ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.957
DOI: 10.18101/2304-5728-2020-1-3-10

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ БУССИНЕСКА И ЕГО МНОГОМЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ[1]

© Косов Александр Аркадьевич
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления
им. В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: kosov_idstu@mail.ru

© Семенов Эдуард Иванович
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления
им. В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: edwseiz@gmail.com

© Тирских Владимир Викторович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Иркутский государственный университет путей сообщения
Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15
E-mail: tirskikh_vv@irgups.ru

Изучается нелинейное уравнение в частных производных четвертого порядка. Правая часть уравнения содержит многомерные аналоги уравнения Буссинеска, выражаемые через двукратные операторы Лапласа и квадраты градиентов искомых функций. С помощью специальной конструкции точного решения исходное уравнение в частных производных редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены примеры построенных точных решений уравнения типа Буссинеска, в том числе выражаемые через эллиптические функции Вейерштрасса и Якоби по времени и анизотропные по пространственным переменным. Найденные точные решения имеют не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и верификации численных методов и алгоритмов построения приближенных решений краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка, моделирующих гидродинамические процессы и явления.
Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений; оператор Лапласа; нелинейное уравнение типа Буссинеска; редукция; точные решения.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00746).

Для цитирования:
Косов А. А., Семенов Э. И., Тирских В. В. Обобщенное уравнение Буссинеска и его многомерные точные решения // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. № 1. С. 3–10.

Введение

Некоторые задачи гидродинамики и механики сводятся к нелинейному уравнению Буссинеска [1; 2; 3]

$$u_{tt} = \partial_x^2(\beta u_{xx} + \mu u^2 + \varepsilon u).$$

В гидродинамике это уравнение описывает волны, которые могут перемещаться как влево, так и вправо. В механике к уравнению Буссинеска приводит задача Ферми — Пасты — Улама [1], когда в динамическую систему, состоящую из 64 идентичных частиц единичной массы, вносятся нелинейные возмущения. Хорошо известно [1] его решение в виде уединенной волны (солитона), которое имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{6\beta c^2}{\mu \cos^2(x - \omega t + c_0)}, \qquad \omega = c\sqrt{\varepsilon - 4\beta c^2},$$

где $c \neq 0, c_0$ — произвольные постоянные. Многомерный аналог уравнения Буссинеска можно записать как

$$u_{tt} = \Delta(\beta\, \Delta u + \mu u^2 + \varepsilon u). \tag{1}$$

Цель работы — построение точных многомерных решений следующего уравнения в частных производных четвертого порядка

$$u_{tt} = \Delta((k u + \beta)\Delta u + \sigma |\nabla u|^2 + \mu u^2 + \varepsilon u), \tag{2}$$

которое будем называть обобщенным уравнением Буссинеска, так как при $k = \sigma = 0$ из него получается обычное уравнение Буссинеска (1). Здесь $u \overset{\Delta}{=} u(\mathrm{x},t)$, $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$, $u_{tt} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u$, Δ — n-мерный оператор Лапласа; ∇ — оператор набла взятия градиента; $k, \beta \neq 0, \sigma, \mu \neq 0, \varepsilon$ — произвольные параметры.

Точные решения уравнения (2) будем отыскивать методом обобщенного разделения переменных [4; 5]

$$u(\mathrm{x},t) = \psi(t)\, W(\mathrm{x}) + \varphi(t) \tag{3}$$

$$W(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}(A\mathrm{x},\mathrm{x}) + (\mathbf{B},\mathrm{x}) + C, \tag{4}$$

где $\psi(t), \varphi(t)$ — неизвестные функции времени; ненулевая числовая симметрическая матрица A размера $n \times n$, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathrm{R}^n$ и константа $C \in \mathrm{R}$ подлежат определению. Здесь и далее $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярное произведение в R^n.

Отметим, что конструкция типа (4) ранее успешно использовалась для построения точных решений нелинейных параболических систем со степенными нелинейностями [6; 7] и для нелинейной системы уравнений в частных производных первого порядка [8]. В [9] найдены точные многомерные решения систем нелинейных уравнений типа Буссинеска с линейными взаимосвязями. Решения некоторых нелинейных гиперболических уравнений с функциональным разделением переменных получены в [10].

