МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

УДК 51-7
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-4-65-72

МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

© Пурбо Ламажапович Абидуев
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятская государственная сельскохозяйственная академия
имени В. Р. Филиппова
Россия, 670024, г. Улан-Удэ, ул. Пушкина, 8
E-mail: apl087@yandex.ru

© Дармаев Тумэн Гомбоцыренович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: dtg@bsu.ru

© Дамбаев Жаргал Гомбоевич
доктор технических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: g.dambaev@rambler.ru

В данной работе рассматривается нестационарное безотрывное обтекание плоским потенциальным потоком несжимаемой жидкости произвольного профиля, колеблющегося как твердое тело с малой амплитудой по некоторому гармоническому закону. Для устранения особенности ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно величины нестационарной скорости в точке задней кромки профиля используется постулат Кутта — Жуковского. Гидродинамический смысл проведенного устранения особенности ядра состоит в том, что решение ищется в классе функций, обеспечивающих непрерывность давления всюду в потоке, в том числе и в острой задней кромке. Критическая линия тока стационарного потока, необходимая для вычисления несобственных интегралов, определяется как решение задачи Коши. Заменяя интегралы в уравнениях конечными суммами, получаем системы из N алгебраических уравнений относительно искомых величин.
Ключевые слова: произвольный профиль; нестационарное обтекание; идеальная несжимаемая жидкость; интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Для цитирования:
Абидуев П. Л., Дармаев Т. Г., Дамбаев Ж. Г. Метод расчета нестационарного обтекания произвольного профиля // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 4. С. 65–72.

Введение

В данной работе рассматривается нестационарное безотрывное обтекание плоским потенциальным потоком несжимаемой жидкости профиля, колеблющегося как твердое тело с малой амплитудой по некоторому гармоническому закону. По данной проблеме опубликовано большое число специальных монографий и журнальных статей, но практически все имеющиеся результаты получены для слабоизогнутых и тонких профилей [1–10]. В данной же работе предлагается метод расчета нестационарного обтекания произвольного или телесного профиля, приведенного ранее авторами в работе [11] к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно величины стационарной скорости $v_0(s)$ и амплитудного значения нестационарной части относительной скорости *v(s)*.

1 Устранение особенности ядра

Введем прямоугольную систему координат OXY, так, что ось OX совпадает с геометрической хордой профиля, в среднем положении, причем x=0 соответствует носику, а координата x=1 — хвостику профиля. Обозначим через L_t — контур профиля в момент времени t, через L — контур профиля в среднем положении и, соответственно, C_t и C — вихревые следы. Предполагаем, что в бесконечном удалении перед профилем жидкость имеет постоянную скорость V_∞.

Рассмотрим полученное ранее авторами [11] интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно величины нестационарной скорости $v(s)$:

$$\frac{1}{2}v(s)-\frac{1}{2\pi}\int_L v(\sigma)R(s,\sigma)d\sigma = F(v_0(s),s) \tag{1}$$

$$R(s,\sigma)=K(s,\sigma)-jq\int_0^\infty e^{-jqu}K(s,u)du\ ,$$

$$K(s,\sigma)=-\mathrm{Re}_i\left[\frac{ie^{i\alpha(\sigma)}}{z(s)-\zeta(\sigma)}\right]=\frac{(x(s)-\zeta(\sigma))\sin\alpha(s)-(y(s)-\eta(\sigma))\cos\alpha(s)}{(x(s)-\zeta(\sigma))^2+(y(s)-\eta(\sigma))^2}$$

$$F(v_0(s),s)=\mathrm{Re}_i\,\Phi(s)+\frac{1}{2\pi}q^2A_1\times\int_0^\infty e^{-jqu}K(s,u)du\ ,$$

$$\Phi(s)=e^{i\alpha(s)}\left(\frac{jq}{2\pi}\int_L\frac{g(\sigma)e^{i\alpha(\sigma)}d\sigma}{z-\varsigma}-\frac{1}{2\pi i}\int_L v_0(\sigma)\frac{g(s)-g(\sigma)}{(z-\varsigma)^2}d\sigma+\right.$$
$$\left.+\frac{ie^{-i\alpha(s)}\beta(s)}{2}v_0(s)-\frac{jq}{2}g(s)\right)$$

$$A_1=\mathrm{Re}_i\int_L g(\sigma)e^{i\alpha(\sigma)}d\sigma=\int_L(g_xdx+g_ydy)\ ,$$

