ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья

УДК 517.53
DOI: 10.18101/2304-5728-2020-4-3-13

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССАХ ГЁЛЬДЕРА И БЕСОВА

© Охлупина Ольга Валентиновна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры «Математика»,
Брянский государственный инженерно-технологический университет
Россия, 241037, г. Брянск, пр-т Станке Димитрова, 3
helga131081@yandex.ru

© Ракова Ксения Александровна
старший преподаватель,
Брянский государственный технический университет
Россия, 241035, г. Брянск, бульвар 50 лет Октября, 7
kseniya_senko@mail.ru

Аннотация. В последние десятилетия вопрос исследования интегральных операторов с ядрами С. Бергмана в пространствах гладких функций в комплексном и функциональном анализе не теряет своей актуальности. Данная статья посвящена исследованию указанных операторов в пространствах аналитических в области функций, гладких вплоть до границы области, граничные значения которых принадлежат классам Гёльдера и Бесова. Описывается поведение таких операторов в круге и полуплоскости. Устанавливается, что интегральный оператор с ядрами Бергмана проектирует классы Гёльдера, в случае круга, и классы Бесова, в случае полуплоскости, на соответствующие классы аналитических функций, то есть интегральный оператор Бергмана оставляет инвариантными указанные классы.
Ключевые слова: интегральный оператор; ядро; ядро Бергмана; класс функций; класс Бесова; аналитические функции; единичный круг; полуплоскость; функциональное пространство; граничные значения.

Для цитирования
Охлупина О. В., Ракова К. А. Некоторые задачи в классах Гёльдера и Бесова // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. № 4. С. 3–13.

Введение

Вопросам исследования ограниченности интегральных операторов в Lp-пространствах и пространстве гладких функций посвящено большое количество работ, среди авторов которых стоит отметить И. И. Привалова, М. Рисса, Г. Х. Харди, Д. И. Литтлвуда, А. П. Кальдерона, А. Зигмунда.

В последние десятилетия задачи, связанные с интегральными операторами, вызывают интерес у большого количества авторов, среди которых стоит отметить К. Сейпа, А. М. Джрбашяна, Ф. А. Шамояна, Б. И. Коренблюма, Х. Хеденмальма, К. Жу и др. Классы О. Гёльдера и О. В. Бесова занимают одно из центральных мест в вещественном, функциональном и комплексном анализах. Подробное изучение свойств этих классов является актуальной задачей. В теории функций успешно применяются методы, созданные для исследования подобных классов.

Целью работы является исследование вопросов ограниченности интегрального оператора С. Бергмана в классах типа О. Гёльдера и О. В. Бесова. При доказательстве результатов применяются специальные методы комплексного и функционального анализа.

Пункт 1 посвящен описанию поведения интегральных операторов с ядрами Бергмана в гёльдеровских классах. В пункте 2 рассматриваются бергмановские операторы в пространствах О. Бесова в полуплоскости.

1 Поведение интегральных операторов с ядрами Бергмана в гёльдеровских классах

Прежде чем сформулировать основную задачу, введем необходимые обозначения.

Обозначим через D единичный круг на комплексной плоскости C. $H(D)$ — множество голоморфных функций в D.

Пространство

$$A^p(D)=\left\{f : f \in L^p(D) \cup H(D)\right\}$$

назовем пространством Бергмана.

Пусть $z,\zeta \in D$. Рассмотрим класс Гёльдера $\Lambda_\beta(D)$, $0<\beta<1$, состоящий из всех функций, удовлетворяющих условию:

$$\left|f(\zeta)-f(z)\right| \le C|\zeta - z|^\beta .$$

Обозначим через $K_\alpha(\zeta,z)$ ядро Бергмана порядка α,

$$K_\alpha(\zeta,z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\frac{\left(1-|\zeta|^2\right)^\alpha}{\left(1-z\bar{\zeta}\right)^{\alpha+2}} .$$

Пусть X — некоторое функциональное пространство в D, такое, что

$$X \subset L^1\left(dm_2(\zeta)\right),$$

где $dm_2(\zeta)=\left(1-|\zeta|^2\right)^\alpha$.

Тогда $K_\alpha(f)(z)=\int\limits_D K_\alpha(\zeta,z)f(\zeta)dm_2(\zeta)$ — интегральный оператор с ядром Бергмана порядка α на X, $z \in D$.

Пусть $\zeta=\rho e^{i\theta}$, $z=re^{i\varphi}$.

