УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Научная статья

УДК 517.977
DOI: 10.18101/2304-5728-2020-3-19-31

КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© Срочко Владимир Андреевич
доктор физико-математических наук, профессор
кафедры вычислительной математики и оптимизации,
Институт математики и информационных технологий,
Иркутский государственный университет
Россия, 664000, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1
srochko@math.isu.ru

© Аксенюшкина Елена Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры математических методов и информационных технологий,
Байкальский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
aks.ev@mail.ru

© Антоник Владимир Георгиевич
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры вычислительной математики и оптимизации,
Институт математики и информационных технологий,
Иркутский государственный университет
Россия, 664000, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1
vga@math.isu.ru

Аннотация. Задачи на экстремум нормы конечного состояния линейной динамической системы изучаются с позиций методов параметризации допустимых управлений. Аппроксимация кусочно-непрерывных управлений проводится в классе кусочно-постоянных функций на равномерной сетке узлов отрезка времени. При этом интервальное ограничение на управление в исходной задаче переходит в аналогичные ограничения на переменные конечномерных задач.

Конечномерный вариант задачи на минимум нормы допускает эффективное решение с помощью современных программ выпуклой оптимизации. Для случая двух переменных предлагается аналитический метод решения, использующий одномерную задачу минимизации параболы на отрезке.

Для невыпуклой задачи максимизации нормы конечномерная версия решается в глобальном смысле на основе перебора вершин гиперкуба. Предлагаемый подход открывает дополнительные возможности глобального решения невыпуклых задач оптимального управления. Проведена апробация представленной технологии решения на иллюстративных задачах.

Ключевые слова: линейная система управления; задачи на экстремум нормы конечного состояния; кусочно-постоянная аппроксимация; конечномерные задачи.

Для цитирования
Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В., Антоник В. Г. Конечномерная аппроксимация управлений в задачах оптимизации линейных систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. № 3. С. 19–31.

Введение

Задачи на экстремум нормы конечного состояния линейной управляемой системы имеют давнюю историю, но до сих пор сохраняют определенный уровень актуальности и потенциал научного интереса. Задача на минимум нормы в силу своей выпуклой структуры обеспечена в настоящее время эффективными методами решения на основе нелокальных улучшений с использованием матричной сопряженной системы [1; 5; 10].

Задача на максимум нормы конечного состояния является многоэкстремальной, что существенно затрудняет ее глобальное решение. Разработанные методы ориентированы на улучшение экстремальных управлений и построены на основе условий глобальной оптимальности [2; 7; 8]. Поскольку вычислительная проверка выполнения этих условий до сих пор проблематична, то известные методы реализуют, вообще говоря, ослабленные, неполные версии критериев оптимальности. Такая ситуация не позволяет обосновать получение глобального решения, т. е. содержит эвристические элементы. Иными словами, проблема максимизации нормы еще открыта для дополнительных исследований.

В данной работе задачи на экстремум нормы конечного состояния для линейной системы рассматриваются в рамках технологии параметризации управляющей функции [4; 6; 11]. При этом аппроксимация проводится в классе кусочно-постоянных функций на заданной сетке узлов промежутка времени. В результате задача оптимального управления преобразуется в конечномерный вариант на экстремум выпуклой квадратичной функции на гиперкубе.

Полученная задача на минимум допускает решение за конечное число итераций [9]. В целях упрощения процедуры решения предлагается безитерационный алгоритм для двумерной задачи (минимум параболоида на квадрате), использующий геометрическую интерпретацию.

Глобальное решение конечномерной задачи на максимум элементарно реализуется через полный либо специализированный перебор заданного набора вершин гиперкуба. Таким образом, в рамках представленного подхода исходная невыпуклая задача аппроксимируется аналогичной конечномерной задачей выбранной размерности, которая гарантированно решается в глобальном смысле процедурой приемлемого конечного перебора.

Проведена апробация рассмотренной технологии решения на иллюстративных задачах.

1 Постановка задачи

Введем переменные $t \in [t_0, T]$ — время, $u(t) \in R$ — управление, $x(t) \in R^n$ — фазовое состояние, связанные линейной системой

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \qquad x(t_0) = x^0 \tag{1}$$

с непрерывными на $[t_0, T]$ функциями $A(t) \in R^{n\times n}$, $b(t) \in R^n$.