1 Редукция к системе ОДУ

После подстановки функции (3) в уравнение (2) с учетом очевидных равенств

$$\Delta\,((k\,u+\beta)\,\Delta u+\sigma|\nabla u|^2+\mu u^2+\varepsilon\,u)=k\left[u\,\Delta\,(\Delta u)+(\Delta u)^2+2(\nabla u,\nabla\Delta\,u)\right]+$$

$$+\beta\,\Delta(\Delta u)+\sigma\,\Delta|\nabla u|^2+2\mu(u\,\Delta u+|\nabla u|^2)+\varepsilon\,\Delta u,$$

$|\nabla W(\mathrm{x})|^2=(A\mathrm{x}^2,\mathrm{x})+2(A\mathbf{B},\mathrm{x})+|\mathbf{B}|^2$, где $\nabla W(\mathrm{x})=(\mathrm{tr}\,A)$ — след матрицы A, и несложных преобразований приходим к равенству

$$(\psi''-2\,\mu\,(\mathrm{tr}\,A)\,\psi^2)\left(\frac{1}{2}(A\mathrm{x},\mathrm{x})+(\mathbf{B},\mathrm{x})+C\right)+\varphi''=\left(k\left(\mathrm{tr}\,A\right)^2+2\,\sigma\,(\mathrm{tr}\,A^2)\right)\psi^2+$$

$$+2\,\mu\,\psi\,\varphi(\mathrm{tr}\,A)+2\,\mu((A^2\mathrm{x},\mathrm{x})+2\,(A\mathbf{B},\mathrm{x})+|\mathbf{B}|^2)\,\psi^2+\varepsilon\,(\mathrm{tr}\,A)\,\psi.$$

Очевидно, что если числовая симметрическая матрица A, постоянный вектор $\mathbf{B}\in\mathrm{R}^n$ и константа $C\in\mathrm{R}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений (САУ)

$$A=2\delta\,A^2,\qquad \mathbf{B}=2\delta\,A\mathbf{B},\qquad C=\delta|\mathbf{B}|^2, \tag{5}$$

где $\delta\neq 0$ — константа разделения, то последнее равенство сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка:

$$\psi''=\lambda\,\psi^2 \tag{6}$$

$$\varphi''=f(t)\,\varphi+g(t) \tag{7}$$

Здесь введены обозначения

$$\lambda=2\mu\left(\frac{1}{\delta}+\mathrm{tr}\,A\right), \tag{8}$$

$$f(t)=2\,\mu\;(\mathrm{tr}\,A)\,\psi,\quad g(t)=\left(k\left(\mathrm{tr}\,A\right)^2+2\sigma(\mathrm{tr}\,A^2)\right)\psi^2+\varepsilon\,(\mathrm{tr}\,A)\,\psi. \tag{9}$$

Отметим, что САУ вида (5) ранее была получена и исследована в [6; 8]. Поэтому в этой работе мы приведем только пример функций (4), коэффициенты которой удовлетворяют САУ (5).

Пример 1. В трехмерном случае $n = 3$ для построения анизотропных по пространственным переменным точных решений уравнения (2) можно использовать, например, следующие функции

$$W_1(x,y,z) = \frac{1}{36\delta}\left[5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy - 8xz - 4yz\right] + \\ + l_1 x - 2(l_1 + l_2) y + l_2 z + \delta(5l_1^2 + 8l_1 l_2 + 5l_2^2), \tag{10}$$

$$W_2(x,y,z) = \frac{1}{36\delta}\left[5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy + 4xz - 4yz\right] + \\ + l_1 x + l_2 y + 2(l_1 - l_2) z + \delta(5l_1^2 - 8l_1 l_2 + 5l_2^2), \tag{11}$$

$$W_3(x,y,z) = \frac{1}{36\delta}\left[8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz + 8yz\right] + \\ + 2(l_2 - l_1) x + l_1 y + l_2 z + \delta(5l_1^2 - 8l_1 l_2 + 5l_2^2). \tag{12}$$

Для построения радиально-симметричных решений будем использовать функцию

$$W_0(x,y,z) = \frac{1}{4\delta}\left[(x + 2\delta l_1)^2 + (y + 2\delta l_2)^2 + (z + 2\delta l_3)^2\right] \tag{13}$$

Здесь $\delta \neq 0, l_i, i = 1, 2, 3$ — произвольные параметры.

