УДК 517.9
DOI: 10.18101/2304-5728-2020-1-28-34

О ЧИСЛЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© Ройтенберг Владимир Шлеймович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Ярославский государственный технический университет
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский пр., 82
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Рассматриваются дифференциальные уравнения (обобщенные уравнения Абеля), правые части которых являются полиномами степени n большей двух с непрерывными коэффициентами, периодически зависящими от аргумента. Оценками числа периодических решений таких уравнений занимались многие авторы. В настоящей работе предполагается, что коэффициент при старшей степени полинома либо неотрицателен, либо неположителен, а часть коэффициентов равна нулю. В случае нечетного n доказано, что уравнение имеет не более трех периодических решений и анализируется их кратность. В случае четного n и нулевого свободного члена правой части установлено, что уравнение имеет не более четырех периодических решений, и также анализируется кратность этих решений.
Ключевые слова: полиномиальное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами; уравнение Абеля; число периодических решений.

Для цитирования:
Ройтенберг В. Ш. О числе периодических решений некоторых полиномиальных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. № 1. С. 28–34.

Введение

Оценке числа периодических решений полиномиального дифференциального уравнения (обобщенного уравнения Абеля)

$$\dot{x} = a_n(t)x^n + \ldots + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t)$$

с непрерывными периодическими коэффициентами $a_k(t)$, $k = 0,1,\ldots,n$ посвящено большое число работ, например [1–4]. В. А. Плисс [1] показал, что при $n \geq 4$ и $a_n(t) = 1$ уравнение может иметь больше, чем n изолированных периодических решений. А. Л. Нето [2] доказал, что при $n = 3$ уравнение может иметь сколь угодно большое число изолированных периодических решений. В его примере коэффициент $a_3(t)$ меняет знак.

В статье [4] рассматривались уравнения вида

$$\dot{x} = a_n(t)x^n + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t)\,, \qquad (1)$$

где $n > 2$. В предположении, что коэффициенты $a_k(t)$, $k = 0, 1, 2, n$ — непрерывно дифференцируемые 1-периодические функции, а коэффициент $a_n(t)$ не меняет знак, доказано, что такое уравнение при нечетном n может иметь не более трех изолированных 1-периодических решений, а при четном n может иметь любое число изолированных 1-периодических решений.

Мы покажем, что при нечетном n требование на коэффициенты уравнения (1) можно ослабить до их непрерывности. Кроме того, мы оценим число и кратность 1-периодических решений в случае четного n и непрерывных коэффициентов при дополнительном условии $a_0(t) \equiv 0$.

Постановка задачи и результаты

Пусть $\varphi(\xi,t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(\xi,0)=\xi$. Решение $\varphi(x_0,t)$ является 1-периодическим тогда и только тогда, когда x_0 — нуль функции расхождения

$$d(\xi) := \varphi(\xi,1) - \xi .$$

Для уравнения (1) функция расхождения является аналитической. Кратность ее нуля x_0 называется кратностью периодического решения $\varphi(x_0,t)$. Периодические решения кратности 1 будем называть простыми.

Теорема. *Пусть коэффициенты* $a_k(t)$, $k=0,1,2,n$, *уравнения (1) — непрерывные 1-периодические функции на* $\mathbf{R}$, $\forall t\ a_n(t)\le 0$ *или* $\forall t\ a_n(t)\ge 0$, $a_n(t_0)\ne 0$ *для некоторого* t_0. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

А) *При нечетном n уравнение (1) может иметь не более трех 1-периодических решений. Существуют уравнения, имеющие одно, два и три 1-периодические решения. Если уравнение имеет ровно три 1-периодических решения, то они простые. Если уравнение имеет ровно два 1-периодических решения, то сумма их кратностей не больше трех.*

Пусть $\forall t\ a_n(t)\ne 0$. *Тогда уравнение имеет хотя бы одно 1-периодическое решение; если уравнение имеет ровно два 1-периодических решения, то одно из них простое, а второе двукратное; если уравнение имеет ровно одно 1-периодическое решение, то оно нечетной кратности.*