Множество V допустимых управлений содержит кусочно-непрерывные функции $u(t)$ со стандартным ограничением

$$u(t) \in [u_-, u_+], \qquad t \in [t_0, T]. \tag{2}$$

На множестве V определим терминальный функционал (норма конечного состояния)

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), x(T)\rangle \tag{3}$$

и рассмотрим соответствующие задачи на экстремум (минимум или максимум).

Проведем преобразование этих вариационных задач к конечномерным на основе простейшей процедуры параметризации допустимых управлений.

Введем на отрезке $[t_0, T]$ равномерную сетку узлов $t_i = t_0 + ih$, $i = \overline{0, m}$ с шагом $h = \dfrac{T - t_0}{m}$.

Выделим ячейки $T_j = (t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1, m}$ и определим характеристические функции

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in T_j, \\ 0, & t \notin T_j. \end{cases}$$

Пусть $y = (y_1, ..., y_m)$ — набор параметров. Образуем семейство управлений

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_j(t), \qquad t \in [t_0, T]$$

и введем подмножество допустимых управлений

$$V_1 = \{u(\cdot, y) : \ y_j \in [u_-, u_+], \quad j = \overline{1, m}\}.$$

Пусть $x(t, y)$, $t \in [t_0, T]$ — решение фазовой системы (1), соответствующее управлению $u(t, y)$. Тогда

$$x(t, y) = x(t, 0) + \sum_{j=1}^{m} y_j x^j(t), \qquad t \in [t_0, T] \tag{4}$$

где $x^j(t)$ — решение фазовой задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\chi_j(t), \qquad x(t_0) = 0.$$

Рассмотрим функционал $\Phi(u)$ на множестве управлений V_1. Используя представление (4), получаем формулу

$$\Phi_1(y) = \Phi(0) + \langle d, y \rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, Xy \rangle,$$

в которой

d — m-вектор с компонентами $\langle x(T, 0), x^j(T) \rangle$, $j = \overline{1, m}$,

X — $(n \times m)$ - матрица со столбцами $x^j(T)$, $j = \overline{1, m}$.

Отметим, что квадратичная функция $\Phi_1(y)$ является выпуклой, что позволяет квалифицировать соответствующие экстремальные задачи на множестве простейшей структуры: $y \in [u_-, u_+]$.

2 Задача на минимум нормы конечного состояния

Рассмотрим задачу

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\langle x(T, u), x(T, u) \rangle \to \min, \qquad u \in V. \tag{4}$$

После параметризации получаем специальную задачу выпуклого программирования относительно вектора $y = (y_1, ..., y_m)$

$$\Phi_1(y) = \Phi(0) + \langle d, y \rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, Xy \rangle \to \min, \qquad y \in [u_-, u_+]. \tag{5}$$

Такая квадратичная задача допускает решение за конечное число итераций [9].

Выделим частные случаи задачи (5) относительно размерности m, которые решаются по явным формулам без итерационного процесса.

Пусть $m = 1$, т. е. задача (4) решается на множестве const-управлений $u(t) = y_1$, $t \in [t_0, T]$. Соответствующая одномерная задача (5) имеет вид (минимум выпуклой параболы на отрезке)

$$\Phi_1(y_1) = \Phi(0) + y_1\langle x(T, 0), x^1(T) \rangle + \frac{1}{2}y_1^2\langle x^1(T), x^1(T) \rangle \to \min,$$
$$y_1 \in [u_-, u_+].$$

При условии $x^1(T) \neq 0$ определим стационарную точку

$$y_1^* = -\frac{\langle x(T, 0), x^1(T) \rangle}{\langle x^1(T), x^1(T) \rangle}.$$

Тогда решение одномерной задачи представляется очевидным образом

$$y_1^{\min} = \begin{cases} y_1^*, & y_1^* \in [u_-, u_+], \\ u_-, & y_1^* < u_-, \\ u_+, & y_1^* > u_+. \end{cases}$$

Пусть, далее, $m = 2$, т. е. задача (4) решается на множестве управлений

$$u(t) = \begin{cases} y_1, & t \in [t_0, t_1], \\ y_2, & t \in (t_1, T], \end{cases}$$

с фиксированной точкой переключения $t_1 = \dfrac{t_0 + T}{2}$.

