52), убеждаемся в справедливости тождеств

$$
\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}\delta y(t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\delta v'(t)Q_1'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}Q_1(t_2,s)\delta v(s)\,ds\,d\tau, \tag{54}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\delta v'(t)M_{vy}(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t))\delta y(t)dt=\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t}^{t_2}\delta v'(\tau)M_{vy}(\tau,y^o(\tau),\,v^o(\tau),\,p^o(\tau))Q_1(\tau,t)dt\right]\delta v(t)dt,
\end{aligned}
\tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1}\delta y'(t)M_{yy}(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t))\delta y(t)dt=\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\delta v'(\tau)\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_2}Q_1'(t,\tau)M_{yy}(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t))Q_1(t,s)\,dt\right]\delta v(s)\,ds\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Полагая

$$
\begin{aligned}
&C(\tau,s)=-Q_1'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}Q_1(t_2,s)+\\
&+\int_{\max(\tau,s)}^{t_2}Q_1'(t,\tau)M_{yy}(t,y^o(t),\,v^o(t),\,p^o(t))Q_1(t,s)\,dt
\end{aligned}
\tag{57}
$$

и учитывая тождества (54)–(56) в неравенстве (53), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\delta v'(\tau)C(\tau,s)\delta v(s)\,ds\,d\tau+$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t}^{t_2}\delta v'(\tau)M_{vy}\left(\tau,y^o(\tau),\ v^o(\tau),\ p^o(\tau)\right)Q_1(\tau,t)\,dt\right]\delta v(t)dt+ \tag{58}$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^o(t),\ v^o(t),\ p^o(t)\right)\delta v(t)dt\le 0.$$

Теорема 1. Для оптимальности классической экстремали $\left(u^o(t),v^o(t)\right)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенства (52), (58) выполнялись соответственно для всех $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T_1$ и $\delta v(t)\in R^q$, $t\in T_2$.

Непосредственным следствием теоремы 1 является теорема 2.

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $\left(u^o(t),\ v^o(t)\right)$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$u'H_{uu}\left(\theta,x^o(\theta),\ u^o(\theta),\ \psi^o(\theta)\right)u\le 0,$$

для всех $\theta\in[t_0,t_1)$, $u\in R^r$,

$$v'M_{vv}\left(\xi,y^o(\xi),\ v^o(\xi),\ p^o(\xi)\right)v\le 0,$$

для всех $\xi\in[t_1,t_2)$, $v\in R^q$.

Утверждение теоремы 2 есть аналог условия Лежандра — Клебша [9; 10].

Изучим случай вырождения аналога условия Лежандра — Клебша.

Определение 1. Классическую экстремаль $\left(u^o(t),\ v^o(t)\right)$ назовем особым в классическом смысле управлением, если для всех $\theta\in[t_0,t_1)$, $u\in R^r$ и $\xi\in[t_1,t_2)$, $v\in R^q$ выполняются соответственно соотношения

$$u'H_{uu}\left(\theta,x^o(\theta),\ u^o(\theta),\ \psi^o(\theta)\right)u=0,$$
$$v'M_{vv}\left(\xi,y^o(\xi),\ v^o(\xi),\ p^o(\xi)\right)v=0.$$

Предположим, что $\left(u^o(t),\ v^o(t)\right)$ — особое в классическом смысле оптимальное управление, μ — произвольное натуральное число, $\ell_j\ge 0$, $j=\overline{1,\mu}$ — произвольные числа, $u_j\in R^r$ $\left(v_j\in R^q\right)$ — произвольный вектор, $\theta_j\in[t_0,t_1)$ $\left(\xi_j\in[t_1,t_2)\right)$, $j=\overline{1,\mu}$ $\left(t_0\le\theta_1\le\theta_2\le\ldots\le\theta_\mu<t_1\right)$, $\left(t_1\le\xi_1\le\xi_2\le\ldots\le\xi_\mu<t_2\right)$ — произвольные точки непрерывности управления $u^o(t)$ $\left(v^o(t)\right)$.

Положим

$$\delta u_\varepsilon(t)=\sum_{j=1}^{\mu}\delta u\left(t,\varepsilon;\,\theta_j,\ell_j,u_j\right), \tag{59}$$

$$\left(\delta u_\mu(t)=\sum_{j=1}^{\mu}\delta v\left(t,\varepsilon;\,\xi_j,\ell_j,v_j\right)\right), \tag{60}$$