Б) *При четном n и* $a_0(t)\equiv 0$ *уравнение (1) может иметь не более четырех 1-периодических решений. Для любого* $k\in\{1,2,3,4\}$ *существует уравнение, имеющее ровно k 1-периодических решений. Если уравнение имеет ровно четыре 1-периодических решения, то они простые.*

Пусть $\forall t\ a_n(t)\ne 0$. *Тогда если уравнение имеет ровно три 1-периодических решения, то решение* $x=0$ *двукратное, а остальные решения простые; если уравнение имеет ровно два 1-периодических решения, то они простые; если уравнение имеет ровно одно 1-периодическое решение, то оно нечетной кратности.*

Доказательство. Используем утверждение и метод доказательства следующей теоремы из работы [5].

Пусть 1) функция $f(t,x)$ и ее производная $f'_x(t,x)$ непрерывны на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, 2) $f(t,x)$ 1-периодическая по t, 3) $\forall t$ $f'_x(t,x)$ выпуклая функция от x, а при некотором $t=t_0$ и строго выпуклая функция. Тогда дифференциальное уравнение $\dot{x}=f(t,x)$ имеет не более трех изолированных 1-периодических решений.

Ее доказательство основано на следующих соображениях. Из 1)–3) вытекает, что функция

$$h(x):=\int_0^1 f'_x(t,\varphi(x,t))dt=\ln\varphi'_x(x,1)$$

строго выпукла. Из существования более трех 1-периодических решений следует по теореме Ролля, что $h(x)$ имеет, по крайней мере, три нуля, что противоречит строгой выпуклости.

Пусть в уравнении (1) $n=2m+1$ и $\forall t\; a_n(t)\ge 0$. Для правой части $f(t,x)=a_n(t)x^n+a_2(t)x^2+a_1(t)x+a_0(t)$ уравнения получаем, что

$$\forall t\quad f'''_{xxx}(t,x)=2m(4m^2-1)a_n(t)x^{2m-2}\ge 0,$$

$$\forall x\ne 0\quad f'''_{xxx}(t_0,x)=2m(4m^2-1)a_n(t_0)x^{2m-2}>0.$$

Тем самым условия 1)–3) выполнены, и потому уравнение имеет не более трех 1-периодических решений. Выясним, сколько их может быть и какой кратности.

Пусть уравнение имеет три 1-периодических решения: $\varphi(x_k,t)$, $k=1,2,3$, где $x_1<x_2<x_3$, и хотя бы одно из них, для определенности, $\varphi(x_s,t)$ кратное. Функция расхождения d определена на отрезке $[x_1,x_3]$. Так как $\forall k=1,2,3$ $d(x_k)=0$, то по теореме Ролля получаем $d'(\xi_1)=d'(\xi_2)=0$, где $x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3$. Кроме того, $d'(x_s)=0$. Но тогда $\varphi'_x(\xi_1,1)=\varphi'_x(\xi_2,1)=\varphi'_x(x_s,1)=1$, а $h(\xi_1)=h(\xi_2)=h(x_s)=0$, что противоречит строгой выпуклости функции h. Таким образом, если имеются три 1-периодических решения, то они простые.

Пусть уравнение имеет два 1-периодических решения: $\varphi(x_1,t)$ и $\varphi(x_2,t)$, с кратностями, соответственно, s_1 и s_2.

Если $s_1>1$ и $s_2>1$, то $\forall k=1,2$ $d(x_k)=d'(x_k)=0$. По теореме Ролля $d'(\xi)=0$, где число ξ находится между числами x_1 и x_2, но не совпадает ни с одним из них. Тогда $h(x_1)=h(x_2)=h(\xi)=0$, в противоречие со строгой выпуклостью функции h. Таким образом, одно из чисел s_1 или s_2 равно единице; для определенности пусть $s_2=1$.