Соответствующая двумерная задача (5):

минимизация функции двух переменных $\Phi_1(y_1, y_2)$ на квадрате

$$Y = \{(y_1, y_2):\ y_i \in [u_-, u_+],\ i = 1, 2\}.$$

Предположим, что матрица $X \in R^{n\times 2}$ имеет полный ранг, т. е. матрица Грама $X^T X$ положительно определена. Тогда единственная стационарная точка $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ функции $\Phi_1(y)$ находится из линейной системы

$$\nabla\Phi_1(y) = d + X^T X y = 0.$$

Это точка минимума функции $\Phi_1(y)$ на R^2. При этом линии уровня функции $\Phi_1(y)$ — эллипсы с центром в точке y^*.

Проведем аналитическое решение задачи минимизации параболоида $\Phi_1(y)$ на квадрате Y, используя информацию о положении точки y^* и геометрическую интерпретацию задачи на основе линий уровня целевой функции.

Если $y^* \in Y$, то получено решение двумерной задачи на минимум: $y^{\min} = y^*$.

Проанализируем основной случай $y^* \notin Y$.

Возможные ситуации нарушения ограничения по одной переменной:

1) $y_1^* < u_-$, $y_2^* \in [u_-, u_+]$ $\Rightarrow$ решить одномерную задачу

$$\Phi_1(u_-, y_2) \to \min,\ y_2 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_2^-,$$

положить $y_1^{\min} = u_-$, $y_2^{\min} = y_2^-$;

2) $y_1^* > u_+$, $y_2^* \in [u_-, u_+]$ $\Rightarrow$ решить одномерную задачу

$$\Phi_1(u_+, y_2) \to \min,\ y_2 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_2^+,$$

положить $y_1^{\min} = u_+$, $y_2^{\min} = y_2^+$;

3) $y_1^* \in [u_-, u_+]$, $y_2^* < u_-$ $\Rightarrow$ решить одномерную задачу

$$\Phi_1(y_1, u_-) \to \min,\ y_1 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_1^-,$$

положить $y_1^{\min} = y_1^-$, $y_2^{\min} = u_-$;

4) $y_1^* \in [u_-, u_+]$, $y_2^* > u_+$ $\Rightarrow$ решить одномерную задачу

$$\Phi_1(y_1, u_+) \to \min,\ y_1 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_1^+,$$

положить $y_1^{\min} = y_1^+$, $y_2^{\min} = u_+$.

Возможные нарушения ограничений по двум переменным y_1^*, y_2^*:

5) $y_1^* < u_-$, $y_2^* < u_-$ $\Rightarrow$ решить две одномерные задачи

$$\Phi_1(u_-, y_2) \to \min, \quad y_2 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_2^-,$$

$$\Phi_1(y_1, u_-) \to \min, \quad y_1 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_1^-,$$

положить

$$(y_1^{\min}, y_2^{\min}) = \begin{cases} (u_-, y_2^-), & \Phi_1(u_-, y_2^-) \le \Phi_1(y_1^-, u_-), \\ (y_1^-, u_-), & \Phi_1(u_-, y_2^-) \ge \Phi_1(y_1^-, u_-), \end{cases}$$

6) $y_1^* > u_+$, $y_2^* > u_+$ $\Rightarrow$ решить две одномерные задачи

$$\Phi_1(u_+, y_2) \to \min, \quad y_2 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_2^+,$$

$$\Phi_1(y_1, u_+) \to \min, \quad y_1 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_1^+,$$

положить

$$(y_1^{\min}, y_2^{\min}) = \begin{cases} (u_+, y_2^+), & \Phi_1(u_+, y_2^+) \le \Phi_1(y_1^+, u_+), \\ (y_1^+, u_+), & \Phi_1(u_+, y_2^+) \ge \Phi_1(y_1^+, u_+), \end{cases}$$

