Научная статья

УДК 517.977
DOI: 10.18101/2304-5728-2021-3-14-27

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ РЕГИОНА

© Булдаев Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
buldaev@mail.ru

© Дырхеев Константин Павлович
кандидат экономических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
dkonst86@gmail.com

Аннотация. Рассматривается модель оптимизации межотраслевой экономики региона, формируемая на основе динамической межотраслевой модели Леонтьева. Задача оптимизации с критерием максимизации вектора потребления домашних хозяйств сводится к дискретной задаче оптимального управления на основе дискретной динамической модели. Полученная дискретная задача оптимизации рассматривается как задача линейного программирования относительно вектора отраслевых валовых выпусков в регионе. Разработанная методика оптимизации апробируется на реальных данных по трем укрупненным секторам экономики Республики Бурятия. В результате решения симплекс-методом задачи линейного программирования показана эффективность предложенной в работе методики оптимизации как средства решения сложных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, возникающих при моделировании межотраслевого баланса.

Ключевые слова: модель межотраслевого баланса; задача оптимального управления; задача линейного программирования; метод оптимизации.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-41-030005_р-а, и Бурятского госуниверситета, проект 2021 г.

Для цитирования
Булдаев А. С., Дырхеев К. П. Моделирование и оптимизация межотраслевой экономики региона // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. № 3. С. 14–27.

Введение

Исследования в области моделирования межотраслевых связей в регионах достаточно широко распространены в отечественной и зарубежной науке. Основы изучения межотраслевых моделей в статической и динамической постановке заложил В. Леонтьев [11]. В дальнейшем существенный вклад в развитие направлений, связанных с построением межотраслевых моделей и моделированием динамических процессов в межотраслевой экономике регионов, внесли А. Г. Гранберг, В. И. Гурман, В. С. Дадаян, Н. П. Дементьев, А. О. Баранов, В. Н. Павлов, М. Моришима, К. Миядзава, Р. Миллер и др. [2; 3; 4; 5; 13; 16; 18].

В последнее время в ряде регионов Российской Федерации возобновились работы по составлению межотраслевых балансов на основе составляемых статистическими органами региональных таблиц «затраты-выпуск». Разрабатываемые на их основе статические межотраслевые модели позволяют проводить анализ отраслевой структуры и межотраслевых связей на определенных территориях. Несмотря на ограниченность информационной базы, интенсивно развиваются исследования в области разработки в регионах динамических межотраслевых моделей [1; 6; 13]. Так, по Республике Бурятия на основе реальных показателей межотраслевой таблицы «затраты-выпуск» экспериментально рассчитаны коэффициенты прямых и полных затрат, нормативы инвестиционного блока и матрицы потребительских расходов, послужившие основой для разработки дискретной динамической межотраслевой модели по укрупненным секторам экономики [6]. С помощью выведенного характеристического уравнения матрицы замкнутого динамического межотраслевого баланса рассчитана траектория сбалансированного экономического роста региона на среднесрочную перспективу.

С уточнением управляющих параметров, технологических, инвестиционных и потребительских коэффициентов на основе разработанной динамической межотраслевой модели появляется возможность динамической постановки задачи оптимизации регионального межотраслевого баланса. В качестве критерия оптимизации естественным представляется максимизация потребительских расходов домашних хозяйств с учетом структурного соизмерения различных потребительских благ. Тем самым выявляются возможности максимального роста благосостояния жителей определенного региона в ближайшей перспективе с учетом имеющихся ресурсных, технологических и инвестиционных ограничений.

1 Модель оптимизации межотраслевого баланса

Задача оптимизации межотраслевого баланса производства и распределения продукции на основе известной динамической модели Леонтьева может быть представлена в следующей постановке, аналогичной работам [1-3]:

$$\int_0^T \langle g, c(t)\rangle dt \to \max, \tag{1}$$

$$x(t) = Ax(t) + B\frac{dx(t)}{dt} + c(t), \quad x(0) = x^0, \tag{2}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \geq 0, \ c(t) \geq 0, \ t \in [0,T]. \tag{3}$$

в которой $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ — вектор отраслевых валовых выпусков в регионе, $A \geq 0$ — продуктивная матрица коэффициентов прямых производственных затрат, $B \geq 0$ — матрица затрат продукции i-ой отрасли на создание единицы производственной мощности в j-ой отрасли, $c(t) = (c_1(t),...,c_n(t))$ — вектор потребления домашних хозяйств. Заданный вектор $g = (g_1,...,g_n)$ характеризует соизмерение различных потребительских благ. Начальное состояние $x^0 \geq 0$ и интервал $[0,T]$ фиксированы.