где $\delta u\left(t,\varepsilon;\,\theta_j,\ell_j,u_j\right)$ $\left(\delta v\left(t,\varepsilon;\,\xi_j,\ell_j,v_j\right)\right)$ — игольчатого типа вариация управляющей функции $u^o(t)$ $\left(v^o(t)\right)$, определяемая формулой

$$\delta u\left(t,\varepsilon;\,\theta_j,\ell_j,u_j\right)=\begin{cases}u_j, & t\in\left[\theta_j,\theta_j+\ell_j\,\varepsilon\right),\\ 0, & t\in T_1\setminus\left[\theta_j,\theta_j+\ell_j\,\varepsilon\right),\end{cases} \tag{61}$$

$$\left(\delta v\left(t,\varepsilon;\,\xi_j,\ell_j,v_j\right)=\begin{cases}v_j, & t\in\left[\xi_j,\xi_j+\ell_j\,\varepsilon\right),\\ 0, & t\in T_2\setminus\left[\xi_j,\xi_j+\ell_j\,\varepsilon\right)\end{cases}\right). \tag{62}$$

Суммирование вариаций (61) ((62)) определяется аналогично работам [15–17].

Учитывая (59) ((60)), в неравенстве (52) ((58)) имеем:

$$\varepsilon^2\left[\sum_{i,j=1}^{\mu}\ell_i\,\ell_j\,u_i'K\left(\theta_i,\theta_j\right)u_i+\sum_{i=1}^{\mu}\ell_i\,u_i'H_{ux}\left(\theta_i,x^o\left(\theta_i\right),\,u^o\left(\theta_i\right),\,\psi^o\left(\theta_i\right)\right)\times\right. \tag{63}$$

$$\left.\times\left[\ell_i\,f_u\left(\theta_i,x^o\left(\theta_i\right),\,u^o\left(\theta_i\right)\right)u_i+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_{ij}\,F\left(\theta_i,\theta_j\right)f_u\left(\theta_j,x^o\left(\theta_j\right),\,u^o\left(\theta_j\right)\right)u_j\right]\right]+o\left(\varepsilon^2\right)\le 0,$$

$$\left(\begin{array}{c}\mu^2\left[\sum_{i,j=1}^{\mu}\ell_i\,\ell_j\,v_i'N\left(\xi_i,\xi_j\right)v_j+\sum_{i=1}^{\mu}\ell_i\,v_i'M_{vy}\left(\xi_i,y^o\left(\xi_i\right),\,v^o\left(\xi_i\right),\,p^o\left(\xi_i\right)\right)\times\right.\\ \left.\times\left[\ell_i\,Q_1\left(\xi_i,\xi_i\right)v_i+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j\,Q_1\left(\xi_i,\xi_j\right)v_j\right]\right]+o\left(\mu^2\right)\le 0.\end{array}\right) \tag{64}$$

Из неравенства (63) ((64)) в силу произвольности ε (μ) следует, что

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{\mu}\ell_i\,\ell_j\,u_i'K\left(\theta_i,\theta_j\right)u_j+\sum_{i=1}^{\mu}\ell_i\,u_i'H_{ux}\left(\theta_i,x^o\left(\theta_i\right),\,u^o\left(\theta_i\right),\,\psi^o\left(\theta_i\right)\right)\times\\ \times\left[\ell_i\,f_u\left(\theta_i,x^o\left(\theta_i\right),\,u^o\left(\theta_i\right)\right)u_i+\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j\,F\left(\theta_i,\theta_j\right)f_u\left(\theta_j,x^o\left(\theta_j\right),\,u^o\left(\theta_j\right)\right)u_j\right]\le 0,\end{gathered} \tag{65}$$

$$\left(\begin{array}{c}\sum_{i,j=1}^{\mu}\ell_i\,\ell_j\,v_i'N\left(\xi_i,\xi_j\right)v_j+\sum_{i=1}^{\mu}\ell_i\,v_i'M_{vy}\left(\xi_i,y^o\left(\xi_i\right),\,v^o\left(\xi_i\right),\,p^o\left(\xi_i\right)\right)\times\\ \times\left[\ell_i\,Q_1\left(\xi_i,\xi_i\right)v_i+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j\,Q_1\left(\xi_i,\xi_j\right)v_j\right]\le 0.\end{array}\right) \tag{66}$$

Таким образом, доказана теорема 3.

Теорема 3. Для оптимальности особого в классическом смысле управления $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ необходимо, чтобы для любого натурального числа μ неравенство (65) ((66)) выполнялось для всех $\ell_j \geq 0$, $j = \overline{1,\mu}$, $\theta_j \in [t_0, t_1)$ $\left(\xi_j \in [t_1, t_2)\right)$, $j = \overline{1,\mu}$, $\left(t_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \ldots \leq \theta_\mu < t_1\right)$ $\left(\left(t_1 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_\mu < t_2\right)\right)$ и $u_i \in R^r$ $\left(v_j \in R^q\right)$.

Необходимое условие оптимальности (65) ((66)) относится к классу многоточечных необходимых условий оптимальности особых в классическом смысле управлений [12; 15–21].