7) $y_1^* < u_-$, $y_2^* > u_+$ $\Rightarrow$ решить две одномерные задачи

$$\Phi_1(u_-, y_2) \to \min, \quad y_2 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_2^-,$$

$$\Phi_1(y_1, u_+) \to \min, \quad y_1 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_1^+,$$

положить

$$(y_1^{\min}, y_2^{\min}) = \begin{cases} (u_-, y_2^-), & \Phi_1(u_-, y_2^-) \le \Phi_1(y_1^+, u_+), \\ (y_1^+, u_+), & \Phi_1(u_-, y_2^-) \ge \Phi_1(y_1^+, u_+), \end{cases}$$

8) $y_1^* > u_+$, $y_2^* < u_-$ $\Rightarrow$ решить две одномерные задачи

$$\Phi_1(u_+, y_2) \to \min, \quad y_2 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_2^+,$$

$$\Phi_1(y_1, u_-) \to \min, \quad y_1 \in [u_-, u_+] \quad \Rightarrow \quad y_1^-,$$

положить

$$(y_1^{\min}, y_2^{\min}) = \begin{cases} (u_+, y_2^+), & \Phi_1(u_+, y_2^+) \le \Phi_1(y_1^-, u_-), \\ (y_1^-, u_-), & \Phi_1(u_+, y_2^+) \ge \Phi_1(y_1^-, u_-). \end{cases}$$

Представленная процедура обеспечивает точное решение двумерной задачи на минимум без применения итерационных алгоритмов.

3 Задача на максимум нормы конечного состояния

Рассмотрим задачу максимизации нормы, которая представляет собой характерный пример невыпуклой оптимизации. После параметризации задача может быть формализована следующим образом:

$$\varphi(y) \to \max, \qquad y \in Y. \tag{6}$$

Здесь

$$\varphi(y) = \langle d, y \rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, Xy \rangle,$$

$$Y = \{y = (y_1, ..., y_m): \ y_i \in [u_-, u_+], \ i = \overline{1, m}\}.$$

Предположим, что матрица $X \in R^{n \times m}$ имеет максимальный ранг, т. е. $\varphi(y)$ — строго выпуклая функция.

Выделим множество угловых точек гиперкуба Y (2^m вершин)

$$Y_* = \{y \in Y: \ y_i = u_- \vee u_+, \ i = \overline{1, m}\}.$$

Будем использовать известный результат: если y^0 — глобальное решение задачи (6), то $y^0 \in Y_*$.

Сформулируем задачу на множестве угловых точек

$$\varphi(y) \to \max, \qquad y \in Y_*. \tag{7}$$

Согласно предыдущему утверждению, задачи (6) и (7) эквивалентны.

Решение задачи (7) в простейшем варианте реализуется полным перебором 2^m угловых точек и соответствующих значений функции φ. Если эта процедура по вычислительным затратам не допустима, то можно организовать перебор угловых точек с монотонным увеличением значений $\varphi(y)$. Здесь идеально подходит метод условного градиента на множестве Y_*. Проведем описание итерации метода.

Пусть $y^k \in Y_*$. Тогда

$$y^{k+1} = \arg\max_{y \in Y_*} \left\langle \nabla\varphi(y^k), y \right\rangle \qquad \Leftrightarrow$$

$$y_i^{k+1} = \arg\max_{y_i = u_- \vee u_+} \left\langle \nabla_i \varphi(y^k), y_i \right\rangle, \qquad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом, для $i = \overline{1, m}$

$$y_i^{k+1} = \begin{cases} u_-, & \nabla_i \varphi(y^k) < 0, \\ u_+, & \nabla_i \varphi(y^k) > 0, \\ u_- \vee u_+, & \nabla_i \varphi(y^k) = 0. \end{cases}$$

Понятно, что

$$y^{k+1} \in Y_*, \qquad \left\langle \nabla\varphi(y^k), y^{k+1} - y^k \right\rangle \geq 0.$$

Если $y^{k+1} \neq y^k$, то имеет место строгое возрастание для функции φ:

$$\varphi(y^{k+1}) - \varphi(y^k) > \left\langle \nabla\varphi(y^k), y^{k+1} - y^k \right\rangle.$$

Пусть для некоторого индекса $i \in \{1, ..., m\}$ $\nabla_i \varphi(y^k) = 0.$ Тогда $y_i^{k+1} = u_- \vee u_+$, т. е. всегда можно обеспечить условие $y_i^{k+1} \neq y_i^k$, что влечет за собой свойство увеличения $\varphi(y^{k+1}) > \varphi(y^k)$.

