УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Научная статья

УДК 517.977
doi: 10.18101/2304-5728-2021-1-3-12

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОДНОЙ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ ВОДЫ

© Аксенюшкина Елена Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Байкальский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
aks.ev@mail.ru

© Аксенюшкин Владимир Александрович
аспирант,
Байкальский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
alekshd@gmail.ru

Аннотация. Рассматривается математическая модель, связанная с процессом биологической очистки сточной воды посредством ликвидации патогенных микроорганизмов и снижения концентрации органических веществ. Процесс описывается с помощью управляемой трехмерной системы дифференциальных уравнений. Исследуется адекватность фазовых траекторий содержательному смыслу рассматриваемых переменных. Поставлены две задачи оптимального управления на минимум терминального и интегрального функционалов, имеющих смысл концентрации загрязнений сточных вод. В современных условиях такие задачи являются достаточно актуальными. Исследование задач проводится на основе принципа максимума. Анализ функций переключения управления приводит к заключению об отсутствии особых режимов и позволяет конкретизировать структуру оптимальных управлений по числу точек переключения. В результате задачи оптимального управления сводятся к минимизации функций одной или двух переменных с возможностью использования производных.

Ключевые слова: биологическая очистка воды; система дифференциальных уравнений; задачи оптимального управления; принцип максимума; параметризация задач.

Для цитирования
Аксенюшкина Е. В., Аксенюшкин В. А. Параметризация задач оптимального управления применительно к одной модели биологической очистки воды // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. № 1. С. 3–12.

Введение

Биологическая очистка сточной воды заключается в ликвидации патогенных микроорганизмов и снижении концентрации органического вещества в воде до приемлемого уровня. Одним из возможных способов такой очистки является обработка с помощью термофильных бактерий, которые убивают патогенные микроорганизмы [5]. Процесс такой очистки требует непрерывной аэрации, интенсивность которой может служить управляющим фактором для соответствующей математической модели. В результате формализации тех или иных целевых установок возникают задачи оптимального управления, исследование и численное решение которых можно провести на основе принципа максимума и метода параметризации относительно точек переключения.

1 Математическая модель

Рассмотрим математическую модель, которая описывает процесс биологической очистки сточных вод [1; 5], и представляет собой управляемую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2 x_3 + u(m - x_1), \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 x_3 - q x_3, \end{cases} \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \qquad x_2(0) = x_2^0, \qquad x_3(0) = x_3^0, \qquad x_1^0 \in (0, m), \quad x_2^0 > 0,$$
$$x_3^0 > 0.$$

Здесь $x_1(t)$ — концентрация кислорода, $x_2(t)$ — концентрация органических веществ и патогенных микроорганизмов (концентрация загрязнений), $x_3(t)$ — концентрация термофильных аэробных бактерий, $u(t)$ — скорость аэрации (обогащения кислородом).

Система (1) рассматривается на заданном отрезке времени $[0, T]$.

Первое уравнение системы описывает изменение концентрации кислорода: первое слагаемое задает его поглощение в результате реакции, второе — характеризует подкачку кислорода извне.

Второе уравнение описывает убывание концентрации загрязнений под действием химической реакции.

Наконец, третье уравнение системы (1) показывает рост биомассы термофильных аэробных бактерий в результате реакции, часть которой отмирает в силу естественных причин со скоростью распада $q > 0$. Кроме того, система включает начальные условия и ограничение на подкачку кислорода в начальный момент времени.

Система (1) является управляемой: функция $u(t)$ выступает в роли управления. Определим множество допустимых управлений в классе кусочно-непрерывных функций

$$V = \{u(\cdot) \in PC(0,T): \ u(t) \in [0, u_{\max}], \ t \in [0,T]\},$$

где $u_{\max}$ — наибольшая скорость аэрации.

2 Свойства фазовых траекторий

Проведем характеризацию фазовых траекторий системы (1) в плане знакоопределенности и оценок сверху на промежутке $[0,T]$.