2 О точных решениях системы ОДУ

В системе ОДУ (6), (7) нелинейным является только уравнение для определения функции $\psi(t)$. Поэтому основное внимание уделим его интегрированию. Как показано в [10], при параметре $\lambda = 6$ ОДУ (6) имеет общее решение

$$\psi(t) = \wp(t + C_2), \tag{14}$$

где $\wp$ — функция Вейерштрасса с инвариантами, $g_2 = 0, g_3 = C_1$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В общем случае ОДУ (6) сводится к следующей квадратуре

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2/3\,\lambda\psi^3 + C_1}} = t - t_0 \quad , \tag{15}$$

где C_1, t_0— произвольные постоянные. При $C_1 = 0$ имеем частное решение

$\psi(t) = \dfrac{6}{\lambda}(t-t_0)^{-2}$. Для этого частного решения из формул (9) получим

$$f(t) = \mu_1(t-t_0)^{-2},\, g(t) = \theta_1(t-t_0)^{-4} + \theta_2(t-t_0)^{-2},$$

где $\mu_1 = \dfrac{12\,\mu\,(\mathrm{tr}\,A)}{\lambda}$, $\theta_1 = \dfrac{36}{\lambda^2}(k\,(\mathrm{tr}\,A)^2 + 2\sigma\,(\mathrm{tr}\,A^2))$, $\theta_2 = \dfrac{6\varepsilon\,(\mathrm{tr}\,A)}{\lambda}$.

Для этих функций $f(t), g(t)$ общее решение ОДУ (7) имеет вид

$$\varphi(t) = C_1(t-t_0)^{\nu_1} + C_2(t-t_0)^{\nu_2} + \frac{6\theta_2(t-t_0)^2 - \mu_1(\theta_1 + \theta_2(t-t_0)^2)}{\mu_1(\mu_1-6)(t-t_0)^2}, \qquad (16)$$

где $\nu_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\mu_1+6}$, $\nu_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\mu_1+6}$, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2. В трехмерном случае $n=3$ обобщенное уравнение Буссинеска (2) имеет анизотропные по пространственным переменным точные решения $u_i(x,y,z,t) = \psi(t)\,W_i(x,y,z) + \varphi(t)$, где $W_i(x,y,z)$, $i = 1, 2, 3$ приведены в примере 1, а функции $\psi(t), \varphi(t)$ имеют вид

$$\psi(t) = \frac{3\delta}{2\mu}(t-t_0)^{-2},$$

$$\varphi(t) = C_1(t-t_0)^{\nu_1} + C_2(t-t_0)^{\nu_2} + \frac{3(k+\sigma)}{4\mu^2}(t-t_0)^{-2} - \frac{\varepsilon}{2\mu},$$

где $\nu_1 = (1-\sqrt{13})/2$, $\nu_2 = (1+\sqrt{13})/2$, C_1, C_2, t_0 — произвольные постоянные.

В общем, вычислив интеграл (15) при $C_1 \neq 0$, получим, что зависимость ψ от переменной t задается неявно равенством, содержащим эллиптический интеграл первого рода. При этом при определенных значениях постоянной C_1 можно получить функцию $\psi(t)$ в явном виде, выражающемся соотношением, содержащим эллиптические функции Якоби.

Заключение

В статье получены явные выражения точных многомерных решений уравнения типа Буссинеска, выраженные в элементарных и эллиптических функциях Вейерштрасса и Якоби, которые имеют не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать как для тестирования, настройки и верификации численных методов, так и для алгоритмов построения приближенных решений краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка большой размерности.

Литература

1. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.]. М.: Мир, 1988. 694 с.

2. Павлов М. В. Уравнение Буссинеска и преобразование Миуры // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, № 1. С. 175–182.

3. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.

4. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

5. Galactionov V. A., Svirshchevskii S. R. Subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Chapman & Hall/CRC, 2007. 493 p.

6. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных многомерных решениях системы уравнений реакции-диффузии со степенными нелинейностями // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 4. С. 796–812. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.408

7. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции-диффузии // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 108–122. DOI: 10.1134/S0374064118010090

8. Kosov A. A., Semenov E. I., Tirskikh V. V. On Exact Multidimensional Solutions of a Nonlinear System of First Order Partial Differential Equation // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2019. Т. 28. С. 53–68. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.53

9. Косов А. А., Семенов Э. И., Тирских В. В. Многомерные точные решения системы нелинейных уравнений типа Буссинеска // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2019. Т. 30. С. 114–124. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.114

10. Полянин А. Д., Журов А. И. Решения с функциональным разделением переменных двух классов нелинейных уравнений математической физики // Доклады АН. 2019. Т. 486, № 3. С. 287–291.