Теорема 1. Если $f \in \Lambda_\beta(D)$, $0<\beta<1$, $F(z)$ — голоморфная в D функция, имеющая вид:

$$F(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha} f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta ,$$

то $F \in \Lambda_{\beta}(D)$.

Причем справедлива оценка:

$$\left|F'(z)\right| \le \frac{C}{\left(1-|z|\right)^{1-\beta}} .$$

Доказательство теоремы несложно провести с применением классической теоремы Харди — Литтлвуда.

При $\beta = 1$ справедлива

Теорема 2. Если $f \in \Lambda_1(D)$, $F(z)$ — голоморфная в D функция:

$$F(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha} f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta ,$$

то $F(z)$ принадлежит классу А. Зигмунда в D, то есть справедлива оценка:

$$\left|F''(z)\right| \le \frac{C}{1-|z|} .$$

Аналог теорем 1 и 2 сохраняется и в случае $0 < \beta < +\infty$ для класса $\tilde{\Lambda}_{\beta}(D)$, состоящего из функций $f \in C(D)$, для которых

$$\frac{\partial^m f}{\partial\theta^m} \in \tilde{\Lambda}_{\beta-[\beta]}(D) ,$$

где $m = [\beta]$, $[\beta]$ — целая часть β, то есть

$$\left|\frac{\partial^m f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\partial\theta^m} - \frac{\partial^m f\left(re^{i\varphi}\right)}{\partial\theta^m}\right| \le C|\zeta - z|^{\beta} .$$

Теорема 3. Если $\frac{\partial^m f}{\partial\theta^m} \in \tilde{\Lambda}_{\beta-[\beta]}(D)$, где $m = [\beta]$, $[\beta]$ — целая часть β, то $F \in \tilde{\Lambda}_{\beta-[\beta]}(D)$.

Доказательство.

1. Докажем, что при справедливости оценки

$$\left|\frac{\partial f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial f\left(re^{i\varphi}\right)}{\partial\theta}\right| \le C|\zeta - z|^{\beta}$$

верно неравенство $\left|F'(z)\right| \le \frac{\tilde{C}}{\left(1-|z|\right)^{1-\beta}}$.

Очевидно, что

$$F'(z)=\frac{(\alpha+1)}{\pi}\left(-(\alpha+2)\right)\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+3}}\left(-\rho e^{-i\theta}\right)f\left(\rho e^{i\theta}\right)d\theta\rho d\rho=$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+3}}e^{-i\theta}d\theta\rho^2 d\rho=$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\pi}\int_0^1\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}\rho^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+3}}e^{-i\theta}d\theta d\rho=$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\pi}\int_0^1\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}\rho^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{(\alpha+2)z\rho i e^{-i\theta}}e^{-i\theta}d\left(\frac{1}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\right)d\rho=$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\pi(\alpha+2)zi}\int_0^1\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}\rho\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\rho e^{i\theta}\right)d\left(\frac{1}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\right)d\rho=$$

$$=\frac{(\alpha+1)}{\pi zi}\int_0^1\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}\rho\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\rho e^{i\theta}\right)d\left(\frac{1}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\right)d\rho$$

Применяя интегрирование по частям, получим:

$$F'(z)=\frac{(\alpha+1)}{\pi iz}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\left(\frac{\partial f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial f\left(re^{i\varphi}\right)}{\partial\theta}\right)d\theta\rho d\rho .$$

$$\left|F'(z)\right|\le\frac{(\alpha+1)}{\pi iz}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\right|\left|\frac{\partial f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial f\left(re^{i\varphi}\right)}{\partial\theta}\right|d\theta\rho d\rho\le$$

$$\le\frac{(\alpha+1)}{\pi iz}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\right|C\left|\zeta-z\right|^{\beta}d\theta\rho d\rho .$$

Применяя теорему 1, получаем, что $\left|F'(z)\right|\le\dfrac{\tilde{C}}{\left(1-|z|\right)^{1-\beta}}$.

2. Покажем, что из

$$\left|\frac{\partial^2 f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 f\left(re^{i\varphi}\right)}{\partial\theta^2}\right|\le C\left|\zeta-z\right|^{\beta}$$

следует, что

$$\left|F''(z)\right|\le\frac{\tilde{C}_1}{\left(1-|z|\right)^{1-\beta}} .$$

$$F''(z)=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha} f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+4}}e^{-2i\theta}d\theta\rho^3 d\rho .$$

Применяя к последнему выражению метод интегрирования по частям дважды, и, учитывая, что $f\left(\rho e^{i\theta}\right)$— 2π -периодическая функция, получаем:

$$F''(z)=K\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\frac{\partial^2 f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\partial\theta^2}d\theta\rho d\rho .$$

Повторяя рассуждения пункта 1, приходим к оценке $\left|F''(z)\right|\le\frac{\tilde{C}_1}{\left(1-|z|\right)^{1-\beta}}$.