Лемма 1. Для любого допустимого управления $u(t)$, $t \in [0,T]$ соответствующие решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ фазовой системы (1) удовлетворяют условиям

$$0 < x_1(t) < x_1^{\max}, \quad 0 < x_2(t) < x_2^{\max}, \quad 0 < x_3(t) < x_3^{\max}, \quad t \in [0,T],$$

где

$$x_1^{\max} = m, \quad x_2^{\max} = x_2^0, \quad x_3^{\max} = x_3^0 \exp(m x_2^0 T).$$

Доказательство. Рассмотрим второе уравнение системы (1). Представим его решение $x_2(t)$ через экспоненту

$$x_2(t) = x_2^0 \exp[-\int_0^t x_1(\xi) x_3(\xi) d\xi]. \tag{2}$$

Отсюда сразу следует условие положительности $x_2(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Аналогичным образом представляется решение третьего уравнения

$$x_3(t) = x_3^0 \exp[\int_0^t (x_1(\xi) x_2(\xi) - q) d\xi], \tag{3}$$

что приводит к условию $x_3(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Представим первое уравнение системы (1) в виде

$$\dot{x}_1 = -(x_2 x_3 + u) x_1 + m u$$

и запишем его решение по формуле Коши

$$x_1(t) = \exp[-\int_0^t (x_2(\xi) x_3(\xi) + u(\xi)) d\xi] \cdot$$

$$\cdot \left(x_1^0 + m \int_0^t \exp[\int_0^s (x_2(\xi) x_3(\xi) + u(\xi)) d\xi] u(s) ds \right).$$

Поскольку $m > 0$, $u(s) \geq 0$, то приходим к заключению $x_1(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Таким образом, все фазовые траектории системы (1) положительны, что соответствует их содержательному смыслу.

Перейдем к оценкам сверху. Введем вспомогательную функцию $y(t) = m - x_1(t),\ t \in [0, T]$. Используя первое фазовое уравнение, получаем соответствующее уравнение для $y(t)$

$$\dot{y} = -(x_2 x_3 + u)y + m x_2 x_3$$

с начальным условием $y(0) = m - x_1^0 > 0$.

Тогда функция $y(t)$ представляется по формуле Коши

$$y(t) = \exp[-\int_0^t (x_2(\xi)x_3(\xi) + u(\xi))d\xi] \cdot$$

$$\cdot \left(y(0) + m\int_0^t \exp[\int_0^s (x_2(\xi)x_3(\xi) + u(\xi))d\xi] x_2(s)x_3(s)ds \right).$$

Поскольку $x_2(s) > 0$, $x_3(s) > 0$, то заключаем, что $y(t) > 0$. Отсюда получаем первую оценку: $x_1(t) < m$, $t \in [0, T]$.

Рассмотрим далее формулу (2) для $x_2(t)$. В силу условия положительности $x_1(\xi) > 0$, $x_2(\xi) > 0$ получаем

$$\exp[-\int_0^t x_1(\xi)x_3(\xi)d\xi] < 1, \quad t \in (0, T],$$

что приводит ко второй оценке: $x_2(t) < x_2^0$.

Рассмотрим, наконец, формулу (3) для $x_3(t)$.

С учетом предыдущего получим оценку сверху для интеграла

$$\int_0^t (x_1(\xi)x_2(\xi) - q)d\xi \le \int_0^t x_1(\xi)x_2(\xi)d\xi < m x_2^0 T.$$

Следовательно, для $t \in [0, T]$

$$\exp[\int_0^t (x_1(\xi)x_2(\xi) - q)d\xi] < \exp(m x_2^0 T),$$

что приводит к неравенству $x_3(t) < x_3^0 \exp(m x_2^0 T)$. *Лемма доказана.*

Отметим, что для любого допустимого управления $u(t),\ t \in [0, T]$ соответствующие решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ фазовой системы (1) сохраняют свой содержательный смысл, причем в первом уравнении коэффициент при $u(t)$ положителен: $m - x_1(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

3 Задачи оптимального управления и принцип максимума

Для системы (1) сформулируем две задачи оптимального управления.

Первая задача заключается в минимизации концентрации загрязнений в конечный момент времени T:

$$\Phi_1(u) = x_2(T) \to \min, \quad u(\cdot) \in V. \qquad (P_1)$$

Вторая задача состоит в минимизации суммарной концентрации загрязнений на отрезке времени $[0, T]$

$$\Phi_2(u) = \int_0^T x_2(t)dt \to \min, \quad u(\cdot) \in V. \qquad (P_2)$$

Проведем анализ поставленных задач на основе принципа максимума [2; 4].

В задаче (P_1) для оптимального управления $u_1(t)$ и соответствующей оптимальной траектории $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ существует нетривиальное решение $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ сопряженной системы

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi}_1 = u_1(t)\psi_1 + x_2(t)x_3(t)(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3),\\
&\dot{\psi}_2 = x_1(t)x_3(t)(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3),\\
&\dot{\psi}_3 = x_1(t)x_2(t)(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) + q\psi_3,\\
&\psi_1(T) = 0, \quad \psi_2(T) = -1, \quad \psi_3(T) = 0,
\end{aligned} \qquad (4)$$

для которого выполняется соотношение

$$u_1(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \psi_1(t) > 0,\\ u \in [0, u_{\max}], & \psi_1(t) = 0,\\ 0, & \psi_1(t) < 0. \end{cases}$$

Здесь $\psi_1(t)$ — функция переключения, отвечающая задаче (P_1).