где i — мнимая единица, j — мнимая единица, связанная с временными процессами, $\alpha(s)$ — угол наклона к оси OX касательной к контуру L, $\alpha_1(s,t)=\alpha(s)+\beta(s)e^{j\omega t}$ — угол между касательной к контуру L_t и осью OX, $q=\dfrac{\omega b}{V_\infty}$ — число Струхаля, ω — круговая частота колебаний, $g=g_x-ig_y$ — комплексная форма гармонических колебаний профиля. Интегрирование по контуру ведется в положительном направлении (против часовой стрелки). Все линейные размеры нормированы к длине хорды профиля b, а величины, имеющие размерность скорости, — к скорости набегающего потока V_∞.

Особенностью уравнения (1) является то, что его ядро и правая часть конкретно выписываются лишь при известном решении соответствующей стационарной задачи. Это связано с определением вихревого следа C_t за профилем, который приближенно совпадает с критической линией тока стационарного потока *C*. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что нам известны все характеристики стационарного потока.

В этих формулах контур профиля L представляет собой кривую, гладкую в смысле Ляпунова всюду, за исключением задней кромки B, которая является точкой возврата. Выбор контура L с точкой возврата в задней кромке определен требованием однозначности направления скорости в этой точке, что необходимо для построения линии вихревого следа за профилем. Выражение ядра R(s,σ) отличается от ядра K(s,σ) для соответствующей стационарной задачи наличием членов, содержащих несобственный интеграл по линии вихревого следа, который моделируется линией разрыва касательных скоростей, расположенной вдоль критической линии тока стационарного потока. Этот интеграл сходится и для практических расчетов можно перейти к конечному промежутку интегрирования.

Интегральное уравнение (1) с данным ядром справедливо для всех точек контура L за исключением задней кромки B, в которой s=σ=o и ядро имеет полюс первого порядка. Для однозначного определения решения уравнения (1) используется известный постулат Кутта — Жуковского, который формулируется так: скачок касательной составляющей скорости жидкости в задней кромке равен интенсивности сходящего с нее вихря:

$$v(+0)+v(-0)=-\frac{jq}{v_0(0)}\int_L v(s)ds+\frac{q^2}{v_0(0)}A_1, \qquad (2)$$

где $v_0(0)$ — скорость стационарного потока в точке B, v(+o) и v(–o) — предельные значения относительной скорости жидкости при подходе к точке B снизу и сверху, соответственно.

Условие (2) используется для устранения особенности ядра уравнения (1) в задней кромке. Из (1) следует, что:

$$v(\pm 0) = \frac{1}{\pi}\int_L v(\sigma)R(\pm 0,\sigma)d\sigma + 2F(\pm 0)\,. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) с учетом (2) и (3) запишется в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}v(s) - \frac{1}{2\pi}\int_L v(\sigma)\left(R(s,\sigma) - \frac{1}{2}\left(R(+0,\sigma) + R(-0,\sigma) + \frac{jq\pi}{v_0(0)}\right)\right)d\sigma = \\ &= F(s) - \frac{1}{2}\left(F(+0) + F(-0) - \frac{q^2}{2v_0(0)}A_1\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Ядро полученного уравнения (4) не имеет особенностей на контуре L, и его решение совпадает с решением (1).

Гидродинамический смысл проведенного устранения особенности ядра состоит в том, что решение уравнения (1) ищется в классе функций, обеспечивающих непрерывность давления всюду в потоке, в том числе и в острой задней кромке.

