Научная статья

УДК 517.925:515.146.2
DOI: 10.18101/2304-5728-2020-3-3-11

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СВЯЗНЫХ КОМПОНЕНТ МНОЖЕСТВА ГРУБЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

© Ройтенберг Владимир Шлеймович
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики,
Ярославский государственный технический университет
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский пр., 82
vroitenberg@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются дифференциальные уравнения на окружности, правые части которых являются однородными тригонометрическими полиномами степени n. Множество E таких уравнений отождествляется с числовым пространством упорядоченных наборов коэффициентов соответствующих тригонометрических полиномов. Уравнение из E называется грубым, если топологическая структура его фазового портрета не меняется при переходе к близкому уравнению. Множество грубых уравнений открыто и всюду плотно в пространстве E. В статье доказано, что у связной компоненты множества грубых уравнений из E, содержащей уравнения с особыми точками, фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел, а остальные гомотопические группы нулевые. Связные компоненты, содержащие уравнения без особых точек, стягиваемы.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение на окружности; тригонометрический полином; грубость; связная компонента; гомотопическая группа.

Для цитирования
Ройтенберг В. Ш. Гомотопические группы связных компонент множества грубых однородных полиномиальных дифференциальных уравнений на окружности // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. № 3. С. 3–11.

Введение

Понятие грубой динамической системы, задаваемой дифференциальным уравнением на многообразии, топологическая структура фазового портрета которой не меняется при малых возмущениях уравнения, имеет важное теоретическое и практическое значение. Исследованию грубых систем и их бифуркаций посвящено большое число работ.

Естественным является следующий вопрос. Какие две грубые системы можно соединить путем, не содержащим бифуркационных точек? Иными словами, требуется описать связные компоненты множества грубых динамических систем. В разных ситуациях эта задача изучалась в работах [1–5].

В работе [5] рассматривалось пространство дифференциальных уравнений на окружности, правые части которых – однородные тригонометрические полиномы степени n. В частности, были описаны множество уравнений $\Sigma^0(n)$, грубых относительно этого пространства, и его связные компоненты.

В настоящей статье мы исследуем гомотопические свойства связных компонент множества $\Sigma^0(n)$.

1 Связные компоненты множества грубых однородных полиномиальных дифференциальных уравнений на окружности

На окружности $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \tag{1}$$

где

$$a(\varphi) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k \cos^k \varphi \sin^{n-k} \varphi \tag{2}$$

— однородный тригонометрический полином степени $n \geq 2$. Мы не будем исключать случай $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$. Уравнение (1) с правой частью (2) отождествляется с функцией a, а также с упорядоченным набором чисел $(a_0, a_1, ..., a_n)$, а множество $\mathrm{E}_h(n)$ таких уравнений — с числовым пространством $\mathbf{R}^{n+1}$ с нормой $\|a\| := \max\limits_{i=0,1,..,n} |a_i|$.

Так как

$$a(\varphi + \pi) \equiv (-1)^n a(\varphi), \tag{3}$$

то множество особых точек любого уравнения $a \in \mathrm{E}_h(n)$ (нулей его правой части $a(\varphi)$) инвариантно при сдвиге $\varphi \mapsto \varphi + \pi$ окружности.

Уравнение $a \in \mathrm{E}_h(n)$ называется *грубым*, если найдется такая его окрестность $U(a)$, что для любого уравнения $\tilde{a} \in U(a)$ существует гомеоморфизм $h : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$, переводящий траектории уравнения $\tilde{a}$ в траектории уравнения a с сохранением ориентации на них.

Пусть $\Sigma^0(n)$ — множество уравнений $a \in \mathrm{E}_h(n)$, все особые точки которого гиперболические, то есть функция $a(\varphi)$ либо не имеет нулей, либо имеет только простые нули. Из (3) следует, что $\Sigma^0(n)$ при $n = 2k-1$ является объединением множеств $\Sigma^0_m(n)$, $m = 1, ..., k$, состоящих из уравнений, имеющих $4m-2$ (гиперболических) особых точек, а при $n = 2k$ является объединением множеств $\Sigma^0_m(n)$, $m = 0, ..., k$, состоящих из уравнений, имеющих $4m$ (гиперболических) особых точек. При $n = 2k$ обозначим также ${}^{+}\Sigma_0^0(n)$ (соответственно, ${}^{-}\Sigma_0^0(n)$) подмножество множества $\Sigma_0^0(n)$, состоящее из уравнений a, для которых при любом φ $a(\varphi)>0$ (соответственно, $a(\varphi)<0$).