Таким образом, условием остановки итерационного перебора является совпадение $y^{k+1} = y^k$, из которого следует, что $\nabla_i \varphi(y^k) \neq 0,\quad i = \overline{1, m}$.

Укажем один вариант тестирования точки y^k на оптимальность в случае остановки метода улучшения: $y^{k+1} = y^k$. Проведем перебор соседних с y^k угловых точек $y^{k,j}$, $j = \overline{1, m}$ на предмет увеличения функции φ по сравнению с $\varphi(y^k)$.

Если такое увеличение произошло, то соответствующая вершина $y^{k,j}$ выбирается в качестве начального приближения для следующего цикла итераций метода условного градиента. В противном случае вершину y^k можно объявить локальным максимумом в задаче (7).

Остается отметить, что соседняя угловая точка $y^{k,j}$ получается из y^k переключением j-той координаты y_j^k между двумя значениями u_-, u_+: если $y_j^k = u_-(u_+)$, то $y_j^{k,j} = u_+(u_-)$.

4 Иллюстративные задачи

Пример 1. Оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором [3]:

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = -x_1 + u,\quad x_1(0) = -1,\quad x_2(0) = 1;$$
$$|u(t)| \le 1,\quad t \in [0, \pi];$$
$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi)).$$

Реализуем параметризацию для $m = 2,\ y = (y_1, y_2),\ t_1 = \dfrac{\pi}{2}.$

В результате простых расчетов получаем

$$\Phi(0) = 1,\qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\qquad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\Phi_1(y) = 1 + 2y_1 + y_1^2 + y_2^2.$$

Переменные y_1, y_2 в выражении для $\Phi_1(y)$ разделены, т. е. задачи $\Phi_1(y) \to ext,\ |y| \le 1$ решаются элементарно.

Первая задача $\Phi_1(y) \to \min,\ |y| \le 1$ имеет единственное решение $y_1^{\min} = -1,\ y_2^{\min} = 0$, причем $\Phi_1(y^{\min}) = 0$. Следовательно, управление

$$u_{\min}(t)=\begin{cases}-1, & t\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ 0, & t\in(\frac{\pi}{2},\pi].\end{cases}$$

является оптимальным в исходной задаче

$$\Phi(u)\to\min,\qquad u\in V.$$

Вторая задача $\Phi_1(y)\to\max$, $|y|\le 1$ имеет два решения $y_1^{\max}=1$, $y_2^{\max}=\pm1$, причем $\Phi_1(y^{\max})=5$. Соответствующие управления

$$u_{\max}(t)=1,\qquad t\in[0,\pi],$$

$$u_{\max}(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ -1, & t\in(\frac{\pi}{2},\pi].\end{cases}$$

Следует отметить, что известно оптимальное управление в задаче $\Phi(u)\to\max$, $u\in V$

$$u_{opt}(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,\frac{3\pi}{4}],\\ -1, & t\in(\frac{3\pi}{4},\pi],\end{cases}$$

со значением $\Phi(u_{opt})=3+2\sqrt{2}\approx 5{,}82$.

Это управление получено в [2; 8] в результате нетривиальной численной реализации на основе условия глобального максимума. Управления $u_{\max}(t)$, построенные аналитически, имеют простую структуру и обеспечивают неплохое приближение к оптимуму по значению функционала (отклонение 14%). При этом точное оптимальное управление получается в результате процедуры параметризации для $m=4$ перебором 2^4 угловых точек.