Предположим, что $s_1=s\ge 3$. Тогда $\varphi(x,1)=x+a(x-x_1)^s+r(x)$, где $a\ne 0$, а $r(x)$ — аналитическая функция, $r(x)=o((x-x_1)^s)$,

$$\varphi'_x(x,1) = 1 + as(x-x_1)^{s-1} + r'(x)\,,\ \ \varphi''_{xx}(x,1) = as(s-1)(x-x_1)^{s-2} + r''(x)\,,$$

$$r'(x) = o((x-x_1)^{s-1})\,,\ r''(x) = o((x-x_1)^{s-2})\,,$$

$$h'(x) = \frac{\varphi''_{xx}(x,1)}{\varphi'_x(x,1)} = as(s-1)(x-x_1)^{s-2} + R(x)\,, \tag{2}$$

где $R(x)$ — аналитическая функция, $R(x) = o((x-x_1)^{s-2})$,

$$h''(x) = as(s-1)(s-2)(x-x_1)^{s-3} + o((x-x_1)^{s-3})\,. \tag{3}$$

Если $s_1 = s \ge 4$ и четно, то из (3) следует, что $h''(x)$ меняет знак в окрестности точки x_1, что противоречит выпуклости h. Таким образом, если s_1 четно, то $s_1 = 2$.

Если $s_1 = s \ge 3$ и нечетно, то из (2) следует, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\operatorname{sgn} h'(x) = \operatorname{sgn} a(x-x_1)\,,\ \text{если}\ |x-x_1| < \varepsilon\,. \tag{4}$$

Так как для всех x из достаточно малой проколотой окрестности точки x_1 $\operatorname{sgn} d'(x) = \operatorname{sgn}(\varphi'_x(x,1)-1) = \operatorname{sgn} a$, то

$$\operatorname{sgn} d'(x_2) = \operatorname{sgn}(\varphi'_x(x_2,1)-1) = -\operatorname{sgn} a\,,$$

и потому

$$\operatorname{sgn} h(x_2) = -\operatorname{sgn} a\,. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что h имеет локальный максимум в некоторой точке x_M между x_1 и x_2. Так как $h(x)$ — аналитическая функция, то $h(x) = c(x-x_M)^{2l} + o((x-x_M)^{2l})$, где $c < 0$, $l \ge 1$. Но тогда при достаточно малом $\delta > 0$ для всех $x \in (x_M, x_M + \delta)$

$$h''(x) = 2l(2l-1)c(x-x_M)^{2l-2} + o((x-x_M)^{2l-2}) < 0\,,$$

в противоречие с выпуклостью функции h.

Таким образом, если уравнение имеет два 1-периодических решения, то сумма их кратностей ≤ 3. Если дополнительно предположить, что $\forall t\ a_n(t) > 0,$ то одно из этих решений простое, а второе двукратное. Предположим на время, что оба периодических решения простые. В рассматриваемой ситуации при достаточно большом $R > 0$

$$\operatorname{sgn} \frac{d}{dt}\varphi(x,t) = \operatorname{sgn} x\,,\quad \text{если}\ |x| \ge R\,. \tag{6}$$

Перейдем от уравнения (1) к автономной системе $\dot s = 1$, $\dot x = f(s,x)$ на цилиндрическом фазовом пространстве $\mathbf{R}/\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$. Эта система имеет ровно две гиперболические замкнутые траектории, задаваемые 1-периодическими решениями. Ввиду равенства (4) они лежат в кольце $K = \mathbf{R}/\mathbf{Z}\times(-R,R)$, а в точках границы K траектории выходят из K. Но это невозможно. Поэтому сделанное предположение не верно, и одно из двух 1-периодических решений простое, а второе двукратное.

Такая ситуация может быть уже для уравнений с постоянными коэффициентами. Уравнение $\dot{x} = x^{2m+1} - x$ имеет два 1-периодических решения, $x = 0$ кратности 2 и $x = 1$ кратности 1.