Задачу (1)–(3) можно свести к задаче оптимального управления:

$$\int_0^T \langle g, x(t) - Ax(t) - Bu(t)\rangle dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ \ x(0) = x^0, \ u(t) \geq 0,$$

$$x(t) - Ax(t) - Bu(t) \geq 0, \ t \in [0,T].$$

Рассматривая вектор конечного потребления $y(t) = x(t) - Ax(t)$, эту задачу можно также представить в следующей форме:

$$\int_0^T \langle g, y(t) - Bu(t)\rangle dt \to \max,$$

$$\dot{y}(t) = (E - A)u(t), \ \ y(0) = y^0 = x^0 - Ax^0, \ u(t) \geq 0,$$

$$y(t) - Bu(t) \geq 0, \ t \in [0,T].$$

Решение оптимизационных задач в указанной непрерывной постановке существенно осложняется характерным для большинства случаев свойством вырожденности матрицы B при практическом моделировании многопродуктового баланса ($n > 1$) [4]:

$$\det B = 0.$$

Учитывая случай вырожденности матрицы B, задачу оптимизации баланса рассмотрим в дискретной постановке на основе разностной динамической модели, аналогичной работе [4]:

$$\sum_{t=1}^{T} \langle g, c(t)\rangle \to \max, \tag{4}$$

$$x(t) = Ax(t) + B(x(t) - x(t-1)) + c(t), \quad x(0) = x^0, \tag{5}$$

$$x(t)-x(t-1)\geq 0\,,\quad c(t)\geq 0\,,\ t\in\{1,...,T\}\,. \tag{6}$$

Дискретная задача (4)–(6) может рассматриваться в качестве возможной аппроксимации непрерывной задачи (1)–(3) при поиске допустимого начального приближения для итерационных методов решения.

Матрицу B определим соотношением:

$$B=Kf\,,$$

в котором $K=(k_{il})_{n\times m}$ — матрица капитальных затрат, показывающая, сколько выпускаемой продукции i-го вида затрачивается для ввода в действие единицы капитала l-го вида ($l=1,....m$), $f=(f_{lj})_{m\times n}$ — матрица фондоемкости валовых выпусков.

Начальное условие x^0 базового года определяется на основе баланса:

$$x(0)=Ax(0)+y(0)\,,$$

в котором вектор конечного потребления $y(0)$ определяется заданными начальными показателями базового года:

$$y(0)=k(0)+c(0)\,,$$

$c(0)$ — потребление домашних хозяйств, $k(0)$ — капитальные вложения (инвестиции).

Задавая различные траектории потребления домашних хозяйств $c(t)$, $t\in\{1,...,T\}$ и решая систему (5), можно определить согласованные по векторам капитала и непроизводственного потребления объемы валовых выпусков $x(t)$, $t\in\{1,...,T\}$.

Цель оптимизации состоит в определении таких траекторий потребления $c(t)$, которые дают не меньшую величину суммарного потребления $\sum_{t=1}^{T}\langle g,c(t)\rangle$ по сравнению с любой экзогенной траекторией потребления (в частности, растущей с постоянным темпом). При этом определяется верхняя оценка достижения критерия оптимальности (так называемый «технологически достижимый» показатель суммарного потребления).

Принимая переменную $c(t)$ в качестве управления:

$$u(t)=c(t)\,,$$

задачу (4)–(6) можно представить в форме специальной дискретной задачи оптимального управления:

$$\sum_{t=1}^{T}\langle g,u(t)\rangle\to\max\,, \tag{7}$$

$$x(t)=(E-A-B)^{-1}(u(t)-Bx(t-1))\,,\quad x(0)=x^0\,,\ u(t)\geq 0\,, \tag{8}$$

$$x(t)-x(t-1)\geq 0\,,\ t\in\{1,...,T\}\,. \tag{9}$$

Оптимальное управление $u^*(t)=c^*(t)$ задачи (7)–(9) дает непосредственное решение поставленной проблемы оптимизации.