В [5] доказано, что

1) *множество* $\Sigma^0(n)$ *открыто и всюду плотно в* $\mathrm{E}_h(n)$;

2) *уравнение* $a\in \mathrm{E}_h(n)$ *является грубым тогда и только тогда, когда принадлежит* $\Sigma^0(n)$*;*

3) *связными компонентами множества* $\Sigma^0(n)$ *являются при четном* $n=2k$ *множества* ${}^{+}\Sigma_0^0(n)$, ${}^{-}\Sigma_0^0(n)$ *и* $\Sigma_m^0(n)$ ($m=0,\dots,k$), *а при нечетном* $n=2k-1$ *— множества* $\Sigma_m^0(n)$ ($m=1,\dots,k$).

2 Гомотопические группы связных компонент множества $\Sigma^0(n)$

По поводу используемых ниже понятий гомотопической топологии см., например, книгу [6]. Сформулируем результаты настоящей работы.

Теорема. *Для связной компоненты* $\Sigma_m^0(n)$ ($m=1,\dots,k$) *фундаментальная группа* $\pi_1\left(\Sigma_m^0(n)\right)$ *изоморфна группе целых чисел* $\mathbf{Z}$*, а гомотопические группы* $\pi_p\left(\Sigma_m^0(n)\right)$ при $p\ge 2$ *тривиальны. Связные компоненты* ${}^{+}\Sigma_0^0(n)$, ${}^{-}\Sigma_0^0(n)$ *стягиваемы.*

Доказательство. Для определенности пусть $n=2k$. Случай нечетного n рассматривается аналогично. Пусть $I:=[0,1]$, $p\in\mathbf{N}$, отображение $I^p \ni \mu \mapsto a^{\mu}\in\Sigma_m^0(n)$ ($m=1,\dots,k$) непрерывно.

Лемма 1. *Нули* $\varphi_j(\mu)$, $j\in\mathbf{Z}$, *функции* $a^{\mu}(\varphi)$ *можно пронумеровать так, что при каждом* $j\in\mathbf{Z}$ $\varphi_j(\cdot)$ *— непрерывная функция,*

$$\forall\mu\in I^p \quad \varphi_j(\mu)<\varphi_{j+1}(\mu), \tag{4}$$

$$\forall\mu\in I^p \quad \varphi_{j+2m}(\mu)=\varphi_j(\mu)+\pi. \tag{5}$$

Доказательство леммы 1. Пусть $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbf{R}^p$. Так как все нули функции $a^{\mu}(\varphi)$ простые, то, используя теорему о неявной функции и компактность I^p, получаем, что существуют точки $\mu^s\in I^p$, $s=1,2,\dots,N$, и их окрестности $U^s=\{\mu\in I^p:\left|\mu-\mu^s\right|<\varepsilon_s\}$ в I^p, такие, что $\bigcup_{s=1}^N U^s=I^p$, а для любого $\mu\in U^s$ все нули функции $a^{\mu}(\varphi)$ имеют вид $\varphi_j^s(\mu)$, $j\in\mathbf{Z}$, где $\varphi_j^s(\cdot)$ — непрерывная функция,

$$\forall \mu \in U^s, \ \varphi_j^s(\mu) < \varphi_{j+1}^s(\mu), \tag{6}$$

$$\forall \mu \in U^s \ \ \varphi_{j+2m}^s(\mu) = \varphi_j^s(\mu) + \pi \,. \tag{7}$$

Пусть μ — произвольная точка I^p. Отрезок

$$L_\mu := \{ v \in I^p : v = \tau\mu, \, 0 \le \tau \le 1 \}$$

соединяет точки $0 \in I^p$ и μ. Выберем окрестности U^{s_i}, $i = 1, 2, ..., M$, $M \le N$ так, чтобы $L^i := U^{s_i} \cap L_\mu \ne \varnothing$, а $\bigcup_{i=1}^M L^i = L_\mu$. Ввиду связности L_μ нумерацию окрестностей U^{s_i} можно считать выбранной так, что $L^1 \ni 0$, множество $\bigcup_{i=1}^q L^i$ связно и имеет непустое пересечение с L^{q+1} при всех $q = 1, 2, ..., M-1$.