2 Метод расчета

Интегральное уравнение (4) разделим на действительную и мнимую по j части. Для этого запишем его в операторном виде:

$$(A + jB)v(s) = a + jb, \quad v(s) = v_1(s) + jv_2(s)\,, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}A = E - \frac{1}{\pi}\int_L &\left(K(s,\sigma) - \frac{K(+0,\sigma) + K(-0,\sigma)}{2} - \right.\\ &\left. - q\int_0^\infty \sin qu\left(K(s,u) - \frac{K(+0,u) + K(-0,u)}{2}\right)du\right)d\sigma,\end{aligned} \tag{6}$$

$$B = \frac{q}{\pi}\int_L \left(\int_0^\infty \cos qu\left(K(s,u) - \frac{K(+0,u) + K(-0,u)}{2}\right)du - \frac{\pi}{2v_0(0)}\right)d\sigma, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}a = 2\,\mathrm{Re}_i&\left(\frac{e^{i\alpha(s)}}{2\pi i}\int_L v_0(\sigma)\frac{g(s) - g(\sigma)}{(z - \varsigma)^2}d\sigma\right) + \frac{q^2 A_1}{2\pi}\int_0^\infty \cos(qu)K(s,u)du - \\ &- \frac{1}{2}\left(a(+0) + a(-0) - \frac{q^2 A_1}{2v_0(0)}\right),\end{aligned} \tag{8}$$

$$b = q\,\mathrm{Re}_i\left(e^{i\alpha(s)}\left(\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{g}(\sigma)e^{i\alpha(\sigma)}d\sigma}{z-\varsigma} - q\overline{g}(s)\right)\right)+ \\ +\frac{q^2A_1}{\pi}\int_0^\infty \sin(qu)K(s,u)du - \frac{b(+0)+b(-0)}{2}. \tag{9}$$

Критическая линия тока стационарного потока, необходимая для вычисления несобственных интегралов в формулах (6)–(9), определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_{0x}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = v_{0y}(x,y), \end{cases} \\ x(0) = x_B = 1, \quad y(0) = y_B = 0. \tag{10}$$

Здесь (x_B, y_B) — координата выходной кромки профиля в среднем положении. Функции $v_{0x}(x,y)$, $v_{0y}(x,y)$ определяются по формуле:

$$v_{0x} - iv_{0y} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{v_0(\sigma)d\sigma}{z(\tau)-\zeta(\sigma)} + e^{-i\theta}, \tag{11}$$

где $z(\tau)-\zeta(\sigma) = (x(\tau)-\xi(\sigma)) + i(y(\tau)-\eta(\sigma))$, τ — длина дуги контура, отсчитываемая вдоль линии вихревого следа от задней кромки, θ — геометрический угол атаки, образуемый вектором скорости потока на бесконечности $\overline{V}_\infty$ и осью OX.

Разделяя уравнение (5) на действительную и мнимую части, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} Av_1(s) - Bv_2(s) = a, \\ Bv_1(s) + Av_2(s) = b. \end{cases} \tag{12}$$

Из первого уравнения находим:

$$v_1(s) = A^{-1}Bv_2(s) + A^{-1}a. \tag{13}$$

Подставляя (13) во второе уравнение (12) и решая полученное уравнение относительно $v_2(s)$, имеем:

$$v_2(s) = (BA^{-1}B + A)(b - BA^{-1}a). \tag{14}$$

Откуда, подставляя в (13),

$$v_1(s) = A^{-1}B(BA^{-1}B + A)(b - BA^{-1}a) + A^{-1}a. \tag{15}$$

Далее заменой интегралов в уравнениях (6)–(9), (11) конечными суммами методом, предложенным в работах [12–14], получим системы из N алгебраических уравнений относительно искомых величин, которые можно решить с применением ЭВМ.