3. Покажем, что из

$$\left|\frac{\partial^m f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\partial\theta^m}-\frac{\partial^m f\left(re^{i\varphi}\right)}{\partial\theta^m}\right|\le C\left|\zeta-z\right|^{\beta}$$

следует, что

$$\left|F^{(m)}(z)\right|\le\frac{\tilde{C}_2}{\left(1-|z|\right)^{1-\beta}} .$$

Действуя по аналогии с предыдущими пунктами, имеем:

$$F^{(m)}(z)=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+m+1)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha} f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2+m}}e^{-mi\theta}d\theta\rho^{m+1}d\rho .$$

Интегрируя по частям m раз с учётом 2π -периодичности функции $f\left(\rho e^{i\theta}\right)$, получим:

$$F^{(m)}(z)=\tilde{K}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\alpha}}{\left(1-z\rho e^{-i\theta}\right)^{\alpha+2}}\frac{\partial^m f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{\partial\theta^m}d\theta\rho d\rho .$$

Откуда несложно получить, что

$$\left|F^{(m)}(z)\right|\le\frac{\tilde{C}_2}{\left(1-|z|\right)^{1-\beta}} .$$

2 Бергмановские операторы в пространствах О. Бесова в полуплоскости

Пусть $C_+=\{z:z=x+iy,\,x\in R,\,y>0\}$ — верхняя полуплоскость комплексной плоскости.

Установим аналог классической теоремы М. Рисса для классов О. Бесова в полуплоскости. Введем необходимые обозначения.

Пусть $z, \zeta \in C_+$, тогда ядро С. Бергмана имеет вид

$$K(\zeta, z) = \frac{(\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha}}{(\bar{\zeta} - z)^{\alpha+2}}.$$

Обозначим через $A_{\beta}^{p,q}$ пространство аналитических в C_+ функций с граничными значениями из классов Бесова.

Если $f \in L^p(R)$, то гармоническое продолжение функции f в C_+ имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{R^n} P_y(t) f(x+t)\,dt,$$

где $P_y(t) = \frac{C_n y}{(t^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ — ядро Пуассона, C_n — положительная константа, зависящая только от n.

Теорема 4. Пусть $f \in \Lambda_{\beta}^{p,q}(R)$, $1 \le p, q < +\infty$, $0 < \beta \le 1$. Тогда следующий интегральный оператор

$$F(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{C_+} \frac{\tau^{\alpha}}{\left((\xi - x) + i(\tau + y)\right)^{\alpha+2}} u(\xi + i\tau)\,d\xi\,d\tau$$

отображает пространство $\Lambda_{\beta}^{p,q}(R)$ на $A_{\beta}^{p,q}$, причем

$$\|F\|_{A_{\beta}^{p,q}(C_+)} \le C \|u\|_{\Lambda_{\beta}^{p,q}(R)}.$$

Доказательство.

1. $F'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} \frac{\tau^{\alpha}}{\left((\xi - x) + i(\tau + y)\right)^{\alpha+3}} u(\xi + i\tau)\,d\xi\,d\tau$. Интегрируя по частям по τ получим: $F'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^{\alpha} \frac{\partial u(\xi + i\tau)}{\partial \tau} + \tau^{\alpha-1} u(\xi + i\tau)}{\left((\xi - x) + i(\tau + y)\right)^{\alpha+2}} d\xi\,d\tau =$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^{\alpha} \frac{\partial u(\xi + i\tau)}{\partial \tau}}{\left((\xi - x) + i(\tau + y)\right)^{\alpha+2}} d\xi\,d\tau + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^{\alpha-1} u(\xi + i\tau)}{\left((\xi - x) + i(\tau + y)\right)^{\alpha+2}} d\xi\,d\tau \right).$$

Очевидно, что

$$u(\xi + i\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} \frac{\partial u(\xi + ir)}{\partial \tau} dr.$$

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^{\alpha}}{\left((\xi - x) + i(\tau + y)\right)^{\alpha+2}} \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^{+\infty} \frac{\partial u(\xi + ir)}{\partial \tau} dr\,d\xi\,d\tau.$$

$$\left|F'(z)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau^\alpha}{\left((\xi-x)^2+(\tau+y)^2\right)^{\frac{\alpha+2}{2}}}\frac{1}{\tau}\int_\tau^{+\infty}\left|\frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial\tau}\right|drd\xi d\tau .$$