Если уравнение (1) имеет одно 1-периодическое решение $\varphi(x_1, t)$ кратности и $\forall t\ a_n(t) > 0$, то из (6) следует, что s нечетно. Например, для уравнения $\dot{x} = x^{2m+1}$ единственное 1-периодическое решение имеет кратность $s = 2m+1$.

Таким образом, для случая $n = 2m+1$ и $a_n(t) \ge 0$ теорема доказана. Если $\forall t\ a_n(t) \le 0$, то доказательство аналогично; в этом случае функция $h(x)$ строго вогнутая.

Рассмотрим случай, когда $n = 2m$ четно, $a_0(t) \equiv 0$ и $a_n(t) \ge 0$. Тогда $f'''_{xxx}(t,x) = 2m(2m-1)(2m-2)a_n(t)x^{2m-3}$ и потому $\forall x\ \ xf'''_{xxx}(t,x) \ge 0$ и $\forall x \ne 0\ \ xf'''_{xxx}(t_0,x) > 0$.

Таким образом, при $x < 0$ ($x > 0$) $f'_x(t,x)$ вогнутая (выпуклая) функция от x, а при некотором $t = t_0$ и строго вогнутая (выпуклая) функция. Соответственно, при $x < 0$ ($x > 0$) $h(x)$ строго вогнутая (выпуклая) функция. Так как $x = 0$ является 1-периодическим решением, то решения $\varphi(x_0, t)$ с $x_0 < 0$ ($x_0 > 0$) не выходят из полуплоскости $x < 0$ ($x > 0$). Поэтому в каждой полуплоскости $x \le 0$ и $x \ge 0$ может быть не более трех 1-периодических решений. Так как $x = 0$ — решение, лежащее в каждой из этих полуплоскостей, то всего уравнение имеет не более пяти 1-периодических решений.

Предположим, что уравнение имеет ровно пять 1-периодических решений. Тогда, как показано выше, все они простые. Поскольку в рассматриваемом случае при достаточно большом $R > 0$

$$\frac{d}{dt}\varphi(x, t) > 0, \text{ если } |x| \ge R, \tag{7}$$

то в кольце K находится ровно 5 гиперболических замкнутых траекторий; на граничной окружности $\mathbf{R}/\mathbf{Z}\times\{-R\}$ ($\mathbf{R}/\mathbf{Z}\times\{R\}$) траектории входят в K (выходят из K). Но это невозможно. Поэтому сделанное предположение неверно и 1-периодических решений не более четырех. Уравнение $\dot{x} = x^{2m} - x^2 - \alpha x$ при достаточно малом $\alpha > 0$ имеет ровно 4 постоянных решения. Поэтому максимальное число 1-периодических решений уравнения (1) равно 4.

Пусть в полуплоскости $x \ge 0$ ($x \le 0$) три 1-периодических решения, а в полуплоскости $x < 0$ ($x > 0$) — одно. Тогда решения, лежащие в полуплоскости $x \ge 0$ ($x \le 0$), простые, а решение, лежащее в полуплоскости $x < 0$ ($x > 0$), либо а) простое, либо б) двукратное. Так как б) противоречит (7), то получаем, что в случае, когда уравнение (1) имеет четыре 1-периодических решения, все они простые.

Пусть уравнение (1) имеет кроме решения $x=0$ еще два 1-периодических решения, по одному в полуплоскостях $x<0$ и $x>0$. Тогда либо (i) $x=0$ имеет кратность 2, а остальные решения — кратность 1, либо (ii) $x=0$ имеет кратность 1, а остальные решения — кратность 2. Случай (ii) противоречит (7), а случай (i) имеет место, например, для уравнения $\dot{x}=x^{2m}-x^2$.

Пусть уравнение (1) имеет кроме решения $x=0$ еще одно 1-периодическое решение, лежащее в полуплоскости $x<0$ ($x>0$). Тогда либо (α) они оба простые, либо (β) одно из них простое, а второе двукратно. Случай (β) противоречит (5), а случай (α) имеет место, например, для уравнения $\dot{x}=x^{2m}+x$ ($\dot{x}=x^{2m}-x$).