Заключение

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно величины нестационарной скорости $v(s)$ справедливо для всех точек контура L за исключением задней кромки B, в которой s=σ=o и ядро имеет полюс первого порядка. Для устранения особенности ядра уравнения используется постулат Кутта — Жуковского. Гидродинамический смысл проведенного устранения особенности ядра состоит в том, что решение ищется в классе функций, обеспечивающих непрерывность давления всюду в потоке, в том числе и в острой задней кромке. Критическая линия тока стационарного потока, необходимая для вычисления несобственных интегралов, определяется как решение задачи Коши (10). Заменяя интегралы в уравнениях (6)–(9), (11) конечными суммами, получаем системы из N алгебраических уравнений относительно искомых величин, которые предполагается в дальнейшем решить с применением ЭВМ.

Литература

1. Prandtl L. Uber die Enstehung von Wirbeln in einer idealen Flussigkeit // Vortrage zur Hydro-und Aerodynamik. Berlin, 1924. P. 18–33.

2. Чаплыгин С. А. О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущее в нем цилиндрическое крыло // Труды ЦАГИ. 1926. Вып. 19. 74 с.

3. Келдыш М. В, Лаврентьев М. А. К теории колеблющегося крыла // Технические заметки ЦАГИ. 1935. № 45. С. 48–52.

4. Седов Л. И. К теории неустановившихся движении внутри жидкости // Труды ЦАГИ. 1935. Вып. 229. 40 с.

5. Седов Л. И. Теория плоских движений идеальной жидкости. М.: ГТТИ, 1939. 144 с.

6. Поляков Н. Ф. Теория нестационарных движений несущей поверхности. Л., 1960. 84 с.

7. Горелов Д. Н. Теория крыла в нестационарном потоке. Новосибирск, 1975. 152 с.

8. Горелов Д. Н., Куляев Р. Л. Нелинейная задача о нестационарном обтекании профиля несжимаемой жидкостью // Известия АН СССР. МЖГ. 1971. № 6. С. 38–47.

9. Головкин В. А. Нелинейная задача о неустановившемся обтекании произвольного профиля со свободно деформирующимся вихревым следом // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 3. С. 1–11.

10. Павловец Г.А. Методы расчета обтекания сечения крыла идеальным несжимаемым потоком // Труды ЦАГИ. 1971. Вып. 1344. 72 с.

11. Дармаев Т. Г., Дамбаев Ж. Г. О нестационарном обтекании произвольного профиля // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2013. № 2. С. 60–69.

12. Дармаев Т. Г., Цыдыпов Б. Д. Метод расчета стационарного обтекания произвольного профиля // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2016. № 3. С. 51–56.

13. Рябченко В. П., Сарян В. Э. К расчету аэродинамических характеристик решеток профилей произвольной формы // Известия АН СССР. МЖГ. 1972. №2. С. 105–112.

14. Рябченко В. П. Нестационарные аэродинамические характеристики решеток произвольных профилей, вибрирующих в потенциальном потоке несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С. 15–20.

A METHOD FOR CALCULATING NON-STATIONARY FLOW OF AN ARBITRARY PROFILE

Purbo L. Abiduev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Fillipov Buryat State Academy of Agriculture
8 Pushkina St., Ulan-Ude 670024, Russia
E-mail: apl087@yandex.ru

Tumen G. Darmaev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: dtg@bsu.ru

Zhargal G. Dambaev
Dr. Sci. (Engineering), Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: g.dambaev@rambler.ru

The article deals with non-stationary continuous flow of an arbitrary profile fluctuating as a solid with small amplitude under some harmonic law by potential flow of incompressible liquid. We have used the Kutta-Zhukovsky postulate to eliminate the features of a kernel of Fredholm integral equation of the second kind with respect to the value of non-stationary speed at the point of profile trailing edge. The hydrodynamic meaning of the carried-out elimination of the features of a kernel lies in the fact that the decision is sought in the class of functions that ensure the continuity of pressure everywhere in the flow, including the sharp trailing edge. The critical streamline of a stationary flow necessary for calculating improper integrals is defined as a solution to the Cauchy problem. Replacing the integrals in the equations with finite sums, we obtain systems of N algebraic equations with respect to the sought quantities.
Keywords: arbitrary profile; unsteady flow; ideal incompressible liquid; Fredholm integral equations of second kind.