Указанные соотношения получены стандартным образом на основе функции Понтрягина $H(\psi, x, u) = \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u) + \psi_3 f_3(x, u)$, где f_1, f_2, f_3 — правые части фазовой системы (1).

При этом управление $u_1(t)$ является H-максимизирующим относительно переменной $u \in [0, u_{\max}]$ с учетом условия $m - x_1(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

В задаче (P_2) для оптимального управления $u_2(t)$ и отвечающей ему оптимальной траектории $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ существует нетривиальное решение $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ сопряженной системы

$$\begin{aligned}
&\dot{p}_1 = u_2(t)p_1 + x_2(t)x_3(t)(p_1 + p_2 - p_3),\\
&\dot{p}_2 = x_1(t)x_3(t)(p_1 + p_2 - p_3) + 1,\\
&\dot{p}_3 = x_1(t)x_2(t)(p_1 + p_2 - p_3) + qp_3,\\
&p_1(T) = 0, \quad p_2(T) = 0, \quad p_3(T) = 0,
\end{aligned} \qquad (5)$$

для которого выполняется соотношение

$$u_2(t) = \begin{cases} u_{\max}, & p_1(t) > 0,\\ u \in [0, u_{\max}], & p_1(t) = 0,\\ 0, & p_1(t) < 0, \end{cases}$$

где $p_1(t)$ — функция переключения в задаче (P_2).

Приведенные соотношения связаны с функцией

$$H(p,x,u) = p_1 f_1(x,u) + p_2 f_2(x,u) + p_3 f_3(x,u) - x_2 .$$

При этом $H \to \max$ управление $u_2(t)$ получено с использованием условия $m - x_1(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

4 Свойства функций переключения

Изучим основные свойства функций $\psi_1(t)$, $p_1(t)$.

Лемма 2. Функции переключения $\psi_1(t)$, $p_1(t)$ не обращаются в нуль на интервалах отрезка $[0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\psi_1(t)$.

Предположим противное: $\psi_1(t) = 0$ на некотором интервале $\Delta_1 \subset [0, T]$. Тогда $\dot\psi_1(t) = 0$, $t \in \Delta_1$. Рассмотрим сопряженную систему (4) на решении $(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ для $t \in \Delta_1$ и будем учитывать условие положительности фазовых траекторий $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Из первого уравнения получаем

$$\psi_2(t) - \psi_3(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot\psi_2(t) = \dot\psi_3(t), \quad t \in \Delta_1 .$$

Второе уравнение приводит к равенству $\dot\psi_2(t) = 0$. Тогда $\dot\psi_3(t) = 0$, и третье уравнение принимает вид $q\psi_3(t) = 0 \Rightarrow \psi_3(t) = 0$. В совокупности получаем нулевое решение: $\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_3(t) = 0, \quad t \in \Delta_1$.

Сопряженная система (4) является линейной и однородной. Следовательно, она имеет нулевое решение на всем отрезке $[0, T]$. Это противоречит условию $\psi_2(T) = -1$, т. е. сделанное предположение $\psi_1(t) = 0$, $t \in \Delta_1$ неверно.

Рассмотрим далее сопряженную систему (5) на решении $(p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ и предположим, что $p_1(t) = 0$, $t \in \Delta_2 \subset [0, T]$. Тогда из первого уравнения получаем

$$p_2(t) - p_3(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot p_2(t) = \dot p_3(t), \quad t \in \Delta_2 .$$

Второе уравнение приводит к равенству $\dot p_2(t) = 1$, т.е. $\dot p_3(t) = 1$, $t \in \Delta_2$. Из третьего уравнения получаем

$$q p_3(t) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \dot p_3(t) = 0, \quad t \in \Delta_2 .$$

Это противоречит предыдущему ($\dot p_3(t) = 1$). *Лемма доказана.*

Лемма 3. Существуют такие точки $t_1, t_2 \in [0, T)$, что $\psi_1(t) > 0$, $t \in (t_1, T)$, $p_1(t) > 0$, $t \in (t_2, T)$.

Доказательство. Рассмотрим производную $\dot\psi_1(T)$. Из сопряженной системы (4) следует, что $\dot\psi_1(T) < 0$. При этом $\psi_1(T) = 0$. Отсюда с учетом непрерывности производной $\dot\psi_1(t)$ в левой окрестности точки T заключаем, что

$$\dot\psi_1(t) < 0, \quad t \in (t_1, T) \qquad \Rightarrow \qquad \psi_1(t) > 0, \quad t \in (t_1, T).$$

Утверждение для $\psi_1(t)$ доказано. Продолжим доказательство.