Пример 2. Задача на экстремум нормы конечного состояния для двухступенчатой системы

$$\dot{x}_1=x_2,\qquad \dot{x}_2=u,\qquad x_1(0)=x_1^0,\qquad x_2(0)=x_2^0;$$

$$|u(t)|\le 1,\quad t\in[0,T];$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}(x_1^2(T)+x_2^2(T)).$$

Для приближенного решения задачи $\Phi(u)\to\min$ с числовыми данными $T=2$, $x_1^0=2$, $x_2^0=-1$ применим процедуру параметризации для $m=2$.

В этом случае

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}, \qquad X = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1(y) = \Phi(0) + \langle d, y \rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, Xy \rangle .$$

Стационарная точка параболоида $\Phi_1(y)$ определяется линейной системой

$$d + X^T Xy = 0 ,$$

которая конкретизируется в виде

$$13y_1 + 7y_2 = 4, \qquad 7y_1 + 5y_2 = 4$$

с решением $y_1^* = -\frac{1}{2}$, $y_2^* = \frac{3}{2}$.

Точка $y_2^* = \frac{3}{2}$ нарушает ограничение $|\, y_2 \,| \le 1$, поэтому в соответствии со схемой решения из раздела 2 полагаем $y_2^+ = 1$ и решаем первое уравнение

$$13y_1 + 7y_2^+ = 4 \qquad \Rightarrow \qquad y_1^+ = -\frac{3}{13} .$$

В результате получаем точку минимума

$$y_1^{\min} = -\frac{3}{13}, \qquad y_2^{\min} = 1 .$$

которой соответствует управление

$$u(t, y^{\min}) = \begin{cases} -\dfrac{3}{13}, & t \in [0, 1], \\ 1, & t \in (1, 2], \end{cases}$$

и значение функционала $\Phi_1(y^{\min}) = \frac{1}{26}$.

Для задачи на максимум нормы ($\Phi(u) \to \max, \quad u \in V$) оптимальное управление известно [8]:

$$u_{opt}(t) = -1, \qquad t \in [0, 2] .$$

В рамках рассмотренной параметризации оно получается перебором по четырем вершинам квадрата, что приводит к оптимальному результату:

$$y_1^{\max} = y_2^{\max} = -1 .$$

Заключение

Задачи на экстремум нормы конечного состояния линейной системы рассматриваются на множестве кусочно-постоянных управлений на заданной сетке узлов аппроксимации. Соответствующая конечномерная задача на минимум является выпуклой и эффективно решается стандартными алгоритмами квадратичного программирования. Специфика невыпуклой задачи на максимум позволяет получить глобальное решение посредством процедуры конечного перебора явного набора угловых точек допустимого множества.

Литература

1. Аргучинцев А. В., Дыхта В. А., Срочко В. А. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Известия вузов. Математика. 2009. № 1. С. 3–43.

2. Антоник В. Г., Срочко В. А. Методы нелокального улучшения экстремальных управлений в задаче на максимум нормы конечного состояния // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 5. С. 791–804.

3. Галяев А. А., Лысенко П. В. Оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором // Автоматика и телемеханика. 2019. № 1. С. 21–37.

4. Горбунов В. К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18, № 5. С. 1083–1095.

5. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.

6. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В. Параметризация некоторых задач управления линейными системами // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2019. Т. 30. С. 83–98.

7. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.

8. Стрекаловский А. С., Шаранхаева Е. В. Глобальный поиск в невыпуклой задаче оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 10. С. 1785–1800.

9. Сухарев А. Г., Тимохов В. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 328 с.

10. Тятюшкин А. И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 2006. 343 с.

11. Чернов А. В. О применении функций Гаусса для численного решения задач оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2019. № 6. С. 51–69.

FINITE-DIMENSIONAL APPROXIMATION OF CONTROLS
IN OPTIMIZATION PROBLEMS FOR LINEAR SYSTEMS

Vladimir A. Srochko
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof. of
Department of Computational Mathematics and Optimization
Institute of Mathematics and Information Technology
Irkutsk State University
1 K. Marksa St., Irkutsk 664000, Russia
srochko@math.isu.ru

Elena V. Aksenyushkina
Dr. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof. of
Department of Mathematical Methods and Information Technology
Baikal State University
11 Lenina St., Irkutsk 664003, Russia
aks.ev@mail.ru