Докажем, что для любого $j \in \mathbf{Z}$ существует функция $\varphi_{\mu,j} : L_\mu \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(C) $\varphi_{\mu,j}$ *непрерывна,* $\varphi_{\mu,j}(0) = \varphi_j^1(0)$ *и* $\forall v \in L_\mu$ $\varphi_{\mu,j}(v)$ — *нуль* $a^v(\varphi)$.

Определим по индукции такие числа $j_1, j_2, ..., j_M \in \mathbf{Z}$, что $j_1 = j$ и при всех $l, r \in \{1, ..., M\}$ и $v \in L^l \cap L^r$

$$\varphi_{j_l}^{s_l}(v) = \varphi_{j_r}^{s_r}(v)\,. \tag{8}$$

Пусть уже определены $j_1, j_2, ..., j_q$, $1 \le q \le M-1$, причем (8) выполняется при всех $l, r \in \{1, ..., q\}$. Для любой точки $v \in L^{s_{q+1}} \cap L^{s_i}$, $i \in \{1, ..., q\}$, имеем $\varphi_{j_i}^{s_i}(v) = \varphi_{j_{q+1}}^{s_{q+1}}(v)$ при некотором $j_{q+1} = j_{q+1}(v)$. Учитывая непрерывность функций $\varphi_l^{s_i}(\cdot)$, $i \in \{1, ..., M\}$, $l \in \mathbf{Z}$, неравенства (6) и равенства (8), получаем, что функция $j_{q+1}(\cdot)$ локально постоянна. Поскольку $L^{q+1} \cap \bigcup_{i=1}^q L^i$ не пусто и связно, то $j_{q+1} = j_{q+1}(v)$ постоянно для любого $v \in L^{q+1} \cap \bigcup_{i=1}^q L^i$. По индукции получаем существование искомых чисел j_i, $i = 1, 2, ..., M$.

Теперь мы можем определить функцию $\varphi_{\mu,j} : L_\mu \to \mathbf{R}$, удовлетворяющую условиям (C), положив

$$\varphi_{\mu,j}(v) = \varphi_{j_i}^{s_i}(v) \text{ при } v \in L^i, \ i = 1, 2, ..., M. \tag{9}$$

Используя теорему о неявной функции и связность отрезка L_μ, получаем единственность функции $\varphi_{\mu,j}$, удовлетворяющей условиям (C). Поэтому $\varphi_{\mu,j}$ не зависит от выбора окрестностей U^{s_i}, покрывающих L_μ.

Определим функции $\varphi_j : I^p \to \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{Z}$, положив $\varphi_j(\mu) := \varphi_{\mu,j}(\mu)$ для любого $\mu \in I^p$. Для $\tilde{\mu}$, принадлежащих достаточно малой окрестности $V(\mu)$ точки μ в I^p, последовательность окрестностей U^{s_i}, используемую при построении функций $\varphi_{\tilde{\mu},j}$, можно взять ту же, что и для $\varphi_{\mu,j}$. Ввиду (9) найдется такое $i \in \{1,2,...,M\}$, что $\forall \tilde{\mu} \in V(\mu)$ $\varphi_j(\tilde{\mu}) = \varphi_{j_i}^{s_i}(\mu)$ и потому φ_j непрерывна.

Докажем неравенства (4). При $\mu = 0$ они верны вследствие (6) и включения $L^1 \ni 0$. Предположим, что при всех $j \in \mathbf{Z}$, $\mu \in I^p$ они не верны. Тогда при некоторых $j \in \mathbf{Z}$, $\mu \in I^p$ $\varphi_j(\mu) = \varphi_{j+1}(\mu)$. Множество тех μ, при которых это равенство выполняется, замкнуто вследствие непрерывности функций φ_j, φ_{j+1} и открыто вследствие теоремы о неявной функции. Поэтому оно выполняется для всех $\mu \in I^p$. Но при $\mu = 0$ это равенство неверно. Из полученного противоречия следует справедливость неравенств (4).