Введем в рассмотрение функцию

$$g(t) = p_1(t) + p_2(t) - p_3(t), \qquad t \in [0, T].$$

В силу сопряженных уравнений (5) получаем

$$\dot{g}(t) = u_2(t)p_1(t) - qp_3(t) + (x_2(t)x_3(t) + x_1(t)x_3(t) - x_1(t)x_2(t))g(t) + 1.$$

Поскольку $g(T) = 0$, то $\dot{g}(T) = 1$. Следовательно, $g(t) < 0$, $t \in (t_2, T)$.

Уравнение для $p_1(t)$ имеет вид

$$\dot{p}_1 = u_2(t)p_1 + x_2(t)x_3(t)g(t), \qquad p_1(T) = 0.$$

Представим его решение по формуле Коши

$$p_1(t) = -\int_t^T \exp[-\int_t^s u_2(\xi)d\xi]x_2(s)x_3(s)g(s)ds.$$

Отсюда с учетом предыдущего приходим к заключению: $p_1(t) > 0$, $t \in (t_2, T)$. *Лемма доказана.*

Следствие. Для оптимальных управлений $u_1(t),\ u_2(t),\ t \in [0, T]$ справедливы соотношения

$$u_1(t) = u_{\max}, \quad t \in (t_1, T]; \quad u_2(t) = u_{\max}, \quad t \in (t_2, T].$$

Сформулируем итоговый результат о числе точек переключения.

Лемма 4. Функция переключения $\psi_1(t)$ имеет не более одного нуля на промежутке $[0, T)$, функция переключения $p_1(t)$ имеет не более двух нулей на $[0, T)$.

Доказательство этого утверждения приведено в [1].

5 Структура оптимальных управлений и параметризация задач

Перейдем к заключениям о структуре оптимальных управлений в задачах (P_1), (P_2) на основании выражений для H-максимизирующих управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$ и свойств функций переключения $\psi_1(t)$, $p_1(t)$.

Справедливы следующие утверждения.

1. В задаче (P_1) оптимальное управление $u_1^*(t)$ определяется формулой

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \tau_*, \\ u_{\max}, & \tau_* < t \le T, \end{cases}$$

где $\tau_* \in [0, T)$ — точка переключения.

2. В задаче (P_2) оптимальное управление $u_2^*(t)$ определяется формулой

$$u_2^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \le t \le \theta_1^*, \\ 0, & \theta_1^* < t \le \theta_2^*, \\ u_{\max}, & \theta_2^* < t \le T, \end{cases}$$

где $\theta_1^*, \theta_2^* \in [0, T)$ — точки переключения.

Таким образом:

– в задаче (P_1) оптимальное управление является либо постоянным со значением $u_{\max}$, либо кусочно-постоянным со значениями 0, $u_{\max}$ и одной точкой переключения на $(0, T)$;

– в задаче (P_2) оптимальное управление дополнительно к предыдущим режимам может быть кусочно-постоянным со значениями $u_{\max}$, 0, $u_{\max}$ и двумя точками переключения на $(0, T)$.

На основании этих заключений открывается возможность параметризации задач (P_1), (P_2) по точкам переключения с редукцией к задачам одномерной или двумерной оптимизации. Формализуем эту схему решения.

Для произвольного значения $\tau \in [0, T)$ определим допустимое управление $u_\tau(t)$ по формуле

$$u_\tau(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \tau, \\ u_{\max}, & \tau < t \le T. \end{cases}$$

Введем множество

$$\Theta = \{ \theta = (\theta_1, \theta_2), \quad 0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le T \}$$

и для произвольной точки $\theta \in \Theta$ зададим управление

$$u_\theta(t) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \le t \le \theta_1, \\ 0, & \theta_1 < t \le \theta_2, \\ u_{\max}, & \theta_2 < t \le T. \end{cases}$$

Для управлений $u_\tau(t)$, $u_\theta(t)$ определим соответствующие фазовые траектории $x(t, \tau)$, $x(t, \theta)$, $t \in [0, T]$. При этом функционалы $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$ задач (P_1), (P_2) формализуются как функции точек переключения

$$F_1(\tau) = \Phi_1(u_\tau) = x_2(T, \tau),$$

$$F_2(\theta_1, \theta_2) = \Phi_2(u_\theta) = \int_0^T x_2(t, \theta)dt.$$

В результате такой параметризации приходим к задачам одномерной и двумерной оптимизации

$$F_1(\tau) \to \min, \quad \tau \in [0, T), \qquad F_2(\theta_1, \theta_2) \to \min, \quad (\theta_1, \theta_2) \in \Theta,$$

для решения которых можно использовать стандартные программы.