2. Пусть функция $\psi(x)\in L^q(R)$, причем $\|\psi\|_{L^q}\le C$, $C-const$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\left|F'(z)\right|dx \le \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau^\alpha}{\left((\xi-x)^2+(\tau+y)^2\right)^{\frac{\alpha+2}{2}}}\frac{1}{\tau}\int_\tau^{+\infty}\left|\frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial\tau}\right|drd\xi d\tau dx \le$$

Сделаем замену $\xi-x=t$ и применим неравенство Гёльдера:

$$\le\left\|\psi(x)\right\|_{L^q}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau^\alpha}{\left(t^2+(\tau+y)^2\right)^{\frac{\alpha+2}{2}}}\frac{1}{\tau}\int_\tau^{+\infty}\left\|\frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial\tau}\right\|_{L^p}drdtd\tau .$$

По следствию из теоремы Ф. Рисса:

$$\left\|F'(z)\right\|_{L^p}\le\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau^\alpha}{\left(t^2+(\tau+y)^2\right)^{\frac{\alpha+2}{2}}}\frac{1}{\tau}\int_\tau^{+\infty}\left\|\frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial\tau}\right\|_{L^p}drdtd\tau .$$

3. Пусть функция $\psi(x)\in L^q(R_+)$, такая, что $\|\psi\|_{L^q}\le C_1$, $C_1-const$, $R_+=[0;+\infty)$.

$$\int_0^{+\infty}\varphi(y)y^{1-\beta-1/q}\left\|F'(z)\right\|_{L^p}dy\le$$

$$\le\int_0^{+\infty}\varphi(y)y^{1-\beta-1/q}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau^\alpha}{\left(t^2+(\tau+y)^2\right)^{\frac{\alpha+2}{2}}}\frac{1}{\tau}\int_\tau^{+\infty}\left\|\frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial\tau}\right\|_{L^p}drdtd\tau dy$$

Рассмотрим интеграл: $I\le\int_0^{\tau+y}\frac{dt}{(\tau+y)^{\alpha+2}}+\int_{\tau+y}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+2}}=\frac{C^*}{(\tau+y)^{\alpha+2}}$. Тогда:

$$\int_0^{+\infty}\varphi(y)y^{1-\beta-1/q}\left\|F'(z)\right\|_{L^p}dy\le\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau^\alpha\varphi(y)y^{1-\beta-1/q}}{(\tau+y)^{\alpha+1}}\frac{1}{\tau}\int_\tau^{+\infty}\left\|\frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial\tau}\right\|_{L^p}drd\tau dy .$$

$$I_1=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau^\alpha}{(\tau+y)^{\alpha+1}}\frac{1}{\tau}\int_\tau^{+\infty}\left\|\frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial\tau}\right\|_{L^p}drd\tau\le\int_0^y\frac{y^{\alpha-1}\Phi(\tau)d\tau}{y^{\alpha+1}}+\int_y^{+\infty}\frac{\tau^{\alpha-1}\Phi(\tau)d\tau}{\tau^{\alpha+1}},$$

где $\Phi(\tau)=\int_\tau^{+\infty}\left\|\frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial\tau}\right\|_{L^p}dr$.

Рассмотрим первый интеграл суммы:

$$\int_0^{+\infty}\varphi(y)y^{1-\beta-1/q}\int_0^y\frac{y^{\alpha-1}\Phi(\tau)d\tau}{y^{\alpha+1}}dy=\int_0^{+\infty}\varphi(y)y^{1-\beta-1/q}\frac{1}{y^2}\int_0^y\Phi(\tau)d\tau dy\le$$

(применим неравенство Гёльдера)

$$\le \|\varphi\|_{L^p}\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{y^{1+\beta+1/q}}\int_0^y \Phi(\tau)d\tau\right)^q dy\right)^{1/q} \le \text{(применим неравенство Харди)}$$

$$\le C^*\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^{\beta q+1}}\left(\Phi(\tau)\right)^q dy\right)^{1/q} \le C^*\left(\int_0^{+\infty}\frac{y^{-\beta q+q}}{y}\left\|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right\|_{L^p}^q dy\right)^{1/q} < +\infty .$$

Ко второму интегралу применим ту же схему.