A GENERALIZED BOUSSINESQ-TYPE EQUATION AND ITS EXACT MULTIDIMENSIONAL SOLUTIONS

Aleksandr A. Kosov
Cand. Sci. (Phys. and Math.), Leading Researcher,
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS
134 Lermontova St., Irkutsk 664033, Russia
E-mail: kosov_idstu@mail.ru

Eduard I. Semyonov
Cand. Sci. (Phys. and Math.), Senior Researcher,
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS
134 Lermontova St., Irkutsk 664033, Russia
E-mail: edwseiz@gmail.com

Vladimir V. Tirskikh
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Irkutsk State Transport University
15 Chernyshevskogo St., Irkutsk 664074, Russia
E-mail: tirskikh_vv@irgups.ru

The article studies a nonlinear fourth-order partial differential equation. The right part of the equation contains multidimensional analogs of Boussinesq equation, expressed in terms of two-fold Laplace operators and squares of gradients of the required function. To find the time-dependent components of the original system solution a system of nonlinear ordinary differential equations has been created. This system is reduced to a single fourth-order equation for which partial solutions are found. We give the examples of the constructed exact solutions of the initial system of Boussinesq-type equations, including those expressed in terms of Jacobi and Weierstrass elliptic functions in time and anisotropic ones in spatial variables. The exact solutions found have not only theoretical, but also applied value, since they can be used for testing and verifying numerical methods and algorithms for constructing approximate solutions of boundary value problems for fourth-order nonlinear partial differential equations modeling hydrodynamic processes and phenomena.
Keywords: system of ordinary differential equations; Laplace operator; nonlinear Boussinesq-type equations; reduction; exact solutions.

References

1. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. *Solitons and Nonlinear Waves Equations.* London: Academic Press, 1982, 630 p.
2. Pavlov M. V. Uravnenie Bussineska i preobrazovanie Miury [Boussinesq Equation and Miura Transformation]. *Journal of Mathematical Sciences.* 2004. Vol. 10, no. 1. Pp. 175–182.
3. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki: Tochnye resheniya* [Reference on Nonlinear Equations of Mathematical Physics: Exact Solutions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 432 p.

4. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki* [Methods for Solving Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 256 p.

5. Galactionov V. A., Svirshchevskii S. R. *Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics.* Chapman & Hall/CRC, 2007. 493 p.

6. Kosov A. A., Semenov E. I. *O tochnykh mnogomernykh resheniyakh sistemy uravnenii reaktsii-diffuzii so stepennymi nelineinostyami* [On Exact Multidimensional Solutions of a Nonlinear System of Reaction–Diffusion Equations with Power-Law Nonlinear Terms]. Siberian Math. J. 2017. Vol. 58, no. 4. Pp. 619–632. https://doi.org/10.1134/S0037446617040085

7. Kosov A. A., Semyonov E. I. *O tochnykh mnogomernykh resheniyakh odnoi nelineinoi sistemy uravnenii reaktsii-diffuzii* [On Exact Multidimensional Solutions of a Nonlinear System of Reaction–Diffusion Equations.]. 2018. Vol. 54, no. 1. Pp. 106–120. https://doi.org/10.1134/S0012266118010093

8. Kosov A. A., Semenov E. I., Tirskikh V. V. On Exact Multidimensional Solutions of a Nonlinear System of First Order Partial Differential Equation. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika.* 2019. Vol. 28. Pp. 53–68. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.53

9. Kosov A. A., Semenov E. I., Tirskikh V. V. Mnogomernye tochnye resheniya sistemy nelineinykh uravnenii tipa Bussineska [Multidimensional Exact Solutions for a System of Nonlinear Boussinesq-Type Equations]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika.* 2019. Vol. 30. Pp. 114–124. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.114

10. Polyanin A. D., Zhurov A. I. Resheniya s funktsionalnym razdeleniem peremennykh dvukh klassov nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki [Solutions with Functional Separation of Variables of Two Classes of Nonlinear Equations in Mathematical Physics]. *Doklady AN*, 2019. Vol. 486, no. 3. Pp. 287–291.