В случае, когда $x=0$ — единственное 1-периодическое решение, из (7) следует, что оно должно иметь четную кратность. Примером является уравнение $\dot{x}=x^{2m}$.

Случай $a_n(t)\le 0$ сводится к случаю $a_n(t)\ge 0$ заменой $x\mapsto -x$.

Теорема доказана.

Заключение

Начиная со статьи В. А. Плисса [1] регулярно появляются работы, посвященные оценкам числа периодических решений дифференциальных уравнений, правые части которых являются полиномами с коэффициентами, периодически зависящими от аргумента. Основным методом исследования в этих работах является анализ функции последования, продолженной в комплексную область. В нашей работе используется метод [5], использующий выпуклость правой части уравнения. Эта техника позволила рассматривать уравнения с непрерывными коэффициентами и полностью описать возможное число периодических решений в случаях четной и нечетной степени полинома в предположении, что часть коэффициентов равна нулю, а коэффициент при старшей степени не меняет знак.

Литература

1. Плисс В. А. О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью // ДАН СССР . 1959. Т. 127, № 5. С. 965–968.

2. Neto A. L. On the number of solutions of the equation for which $x(0)=x(1)$ // Invent. Math. 1980. V. 59, no. 2. P. 67–76.

3. Ylyashenko Ju. Hilbert-type number for Abel equations, growth and zeros of holomorfic functions // Nonlinearity. 2000. V. 13. P. 1337–1342.

4. Casull A., Guillamon A. Limit cycles for generalized Abel equations // J. Bifurcation Chaos. 2006. V. 16. P. 3737–3745.

5. Периодические решения дифференциальных уравнений / Г. Г. Иванов [и др.] // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (46). С. 5–15.

ON THE NUMBER OF PERIODIC SOLUTIONS FOR SOME POLYNOMIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

Vladimir Sh. Roitenberg
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Yaroslavl State Technical University
88 Moskovsky Prospect, Yaroslavl 150023, Russia
E-mail: vroitenberg@mail.ru

We have considered the differential equations (generalized Abel equations), which right-hand sides are polynomials of degree n>2 with continuous coefficients that periodically depend on the argument. Many authors estimated the number of periodic solutions for such equations. In this article, it is assumed that the coefficient for the highest degree of polynomial is either non-negative or non-positive, and some of the coefficients are zero. In the case of odd n it is proved that the equation has at most three periodic solutions and their multiplicity is analyzed. In the case of even n and zero free term of the right-hand side, it has been established that the equation has at most four periodic solutions and the multiplicity of these solutions is also analyzed.
Keywords: polynomial differential equation with periodic coefficients; Abel equation; number of periodic solutions.

References

1. Pliss V. A. O chisle periodicheskikh reshenii uravneniya s polinomial'noi pravoi chastyu [On the Number of Periodic Solutions of Differential Equations with Polynomial Right-Hand Side]. *Doklady AN SSSR.* 1959. Vol. 127, no.5. Pp. 965–968.
2. Neto A. L. On the Number of Solutions of the Equation for which $x(0)=x(1)$. *Invent. Math*, 1980, vol. 59, no. 2, pp. 67–76.
3. Ylyashenko Ju. Hilbert-Type Number for Abel Equations, Growth and Zeros of Holomorfic Functions. *Nonlinearity.* 2000. Vol. 13. Pp. 1337–1342.
4. Casull A., Guillamon A. Limit Cycles for Generalized Abel Equations. *J. Bifurcation Chaos.* 2006. Vol. 16. Pp. 3737–3745.
5. Ivanov G. G., Alferov G. V., Korolev V. S., Selitskaya E. A. Periodicheskie resheniya differentsialknykh uravnenij [Periodic Solutions for Differential Equations]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2019. No. 2(46). Pp. 5–15.