2 Метод оптимизации

Для достижения цели оптимизации предлагается решить вспомогательную задачу:

$$\sum_{t=1}^{T}\left\langle g,(E-A-B)x(t)+Bx(t-1)\right\rangle \to \max, \tag{10}$$

$$x(t)-x(t-1)\ge 0,\ \ (E-A-B)x(t)+Bx(t-1)\ge 0,\ t\in\{1,...,T\}, \tag{11}$$

в которой $x(0)=x^0\ge 0$ — заданный вектор. Очевидно, задача (10), (11) является эквивалентной задаче (4)–(6).

Пусть $x^*(t)$, $t\in\{1,...,T\}$ — решение задачи (10), (11). Тогда вектор

$$c^*(t)=(E-A-B)x^*(t)+Bx^*(t-1)$$

является опосредованным решением рассматриваемой проблемы оптимизации.

Поставим в соответствие каждому моменту времени $t\in\{0,1,...,T\}$ целый индекс $k\in\{0,1,...,N\}$. Введем обозначения $x_k=x(t)$, $k\in\{0,1,...,N\}$. Тогда задача (10), (11) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{N}\left\langle g,(E-A-B)x_k+Bx_{k-1}\right\rangle \to \max,$$

$$x_k-x_{k-1}\ge 0,\ \ (E-A-B)x_k+Bx_{k-1}\ge 0,\ k\in\{1,...,N\}$$

с заданным вектором $x_k=x^0\ge 0$ при $k=0$.

Рассмотрим вспомогательный вектор:

$$x=(x_{11},...,x_{N1},x_{12},...,x_{N2},...,x_{1n},...,x_{Nn}).$$

Введем следующие обозначения $x_{0j}=x_j^0$, $j=\overline{1,n}$.

Тогда задачу (10), (11) можно представить в форме эквивалентной задачи линейного программирования относительно вектора x:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}g_i\Big(\sum_{j=1}^{n}(e_{ij}-a_{ij}-b_{ij})x_{kj}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_{(k-1)j}\Big)=\\&=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}g_i(e_{ij}-a_{ij}-b_{ij})\Big)x_{kj}+\Big(\sum_{i=1}^{n}g_ib_{ij}\Big)x_{(k-1)j}\Big)\to\max,\end{aligned} \tag{12}$$

$$x_{ki}-x_{(k-1)i}\ge 0,\ \sum_{j=1}^{n}(e_{ij}-a_{ij}-b_{ij})x_{kj}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_{(k-1)j}\ge 0,\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,N}. \tag{13}$$

Неравенства (13) введением дополнительных неотрицательных переменных могут быть приведены к равенствам. Для решения полученной таким образом канонической задачи линейного программирования с ограничениями-равенствами можно использовать известный симплекс-метод [5]. При таком подходе отметим, что значения искомого вектора потребления не требуется вычислять отдельно после нахождения решения, так как они определяются соответствующими значениями дополнительных переменных решения канонической задачи.

Также отметим, что задача (10), (11), представляемая в форме задачи линейного программирования (12), (13), может рассматриваться как эффективное средство решения достаточно сложной задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями (7)–(9) и характерным свойством вырожденности ($\det B = 0$).

3 Модельный пример региональной экономики

В качестве иллюстрации предлагаемой методики оптимизации рассмотрим следующую модель по трем укрупненным отраслям (секторам) экономики на основе осредненных статистических данных по Республике Бурятия: добывающие отрасли, перерабатывающие отрасли и прочие отрасли (в основном сфера услуг): $n = 3$. Вектор капитала рассмотрим без разделения на отдельные виды: $m = 1$. Значения балансовых переменных указываются в миллионах рублей.

Технологическая матрица (матрица прямых затрат) имеет вид:

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0,1454 & 0,2109 & 0,0297 \\ 0,2458 & 0,2890 & 0,2869 \\ 0,0216 & 0,0411 & 0,1636 \end{pmatrix}.$$

Матрица фондоемкости:

$$f = (f_{lj})_{m\times n} = (1,42 \quad 1,28 \quad 0,84)\,.$$

Матрица капитальных затрат:

$$K = (k_{il})_{n\times m} = (1,24 \quad 1,35 \quad 1,08)^T\,.$$

Таким образом, имеем матрицу капиталоемкости:

$$B = Kf = (b_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1,7608 & 1,5872 & 1,0416 \\ 1,9170 & 1,7280 & 1,1340 \\ 1,5336 & 1,3824 & 0,9072 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица капиталоемкости является вырожденной, т.е. $\det B = 0$.