Вернемся к началу доказательства. Осталось рассмотреть интеграл $F'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau^\alpha}{\left((\xi-x)+i(\tau+y)\right)^{\alpha+2}}\frac{\partial u(\xi+ir)}{\partial\tau}d\xi d\tau$ и применить последовательно пункты 2) и 3).

Таким образом, применяя следствие теоремы Ф. Рисса, мы доказали утверждение теоремы и неравенство

$$\|F\|_{A_\beta^{p,q}(C_+)} \le C\|u\|_{\Lambda_\beta^{p,q}(R)} .$$

Если $C_+^2 = C_+\times C_+$, то несложно доказать аналог теоремы 4, используя применяемые выше рассуждения:

Теорема 5. Пусть $f\in\Lambda_{\beta_1,\beta_2}^{p_1,p_2,q_1,q_2}\left(R^2\right)$, $1\le p_1,p_2,q_1,q_2<+\infty$, $0<\beta_1,\beta_2\le 1$ и $u\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)$ определяется следующим образом:

$$u(x,y)=\int_{R^n}\int_{R^n}P_{y_1}(t_1)P_{y_2}(t_2)f(x_1+t_1,x_2+t_2)dt_1dt_2 .$$

Тогда следующий оператор

$$F(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_{C_+}\int_{C_+}\frac{{\tau_1}^{\alpha_1}}{\left((\xi_1-x_1)+i(\tau_1+y_1)\right)^{\alpha_1+2}}\cdot\frac{{\tau_2}^{\alpha_2}}{\left((\xi_2-x_2)+i(\tau_2+y_2)\right)^{\alpha_2+2}}\times$$
$$\times u\left(\xi_1,\xi_1,\tau_1\tau_1\right)d\xi_1 d\xi_2 d\tau_1 d\tau_2$$

отображает пространство $\Lambda_{\beta_1,\beta_2}^{p_1,p_2,q_1,q_2}$ на $A_{\beta_1,\beta_2}^{p_1,p_2,q_1,q_2}$, причем

$$\|F\|_{A_{\beta_1,\beta_2}^{p_1,p_2,q_1,q_2}\left(C_+^2\right)} \le C\|u\|_{\Lambda_{\beta_1,\beta_2}^{p_1,p_2,q_1,q_2}\left(R^2\right)} .$$

Условие $f\in\Lambda_{\beta_1,\beta_2}^{p_1,p_2,q_1,q_2}\left(R^2\right)$ означает, что

$$\int_0^{+\infty} y_2^{q_2(1-\beta_2)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} y_1^{q_1(1-\beta_1)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y_1\partial y_2}\right|^{p_1}dx_1\right)^{q_1/p_1}\frac{dy_1}{y_1}\right)^{p_2/q_1}dx_1\right)^{q_2/p_2}\frac{dy_2}{y_2}<+\infty .$$

Можно также получить аналог теоремы 4 в случае $p,q<1$, $q=p$. Здесь применяется иной подход к доказательству, основанный на использовании следующих рассуждений.

Пусть $\Delta_{k,n}=\left\{(x,y):\ 2^k n\le x\le 2^{k+1}(n+1),\ 2^k\le y\le 2^{k+1},\ n,k\in Z\right\}$, $\Delta_{k,n}\bigcap\Delta_{l,m}=\varnothing$, если $k,n\ne l,m$. Тогда при

$$\int\limits_{C_+} u(x,y)\,dxdy < +\infty$$

выполняется

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\Delta_{k,n}} u(x,y)\,dxdy < +\infty .$$

Кроме того, очевидно, что размеры указанных квадратов равны 2^k.

Лемма 1. Если $u(x,y)\ge 0$, и для любого круга

$$u(x_0,y_0)\le \frac{C}{\left|K_\rho(x_0,y_0)\right|}\int\limits_{K_\rho(x_0,y_0)} u(x,y)dxdy ,$$

то

$$\sum_{k,n}\max_{(x,y)\in\Delta_{k,n}}\left|u(x,y)\right|\left|\Delta_{k,n}\right|\le C\int\limits_{C_+}\left|u(x,y)\right|dxdy .$$

Если же $C_1=\{(x,y):\ -\infty\le x\le+\infty,\ 0<y\le 1\}$, то область разбивается на $\Delta_{k,n}=\left\{(x,y):\ \frac{n}{2^k}\le x\le\frac{(n+1)}{2^{k+1}},\ \frac{1}{2^{k+1}}\le y\le\frac{1}{2^k},\ n,k\in Z\right\}$.