References

1. Prandtl L. Uber die Enstehung von Wirbeln in einer idealen Flussigkeit. *Vortrage zur Hydro-und Aerodynamik.* Berlin, 1924. Pp. 18–33.
2. Chaplygin S. A. O vliyanii ploskoparallelnogo potoka vozdukha na dvizhushchee v nem tsilindricheskoe krylo [About the Influence of Plane-Parallel Air Flow on the Cylindrical Wing Moving in It]. *Trudy TsAGI.* 1926. Vol. 19. 74 p.
3. Keldysh M. V, Lavrentyev M. A. K teorii koleblyushchegosya kryla [On the Theory of Oscillating Wing]. *Tekhnicheskie zametki TsAGI.* 1935. No. 45. Pp. 48–52.

4. Sedov L. I. K teorii neustanovivshikhsya dvizhenii vnutri zhidkosti [On the Theory of Unsteady Motions in Liquid]. *Trudy TsAGI.* 1935. Vol. 229. 40 p.

5. Sedov L. I. *Teoriya ploskikh dvizhenii idealnoi zhidkosti* [Theory of Planar Motions of an Ideal Fluid]. GTTI, 1939. 144 p.

6. Polyakov N. Ph. Teoriya nestatsionarnykh dvizhenii nesuschei poverkhnosti [Theory of Non-Stationary Motions of a Carrying Surface]. Leningrad, 1960. 84 p.

7. Gorelov D. N. Teoriya kryla v nestatsionarnom potoke [Wing Theory for Unsteady Flow]. Novosibirsk, 1975. 152 p.

8. Gorelov D. N., Kulyaev R. L. Nelineinaya zadacha o nestatsionarnom obtekanii profilya neszhimaemoi zhidkostiyu [A Nonlinear Problem of Unsteady Flow of a Profile with an Ideal Liquid]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza.* 1971. No. 6. Pp. 38–47.

9. Golovkin V. A. Nelinaya zadacha o neustanovivshemsya obtekanii proizvolnogo profilya so svobodno deformiruyuschimsya vikhrevym sledom [A Nonlinear Problem of Unsteady Flow of An Arbitrary Profile with a Freely Deformed Vortex Sheet]. *TsAGI Science Journal*. 1972. Vol. 3. No. 3. Pp. 1–11.

10. Pavlovets G. A. Metody rascheta obtekanya secheniya kryla idealnym neszhimaemym potokom [Methods for Calculating the Flow of Wing Section with an Ideal Incompressible Flow]. *Trudy TsAGI.* 1971. Vol. 1344. 72 p.

11. Darmaev T. G., Dambaev Zh. O nestatsionarnom obtekanii proizvolnogo profilya [About the Unsteady Flow of an Arbitrary Profile]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika.* 2013. No. 2. Pp. 60–69.

12. Darmaev T. G., Tsydypov B. D. Metod rascheta statsionarnogo obtekaniya proizvolnogo profilya [A Method for Calculating the Stationary Flow of an Arbitrary Profile]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika*. 2016. Vol. 3. Pp. 51–56.

13. Ryabchenko V. P., Saryan V. E. K raschetu aerodinamicheskikh kharakteristik reshetok profilei proizvolnoi formy [On Calculation of Aerodynamic Characteristics of the Lattices of Arbitrarily-Shaped Profiles]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza.* 1972. No. 2. Pp.105–112.

14. Ryabchenko V. P. Nestatsionarnye aerodynamicheskie kharakteristiki reshetok proizvolnykh profilei, vibriruyushikh v potentsialnom potoke neszhimaemoi zhidkosti [Non-Stationary Aerodynamic Characteristics of Lattices of Arbitrary Profiles Vibrating in a Potential Flow of Incompressible Liquid]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza.* 1974. No. 1. Pp. 15–20.