Vladimir G. Antonik
Cand. (Phys. and Math.), A/Prof. of
Department of Computational Mathematics and Optimization
Institute of Mathematics and Information Technology
Irkutsk State University
1 K. Marksa St., Irkutsk 664000, Russia
vga@math.isu.ru

Abstract. The article studies extremum problems of the final state norm of a linear dynamical system using methods of parameterization of admissible controls. Piecewise continuous controls are approximated in the class of piecewise constant functions on a uniform grid of nodes of the time interval by linear combinations of special support functions. In this case, the restriction of a control of the original problem to the interval induces the same restrictions for the variables of the finite-dimensional problems.

The finite-dimensional version of a minimum norm problem can effectively be resolved with the help of modern convex optimization programs. In the case of two variables, we propose an analytical method of resolution that uses a one-dimensional minimization problem for a parabola over a segment.

For a non-convex norm maximization problem, the finite-dimensional version is resolved globally by exhaustive search over the vertices of a hypercube. The proposed approach provides further insights into global resolution of non-convex optimal control problems and is exemplified by some illustrative problems.

Keywords: linear control system; extremum problems of the final state norm; piecewise constant approximation; finite-dimensional problems.

References

1. Arguchintsev A. V., Dykhta V. A., Srochko V. A. *Optimalnoe upravlenie: nelokalnye usloviya, vychislitelnye metody i variatsionnyi printsip maksimuma* [Optimal Control: Nonlocal Conditions, Computational Methods, and the Variational Principle of Maximum]. *Russian Mathematics.* 2009. Vol. 53. No. 1. Pp. 1–35.
2. Antonik V. G., Srochko V. A. Metody nelokalnogo uluchsheniya ekstremalnykh upravlenii v zadache na maksimum normy konechnogo sostoyaniya [Methods for Nonlocal Improvement of Extreme Controls in the Maximization of the Terminal State Norm]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2009. Vol. 49, no. 5. Pp. 762–775.
3. Galyaev A. A., Lysenko P. V. Optimalnoe po energii upravlenie garmonicheskim ostsillyatorom [Energy-Optimal Control of Harmonic Oscillator]. *Automation and Remote Control.* 2019. Vol. 80, Pp. 16–29. htts://doi.org/10.1134/S0005231019010021
4. Gorbunov V. K. O svedenii zadach optimalnogo upravleniya k konechnomernym [The Reduction of Optimal Control Problems for Finite-Dimensional]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1978. Vol. 18, no. 5. Pp. 1083–1095.

5. Srochko V. A. *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimalnogo upravleniya* [Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 160 p.

6. Srochko V. A., Aksenyushkina E. V. Parametrizatsiya nekotorykh zadach upravleniya lineinymi sistemami [Parameterization of Some Control Problems by Linear Systems]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika.* 2019. Vol. 30. Pp. 83–98. htts://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83

7. Strekalovsky A. S. *Elementy nevypukloi optimizatsii* [Elements of Nonconvex Optimization]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2003. 356 p.

8. Strekalovsky A. S., Sharankhaeva E. V. Globalnyi poisk v nevypukloi zadache optimalnogo upravleniya [Global Search in a Nonconvex Optimal Control Problem]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2005. Vol. 45, no. 10. Pp. 1719–1734.

9. Sukharev A. G., Timokhov V. V., Fedorov V. V. *Kurs metodov optimizatsii* [A Course of Optimization Methods]. Moscow: Nauka Publ., 1986. 328 p.

10. Tyatyushkin A. I. *Mnogometodnaya tekhnologiya optimizatsii upravlyaemykh sistem* [Multi-Method Technology for Optimization of Control Systems]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2006. 343 p.

11. Chernov A. V. *O primenenii funktsii Gaussa dlya chislennogo resheniya zadach optimalnogo upravleniya* [On Application of Gaussian Functions for Numerical Solution of Optimal Control Problems]. *Automation and Remote Control.* 2019. Vol. 80. Pp. 1026–1040. htts://doi.org/10.1134/S0005231019060035

Статья поступила в редакцию 23.11.2020; одобрена после рецензирования 30.11.2020; принята к публикации 10.12.2020.