Непосредственным следствием теоремы является теорема 4.

Теорема 4. Для особого в классическом смысле оптимального управления $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ поточечное неравенство

$$u'\left[K(\theta,\theta) + H_{ux}\left(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta)\right) f_u\left(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta)\right)\right] u \leq 0, \tag{67}$$

$$\left(v'\left[N(\xi,\xi) + M_{vy}\left(\xi, y^o(\xi),\ v^o(\xi), p^o(\xi)\right) g_v\left(\xi, y^o(\xi),\ v^o(\xi)\right)\right] v \leq 0\right) \tag{68}$$

выполняется для всех $u \in R^r$ $\left(v \in R^q\right)$ $\theta \in [t_0, t_1)$ $\left(\xi \in [t_1, t_2)\right)$.

Следует отметить, что необходимое условие оптимальности (65) ((66)) остается в силе также при вырождении условий оптимальности (67) и (68).

Заключение

В работе впервые рассматривается задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая в различных отрезках времени дифференциальными и интегральными (типа Вольтерра) уравнениями.

При предположении открытости области управления доказаны необходимые условия оптимальности второго порядка, позволяющие при вырождении аналога условия Лежандра — Клебша доказать многоточечные необходимые условия оптимальности особых в классическом смысле управлений. Они позволяют существенно сузить множество классически особых управлений, подозрительных на оптимальность и остаются в силе при вырождении аналога условия Габасова — Кирилловой [10].

Литература

1. Габелко К. Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // Автоматика и телемеханика. 1974. № 12, С. 72–80.

2. Агафонова И. А., Гулин Л. Л., Расина И. В. Математическое моделирование и оптимизация процесса метилирования динатриевой соли сульфаминоантиприна // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 1978. 10 нояб. № 3457. 19 с.

3. Величенко В. В. Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. 1976. Т. 176, № 4. С. 754–756.

4. Кириченко С. Б. Оптимальное управление системами с промежуточными фазовыми ограничениями // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 4. С. 104–111.

5. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление с разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987. 226 с.

6. Захаров Г. К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. 1983. № 6. С. 32–36.

7. Исмайлов Р. Р., Мансимов К. Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2006. № 10. С. 1758–1770.

8. Плотников В. И., Сумин В. И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса — Дарбу // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1972. № 1. С. 61–67.

9. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

10. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М., 2013. 256 с.

11. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 256 с.

12. Абдуллаев А. А., Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку: ЭЛМ, 2013. 224 с.

13. Васильева А. Б., Тихонов А. Н. Интегральные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1989, 156 с.

14. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1977. Т. 15. С. 131–138.

15. Гороховик В. В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990. 239 с.

16. Гороховик В. В. Необходимые условия оптимальности высокого порядка для задачи управления с терминальными ограничениями // Препринт ИМ АН БССР. 1982. № 1 (126). 50 с.

17. Гороховик С. Я. Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференц. уравнения. 1975. № 10. С. 1765–1773.

18. Мансимов К. Б. К оптимальности особых, в классическом смысле, управлений в системах Гурса — Дарбу // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 4. С. 808–812.

19. Мансимов К. Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: ЭЛМ, 1999. 174 с.

20. Мансимов К. Б. Особые управления в задачах управления системами с распределенными параметрами (обзор) // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 42. С. 39–83.

21. Мансимов К. Б., Марданов М. Д. Качественная теория оптимального управления системами Гурса — Дарбу. Баку: ЭЛМ, 2010. 360 с.

AN ANALOG OF THE EULER EQUATION AND NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS OF THE SECOND ORDER IN ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH VARIABLE STRUCTURE

Aidyn A. Alekberov
Research Assistant,
Lankaran State University
50 Azi Aslanova Prospect, Lankaran Az4200, Azerbaijan
E-mail: kmansimov@mail.ru

The article considers an optimal control problem with variable structure, described by a combination of differential and integral equations, as well as by a performance functional of terminal type. Control fields are open. We have proved implicit necessary optimality conditions of the first and second orders. An analog of the Euler equation and an analog of Legendre–Clebsch condition are proved on the basis of studying necessary optimality conditions. The obtained new sequences of multipoint necessary conditions for the optimality of classical singular controls allow us to narrow down the set of admissible controls suspicious for optimality.

Keywords: one-dimensional Volterra integral equation of the second kind; ordinary differential equation; necessary optimality condition; variation of the performance functional; Euler equation.

References

1. Gabelko K. N. Posledovatelnoe uluchshenie mnogoetapnykh protsessov [Sequential Improvement of Multi-Stage Processes]. *Automation and Remote Control.* 1974. No. 12. Pp. 72–80.