Равенства (5) следуют из (9) и (7). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любых* $\varphi \in \mathbf{R}$ *и* $\mu \in I^p$

$$a^{\mu}(\varphi) = q(\varphi,\mu)\prod_{i=1}^{2m}\sin(\varphi - \varphi_i(\mu)), \tag{10}$$

где

$$q(\varphi,\mu) = \sum_{j=0}^{n-2m} q_j(\mu)\sin^j\varphi\cos^{n-2m-j}\varphi, \tag{11}$$

$q_j : I^p \to \mathbf{R}$ *— непрерывные функции,* $q(\varphi,\mu) \neq 0$.

Доказательство леммы 2. Пусть

$$a^{\mu}(\varphi) = \sum_{i-0}^{n} a_i(\mu)\cos^i\varphi\sin^{n-i}\varphi.$$

Пусть при некотором $\mu_0 \in I^p$ $a_0(\mu_0) \neq 0$. Выберем такую окрестность $V(\mu_0)$ точки μ_0 в I^p, что $\forall \mu \in V(\mu_0)$ $a_0(\mu) \neq 0$. Тогда $\forall j \in \mathbf{Z}$ $\cos\varphi_j(\mu) \neq 0$. При $\mu \in V(\mu_0)$ многочлен $P(t,\mu) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\mu)t^{n-i}$ разложим на множители: $P(t,\mu) = Q(t,\mu)(t - t_1(\mu))\cdots(t - t_{2m}(\mu))$, где $Q(t,\mu) = Q_{n-2m}(\mu)t^{n-2m} + ... + Q_1(\mu)t + Q_0(\mu)$ — многочлен, не имеющий действительных корней, с коэффициентами $Q_j(\mu)$, $j = 0,1,...,n-2m$, непрерывно зависящими от $\mu \in V(\mu_0)$, а $t_i(\mu) = \mathrm{tg}\,\varphi_i(\mu)$.

При $\varphi \neq \pi/2 (\mathrm{mod}\,\pi)$ $a^{\mu}(\varphi) = P(\mathrm{tg}\,\varphi,\mu)\cos^n\varphi$, и потому для любого $\mu \in V(\mu_0)$ $a^{\mu}(\varphi)$ можно записать в виде (10), где $q(\varphi,\mu)$ имеет вид (11) с $q_j(\mu)=Q_j(\mu)/\prod_{i=1}^{2m}\cos\varphi_i(\mu)$, $j=0,1,...,n-2m$, $q(\varphi,\mu)\neq 0$ для всех φ. По непрерывности (10) справедливо и при $\varphi=\pi/2(\mathrm{mod}\,\pi)$.

Если $a_0(\mu_0)=0$, то можно выбрать такое α, что при замене $\tilde{\varphi}=\varphi+\alpha$ уравнение a^μ перейдет в уравнение $\tilde{a}^\mu\in \mathrm{E}_h(n)$, для которого соответствующий коэффициент $\tilde{a}_0(\mu_0)\neq 0$. Пусть $V(\mu_0)$ — такая окрестность точки μ_0 в I^p, что $\forall\mu\in V(\mu_0)$ $\tilde{a}_0(\mu)\neq 0$. По доказанному

$$\tilde{a}^\mu(\tilde{\varphi})=\tilde{q}(\tilde{\varphi},\mu)\prod_{i=1}^{2m}\sin(\tilde{\varphi}-\varphi_i\,(\mu)-\alpha),$$

где $\tilde{q}(\tilde{\varphi},\mu)$ — однородный тригонометрический многочлен степени $n-2m$ с коэффициентами, непрерывно зависящими от $\mu\in V(\mu_0)$, $\tilde{q}(\tilde{\varphi},\mu)\neq 0$. Сделав обратную замену $\varphi=\tilde{\varphi}-\alpha$, получим $\forall\mu\in V(\mu_0)$ равенство (10).