Для повышения эффективности численного решения есть возможность задействовать информацию о производных. Если найти решения $\psi(t,\tau)$, $p(t,\theta)$ сопряженных систем, то производные целевых функций выражаются по формулам [3]

$$\frac{dF_1(\tau)}{d\tau} = (m - x_1(\tau,\tau))\psi_1(\tau,\tau)u_{\max},$$

$$\frac{\partial F_2(\theta)}{\partial \theta_1} = -(m - x_1(\theta_1,\theta))\,p_1(\theta_1,\theta)u_{\max},$$

$$\frac{\partial F_2(\theta)}{\partial \theta_2} = (m - x_1(\theta_2,\theta))\,p_1(\theta_2,\theta)u_{\max}.$$

Заключение

Рассмотрены две задачи оптимального управления с терминальным и интегральным функционалами для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая моделирует процесс биологической очистки воды. Функционалы характеризуют концентрацию загрязнений, которая подлежит минимизации. Анализ задачи проводится на основе принципа максимума с дополнительным исследованием фазовых траекторий и функций переключения управления. В результате проведена конкретизация структуры оптимальных управлений, что позволяет осуществить редукцию исходных задач к минимизации функций одной или двух переменных по числу точек переключения.

Литература

1. Бондаренко Н. В., Григорьева Э. В., Хайлов Е. Н. Задачи минимизации загрязнений в математической модели биологической очистки сточных вод // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 4. С. 614–627. Текст: непосредственный.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Москва: Либроком, 2011. 272 с. Текст: непосредственный.

3. Горбунов В. К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18, № 5. С. 1083–1095. Текст: непосредственный.

4. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с. Текст: непосредственный.

5. Rojas J., Burke M., Chapwanya M. Modeling of Autothermal Thermophilic Aerobic Digestion // Math. Industry Case Studies J. 2010. V. 2. Pp. 34–63.

PARAMETERIZATION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS
APPLIED TO A SINGLE MODEL OF BIOLOGICAL WATER TREATMENT

Elena V. Aksenyushkina
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Baikal State University
11 Lenin St., Irkutsk 664003, Russia
aks.ev@mail.ru

Vladimir A. Aksenyushkin
postgraduate student,
Baikal State University
11 Lenin St., Irkutsk 664003, Russia
alekshd@gmail.ru

Abstract. A mathematical model related to the process of biological wastewater treatment by eliminating pathogenic microorganisms and reducing the concentration of organic substances is considered. The process is described using a controlled three-dimensional system of differential equations. The adequacy of the phase trajectories to the meaningful meaning of the variables under consideration is investigated. Two optimal control problems are set for the minimum of terminal and integral functionals that make sense of the concentration of wastewater pollution. In modern conditions, such tasks are quite relevant. The study of problems is carried out based on the maximum principle. The analysis of the control switching function leads to the conclusion that there are no special modes and allows us to specify the structure of optimal controls by the number of switching points. As a result, optimal control problems are reduced to minimizing the functions of one or two variables with the possibility of using derivatives.

Keywords: biological water purification; the system of differential equations; optimal control problems; maximum principle; parametrization of the problem.

For citation

Aksenyushkina E. V., Aksenyushkin V. A. Parameterization of Optimal Control Problems Applied to a Single Model of Biological Water Treatment. *Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics.* 2021; 1: 3–12 (In Russ.).

References

1. Bondarenko N. V., Grigorieva E. V., Khaylov E. N. Problems of Pollution Minimization in the Mathematical Model of Biological Wastewater Treatment. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2012. Vol. 52, no. 4. Pp. 614–627.
2. Gabasov R., Kirillova F. M. *The Maximum Principle in the Theory of Optimal Control*. Moscow: Librocom Publ., 2011. 272 p.
3. Gorbunov V. K. On Reducing Optimal Control Problems to Finite-dimensional Ones. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1978. Vol. 18, no. 5. Pp. 1083–1095.
4. Srochko V. A. *Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems*. Moscow: Fizmatlit Publ., 2000. 160 p.
5. Rojas J., Burke M., Chapwanya M. Modeling of Autothermal Thermophilic Aerobic Digestion. *Math. Industry Case Studies J*. 2010. V. 2. Pp. 34–63.

Статья поступила в редакцию 02.03.2021; одобрена после рецензирования 05.03.2021; принята к публикации 10.03.2021.

The article was submitted 02.03.2021; approved after reviewing 05.03.2021; accepted for publication 10.03.2021.