2. Agafonova I. A., Gulin L. L., Rasina I. V. Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya protsessa metilirovaniya dinatrievoi soli sulfaminoantipirina [Mathematical Modeling and Optimization of the Methylation of Sulfaminoantipyrine Disodium Salt]. *Dep. v VINITI AN SSSR.* 1978. Nov. 10. No. 3457. 19 p.

3. Velichenko V. V. Optimalnoe upravlenie sostavnymi sistemami [Optimal Control of Compound Systems]. *Soviet Mathematics.*1976. V. 176. No. 4. Pp. 754–756.

4. Kirichenko S. B. Optimalnoe upravlenie sistemami s promezhutochnymi fazovymi ogranicheniyami [Optimal Control of Systems with Intermediate Constraints on the State]. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1994. No. 4. Pp. 104–111.

5. Ashchepkov L. T. *Optimalnoe upravlenie s razryvnymi sistemami* [Optimum Control with Discontinuous Systems]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1987. 226 p.

6. Zakharov G. K. Optimizatsiya stupenchatykh sistem s upravlyaemymi usloviyami perekhoda [Optimization of Step Systems with Controlled Transition Conditions]. *Automation and Remote Control.* 1983. No. 6. Pp. 32–36.

7. Ismailov R. R., Mansimov K. B. Ob usloviyakh optimalnosti v odnoi stupenchatoi zadache upravleniya [On Optimality Conditions in One Step Control Problem]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2006. No. 10. Pp. 1758–1770.

8. Plotnikov V. I., Sumin V. I. Optimizatsiya obyektov s raspredelennymi parametrami, opisyvaemye sistemami Gursa-Darbu [Optimization of Objects with Distributed Parameters Described by Goursat–Darboux Systems]. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1972. No. 1. Pp. 61–67.

9. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. *Optimalnoe upravlenie* [Optimal Control]. Moscow: Nauka, 1979. 432 p.

10. Gabasov R., Kirillova F. M. *Osobye optimalnye upravleniya* [Singular Optimal Controls]. Moscow: URSS Publ., 2013, 256 p.

11. Gabasov R., Kirillova F. M. *Optimizatsiya lineinykh sistem* [Linear System Optimization]. Minsk: Belarus State Univ. Publ., 1973, 256 p.

12. Abdullaev A. A., Mansimov K. B. *Neobkhodimye usloviya optimalnosti v protsessakh, opisyvaemykh sistemoi integralnykh uravnenii tipa Volterra* [Necessary Conditions for Optimality in Processes Described by a Set of Volterra Integral Equations]. Baku: ELM Publ., 2013, 224 s.

13. Vasilyeva A. B., Tikhonov A. N. *Integralnye uravneniya* [Integral Equations]. Moscow: Moscow State Univ. Publ., 1989. 156 p.

14. Tsalyuk Z. B. Integralnye uravneniya Volterra [Volterra Integral Equations]. *Journal of Mathematical Sciences.* 1977. V. 15. Pp. 131–138.

15. Gorokhovik V. V. *Vypuklye i negladkie zadachi vektornoi optimizatsii* [Convex and Nonsmooth Vector Optimization Problems]. Minsk: Nauka i tekhnika Publ., 1990. 239 p.

16. Gorokhovik V. V. Neobkhodimye usloviya optimalnosti vysokogo poryadka dlya zadachi upravleniya s terminalnymi ogranicheniyami [Necessary High-Order Optimality Conditions for a Control Problem with Terminal Constraints]. *Preprint IM AN BSSR*. Minsk, 1982. No. 1 (126). 50 p.

17. Gorokhovik S. Ya. Neobkhodimye usloviya optimalnosti v zadache s podvizhnym pravym kontsom traektorii [Necessary Optimality Conditions in a Problem with Variable End Point of a Trajectory]. *Differential Equations.* 1975. No. 10. Pp. 1765–1773.

18. Mansimov K. B. K optimalnosti osobykh, v klassicheskom smysle, upravlenii v sistemakh Gursa-Darbu [On Optimality of Classical Singular Controls in Goursat–Darboux Systems]. *Soviet Mathematics*. 1986. V. 286. No. 4. Pp. 808–812.

19. Mansimov K. B. *Osobye upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniem* [Singular Controls in the Systems with Delay]. Baku: ELM Publ., 1999, 174 p.

20. Mansimov K. B. Osobye upravleniya v zadachakh upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami (obzor) [Special Controls in the Problems of Systems Control with Distributed Parameters (review)]. *Journal of Mathematical Sciences.* 2006. V. 42, Pp. 39–83.

21. Mansimov K. B., Mardanov M. D. *Kachestvennaya teoriya optimalnogo upravleniya sistemami Gursa-Darbu* [Qualitative Theory of Optimal Control for Goursat–Darboux Systems]. Baku: ELM Publ., 2010. 360 p.