Покажем, что при каждом $\mu\in I^p$ представление (10) функции $a^\mu(\varphi)$ единственно. Пусть при некотором $\mu\in I^p$ наряду с равенством (10) имеем и равенство

$$a^\mu(\varphi)=\hat{q}(\varphi,\mu)\prod_{i=1}^{2m}\sin(\varphi-\varphi_i(\mu)) \text{ с } \hat{q}(\varphi,\mu)=\sum_{j=0}^{n-2m}\hat{q}_j(\mu)\sin^j\varphi\cos^{n-2m-j}\varphi.$$

Тогда $\forall\varphi\in[0,2\pi]$ $\sum_{i=0}^{n-2m}(\hat{q}_i(\mu)-q_i(\mu))\sin^i\varphi\cos^{n-2m-i}\varphi=0$. Но это равенство возможно только при $\hat{q}_i(\mu)=q_i(\mu)$. Итак, лемма 2 доказана.

Уравнение a_0 с правой частью

$$a_0(\varphi)=(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^{k-m}\prod_{j=1}^{2m}\sin(\varphi-\pi(j-1)/2m)$$

принадлежит $\Sigma_m^0(n)$. Пусть отображение $\gamma_s: I\to\Sigma_m^0(n)$, $s\in\mathbf{Z}$, ставит в соответствие числу $\mu\in I$ уравнение с правой частью

$$(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^{k-m}\prod_{j=1}^{2m}\sin(\varphi-\pi(j-1)/2m-\mu\pi s/m)).$$

Так как при любом $s\in\mathbf{Z}$ $\gamma_s(0)=\gamma_s(1)=a_0$, то отображения γ_s являются петлями в точке a_0, причем γ_0 — постоянная петля, а γ_s — s-я степень петли γ_1. Тем самым для доказательства того, что фундаментальная группа $\pi_1(\Sigma_m^0(n))$ изоморфна $\mathbf{Z}$, достаточно показать, что: 1) любая петля гомотопна одной из петель γ_s; 2) петли γ_l и γ_r при $l\neq r$ не гомотопны.

Пусть $\gamma: I\to\Sigma_m^0(n)$ — петля в точке a_0: $\gamma(0)=\gamma(1)=a_0$. Пусть правая часть уравнения $a^\mu=\gamma(\mu)$ представлена в виде (10). Тогда мы можем считать, что для $i=1,2,...,2m$

$\varphi_i(0)=\pi(i-1)/2m$, $\varphi_i(1)=\pi(i-1)/2m+\pi s/m$ при некотором $s\in\mathbf{Z}$. Так как $\gamma(0)=a_0$, то $q(\varphi,0)=1$, и потому $\forall(\varphi,\mu)$ $q(\varphi,\mu)>0$. Зададим непрерывное отображение $\Gamma: I\times I\to \mathrm{E}_h(n)$, положив $\Gamma(\mu,\nu)=a^{\mu,\nu}$, где

$$a^{\mu,\nu}(\varphi)=\tilde{q}(\varphi,\mu,\nu)\prod_{i=1}^{2m}\sin(\varphi-\tilde{\varphi}_i(\mu,\nu)), \tag{12}$$

$$\tilde{\varphi}_i(\mu,\nu):=(1-\nu)\varphi_i(\mu)+\nu(\pi(i-1)/2m+\mu\pi s/m),$$

$$\tilde{q}(\varphi,\mu,\nu)=(1-\nu)q(\varphi,\mu)+\nu(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^{k-m}.$$

Так как $\tilde{\varphi}_i(\mu,\nu)<\tilde{\varphi}_j(\mu,\nu)$ при $i<j$, $\tilde{\varphi}_i(0,\nu)=\pi(i-1)/2m$, $\tilde{\varphi}_i(1,\nu)=\pi(i-1)/2m+\pi s/m$, $\tilde{q}(\varphi,\mu,\nu)>0$, $\tilde{q}(\varphi,0,\nu)=\tilde{q}(\varphi,1,\nu)=1$, то $\forall\mu,\nu\in I$ $\Gamma(\mu,\nu)\in\Sigma_m^0(n)$, $\Gamma(\mu,0)=\gamma(\mu)$, $\Gamma(\mu,1)=\gamma_s(\mu)$, $\Gamma(0,\nu)=\Gamma(1,\nu)=a_0$. Поэтому петля γ гомотопна в $\Sigma_m^0(n)$ петле γ_s.