Теорема 6. Пусть $f\in\Lambda_\beta^{p,q}(R)$, $p,q<1$, $q=p$, $0<\beta\le 1$. Тогда интегральный оператор

$$F(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_{C_+}\frac{\tau^\alpha}{\left(\left(\xi-x\right)+i\left(\tau+y\right)\right)^{\alpha+2}}u(\xi+i\tau)d\xi d\tau$$

отображает пространство $\Lambda_\beta^{p,q}$ на $A_\beta^{p,q}$, причем

$$\|F\|_{A_\beta^{p,q}(C_+)}\le C\|u\|_{\Lambda_\beta^{p,q}(R)} .$$

Замечание: предполагается, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\tau}\int\limits_{\tau}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial\tau}dx\right|^p d\tau\le\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|^p dx .$$

Заключение

Множество исследований современных математиков сосредоточено вокруг интегральных операторов с ядрами С. Бергмана в Lp-пространствах аналитических функций с весом.

В данной работе рассмотрены указанные операторы в пространствах аналитических функций, граничные значения которых принадлежат классам Гёльдера и Бесова. Результаты работы могут быть интересны специалистам комплексного и функционального анализов.

Установлено, что интегральный оператор с ядрами типа Бергмана проектирует классы Гёльдера и Бесова на соответствующие классы аналитических функций.

В пункте 1 описано поведение интегральных операторов с ядрами Бергмана в гёльдеровских классах.

В пункте 2 рассмотрены бергмановские операторы в пространствах О. Бесова в полуплоскости. Установлен аналог классической теоремы М. Рисса для классов О. Бесова в полуплоскости.

Литература

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теорема вложения. М.: Наука, 1981. 456 с.

3. Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.

4. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986. 450 с.

5. Шамоян Ф. А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сибирский матем. журнал. 1990. Т. 31, № 2. С. 350–365.

6. Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н. Введение в теорию весовых Lp-классов мероморфных функций. Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009. 153 с.

SOME PROBLEMS IN HÖLDER AND BESOV CLASSES

Olga V. Okhlupina
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
A/Prof. of Mathematics Department
Bryansk State University of Engineering and Technology
3 Stanke Dimitrova Prospect, Bryansk 241037, Russia
helga131081@yandex.ru

Ksenia A. Rakova
Senior Lecturer,
Bryansk State Technical University
7, 50 let Oktyabrya Boulevard, Bryansk 241035, Russia
kseniya_senko@mail.ru

Abstract. In recent decades, the study of integral operators with Bergman kernels in spaces of smooth functions in complex and functional analysis has not lost its relevance. The article deals with the above-named operators in analytic spaces of the functions extended smoothly to the boundary of the domain, which boundary values belong to the Hölder and Besov classes. We have described the behavior of such operators in a circle and a half-plane. It is established that an integral operator with Bergman kernels projects Hölder classes in the case of a circle, and Besov classes in the case of a half-plane, onto the corresponding classes of analytic functions, that is, Bergman integral operator leaves the indicated classes invariant.

Keywords: integral operator; kernel; Bergman kernel; class of functions; Besov class; analytic functions; unit disc; half-plane; function space; boundary values.

References

1. Besov O. V., Ilyin V. P., Nikolsky S. M. *Integralnye predstavleniya funktsii i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and the Embedding Theorem]. Moscow: Nauka Publ., 1975. 480 p.
2. Nikolsky S. M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teorema vlozheniya* [Approximation of Functions of Several Variables and the Embedding Theorem]. Moscow: Nauka Publ., 1981. 456 p.
3. Stein E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, 1971, 1973. 304 p.
4. Triebel H. *Theory of Function Spaces.* Birkhäuser, 1983. 281 p.
5. Shamoyan F. A. Diagonalnoe otobrazhenie i voprosy predstavleniya v anizotropnykh prostranstvakh golomorfnykh v polidiske funktsii [Diagonal Mapping and Problems of Representation in Anisotropic Spaces of Holomorphic Functions in the Polydisk]. *Siberian Mathematical Journal.* 1990. Vol. 31, no. 2. Pp. 350–365.
6. Shamoyan F. A., Shubabko E. N. *Vvedenie v teoriyu vesovykh Lp-klassov meromorfnykh funktsii* [Introduction to the Theory of Weighted Lp-Classes of Meromorphic Functions]. Bryansk: Desyatochka Publ., 2009. 153 p.

Статья поступила в редакцию 25.11.2020; одобрена после рецензирования 07.12.2020; принята к публикации 11.12.2020.