Предположим временно, что петли γ_s и γ_r $(s\neq r)$ гомотопны и $\Gamma: I\times I\to\Sigma_m^0(n)$ — связывающая их гомотопия, то есть $\forall\mu,\nu\in I$

$$\Gamma(\mu,0)=\gamma_s(\mu),\ \Gamma(\mu,1)=\gamma_r(\mu), \tag{13}$$

$$\Gamma(0,\nu)=a_0, \tag{14}$$

$$\Gamma(1,\nu)=a_0. \tag{15}$$

Пусть $a^{\mu,\nu}(\varphi)$ — правая часть уравнения $\Gamma(\mu,\nu)$. Вследствие леммы 1 нули $\varphi_j(\mu,\nu)$, $j\in\mathbf{Z}$, функции $a^{\mu,\nu}(\varphi)$ можно считать пронумерованными так, что $\varphi_j(\mu,\nu)$ — непрерывная функция на $I\times I$, $\varphi_j(0,0)=\pi(j-1)/2m$, $\varphi_1(\mu,\nu)<\varphi_2(\mu,\nu)<\cdots<\varphi_{2m}(\mu,\nu)<\varphi_1(\mu,\nu)+\pi$.

Из (14) и непрерывности φ_1 следует, что φ_1 постоянна на $\{0\}\times I$ и потому $\varphi_1(0,1)=\varphi_1(0,0)=0$. Отсюда из (13) и непрерывности φ_1 получаем $\varphi_1(1,0)=\pi s/m$, $\varphi_1(1,1)=\pi r/m$. Но это противоречит тому, что в силу (15) и непрерывности φ_1 постоянна на $\{1\}\times I$. Таким образом, петли γ_s и γ_r $(s\neq r)$ негомотопны.

Докажем, что при $p>1$ гомотопическая группа $\pi_p(\Sigma_m^0(n))=0$. Рассмотрим сфероид $\gamma: I^p\to\Sigma_m^0(n)$, $\gamma(\partial I^p)=\{a_0\}$. Представим $a^\mu=\gamma(\mu)$ в виде (4). Так как ∂I^p — связное множество, то $\varphi_i(\mu)=\pi(i-1)/2m$ при всех $\mu\in\partial I^p$, $i=1,\dots,2m$. Гомотопию $\Gamma: I^p\times I\to\mathrm{E}_h(n)$, $\Gamma(\mu,\nu)=a^{\mu,\nu}$ зададим формулой (12) с

$$\tilde{\varphi}_i(\mu,\nu):=(1-\nu)\varphi_i(\mu)+\nu(\pi(i-1)/2m,$$

$$\tilde{q}(\varphi,\mu,\nu)=(1-\nu)q(\varphi,\mu)+\nu(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^{k-m}.$$

Так как $\Gamma(I^p \times \{1\}) = a_0$, то сфероид γ гомотопен постоянному сфероиду $I^p \to \{a_0\}$. Тем самым, $\pi_p(\Sigma_m^0(n)) = 0$.

Докажем теперь, что множество ${}^+\Sigma_0^0(n)$ стягиваемо. Рассмотрим уравнение $a_0 \in {}^+\Sigma_0^0(n)$ с правой частью $a_0(\varphi) = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^k \equiv 1$. Определим непрерывное отображение $A: {}^+\Sigma_0^0(n) \times I \to {}^+\Sigma_0^0(n)$, поставив в соответствие паре $(a,\tau) \in {}^+\Sigma_0^0(n) \times I$ уравнение $\dot{\varphi} = \tau a_0(\varphi) + (1-\tau)a(\varphi)$. Так как $A(\cdot,0)$ — тождественное отображение множества ${}^+\Sigma_0^0(n)$ и $\forall a \in {}^+\Sigma_0^0(n)$ $A(a,1) = a_0$, то множество ${}^+\Sigma_0^0(n)$ стягиваемо [6, с. 62]. Стягиваемость множества ${}^-\Sigma_0^0(n)$ доказывается аналогично.

Заключение

В работе исследованы гомотопические свойства связных компонент множества грубых дифференциальных уравнений, правые части которых являются однородными тригонометрическими полиномами заданной степени. Для связных компонент, содержащих уравнения, имеющие особые точки, фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел. Ее нетривиальность является отражением симметрии структуры фазовых портретов уравнений, принадлежащих компоненте. Остальные гомотопические группы тривиальны. Связные компоненты, содержащие уравнения без особых точек, стягиваемы.

Литература

1. Gutierrez C., Melo W. The connected components of Morse–Smale vector fields on two-manifolds // Lecture Notes in Mathematics. 1977. Springer. V. 597. P. 230–251.

2. Ройтенберг В. Ш. О связных компонентах множества векторных полей Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Труды II Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. С. 352–358.

3. Nozdrinova E. V. Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle // Нелинейная динамика. 2018. Т. 14, № 4. С. 543–551. DOI: 10.20537/nd180408.

4. Ройтенберг В. Ш. Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно группы вращений // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. 2018. Т. 50, № 4. С. 398–404. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-4-398-404.

5. Ройтенберг В. Ш. О структуре пространства однородных полиномиальных дифференциальных уравнений на окружности // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Физика. 2020. Т. 12, № 2. С. 21–30. DOI: 10.14529/mmph 200203.

6. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977. 488 с.

HOMOTOPY GROUPS OF CONNECTED COMPONENTS OF THE SET OF ROUGH HOMOGENEOUS POLYNOMIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE CIRCLE

Vladimir Sh. Roitenberg
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof. of Higher Mathematics Department
Yaroslavl State Technical University
88 Moskovsky Prospect, Yaroslavl 150023, Russia
vroitenberg@mail.ru

Abstract. The article considers differential equations on the circle, the right-hand sides of which are homogeneous trigonometric polynomials of degree n. The set E of such equations is identified with the numerical space of ordered sets of coefficients of the corresponding trigonometric polynomials. An equation from E is called rough if the topological structure of its phase portrait does not change when passing to a close equation. The set of rough equations is open and everywhere dense in the space E. We have described the connected components of the set of rough equations and computed their homotopy groups. For connected components containing equations with singular points, the fundamental group is isomorphic to the group Z of integer, and the remaining homotopy groups are zero. For even n, there are also two connected components consisting of equations without singular points. These components are contractible.

Keywords: differential equation on the circle; trigonometric polynomial; roughness; connected component; homotopy group.

References

1. Gutierrez C., Melo W. The Connected Components of Morse–Smale Vector Fields on Two-Manifolds. *Lecture Notes in Mathematics*. 1977. Vol. 597. Pp. 230–251.
2. Roitenberg V. Sh. O svyaznykh komponentakh mnozhestva vektornykh polei Morsa–Smeila na dvumernykh mnogoobraziyakh [On the Connected Components of the Set of Morse–Smale Vector Fields on Two-Dimensional Manifolds]. *Trudy vtorykh Kolmogorovskikh chtenii — Proc. 2nd Kolmogorov Readings.* Yaroslavl, 2004. Pp. 352–358.
3. Nozdrinova E. V. Rotation Number as a Complete Topological Invariant of a Simple Isotopic Class of Rough Transformations of a Circle. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 14, no. 4. Pp. 543–551. DOI: 10.20537/nd180408
4. Roitenberg V. Sh. Grubost vektornykh polei na ploskosti, invariantnykh otnositelno gruppy vrashchenii [Structural Stability of Planar Vector Fields that are Invariant under the Rotation Group]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. Fizika.* 2018. Vol. 50, no. 4. Pp. 398–404. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-4-398-404
5. Roitenberg V. Sh. O strukture prostranstva odnorodnykh polinomialnykh differentsialnykh uravnenii na okruzhnosti [The Structure of the Space of Polynomial Differential Equations on the Circle]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*. 2020. Vol. 12, no. 2. Pp. 21–30. DOI: 10.14529/mmph200203
6. Rokhlin V. A., Fuks D. B. *Nachalnyi kurs topologii. Geometricheskie glavy* [Beginner Course of Topology. Geometric Chapters]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 488 p.

Статья поступила в редакцию 19.10.2020; одобрена после рецензирования 30.11.2020; принята к публикации 10.12.2020.