Вычислим вспомогательную матрицу:

$$D = E - A - B = \begin{pmatrix} -0,9062 & -1,7981 & -1,0713 \\ -2,1628 & -1,0170 & -1,4209 \\ -1,5552 & -1,4235 & -0,0708 \end{pmatrix}.$$

Начальные показатели для базового года следующие.

Потребление домашних хозяйств:

$$c(0) = \begin{pmatrix} 12191 \\ 75362 \\ 23274 \end{pmatrix}.$$

Капитальные вложения (инвестиции):

$$U(0)=\begin{pmatrix}9426\\13353\\9267\end{pmatrix}.$$

Конечное потребление:

$$y(0)=\begin{pmatrix}21617\\88715\\32541\end{pmatrix}=U(0)+c(0).$$

Решая матричное уравнение, получаем округленный до целого начальный валовой выпуск продуктов и услуг:

$$x(0)=\begin{pmatrix}68506\\168207\\48941\end{pmatrix}=Ax(0)+y(0).$$

Рассмотрим задачу вида (10), (11) на интервале $T=1$ с округленным начальным значением $x(0)$:

$$x^0=\begin{pmatrix}68506\\168207\\48941\end{pmatrix}.$$

Соответствующая задача линейного программирования (12), (13) с $N=1$ приводится к виду:

$$(g_1d_{11}+g_2d_{21}+g_3d_{31})x_{11}+(g_1d_{12}+g_2d_{22}+g_3d_{32})x_{12}+$$
$$+(g_1d_{13}+g_2d_{23}+g_3d_{33})x_{13}\to\max$$
$$x_{11}-x_1^0\geq 0,\ x_{12}-x_2^0\geq 0,\ x_{13}-x_3^0\geq 0,$$
$$d_{11}x_{11}+d_{12}x_{12}+d_{13}x_{13}+b_{11}x_1^0+b_{12}x_2^0+b_{13}x_3^0\geq 0,$$
$$d_{21}x_{11}+d_{22}x_{12}+d_{23}x_{13}+b_{21}x_1^0+b_{22}x_2^0+b_{23}x_3^0\geq 0,$$
$$d_{31}x_{11}+d_{32}x_{12}+d_{33}x_{13}+b_{31}x_1^0+b_{32}x_2^0+b_{33}x_3^0\geq 0,$$

Округленное до целого решение этой задачи при $g=(1,1,1)$, полученное симплекс методом, имеет вид:

$$x_{11}^*=68506,\ x_{12}^*=168207,\ x_{13}^*=48941.$$

Таким образом, в задаче вида (10), (11) при $T=1$ с заданным x^0 получаем округленный до целого оптимальный вектор валового выпуска отраслей:

$$x^*(1)=\begin{pmatrix}68506\\168207\\48941\end{pmatrix}=x^0.$$

Отсюда по формуле:

$$c^*(t)=(E-A-B)x^*(t)+Bx^*(t-1)$$

получаем округленный до целого оптимальный вектор потребления:

$$c^*(1) = \begin{pmatrix} 21617 \\ 88715 \\ 32541 \end{pmatrix} = y(0)\,.$$

При других значениях $g = (1,0,0)$, $g = (0,1,0)$ и $g = (0,0,1)$ оптимальный вектор потребления $c^*(1)$ также совпадает с $y(0)$.

Рассмотрим задачу (10), (11) на интервале $T = 2$. Соответствующая задача (12), (13) с $N = 2$ приводится к виду:

$$\begin{aligned}
&(g_1d_{11} + g_2d_{21} + g_3d_{31})x_{11} + (g_1d_{12} + g_2d_{22} + g_3d_{32})x_{12} + \\
&+(g_1d_{13} + g_2d_{23} + g_3d_{33})x_{13} + \\
&+(g_1d_{11} + g_2d_{21} + g_3d_{31})x_{21} + (g_1d_{12} + g_2d_{22} + g_3d_{32})x_{22} + \\
&+(g_1d_{13} + g_2d_{23} + g_3d_{33})x_{23} + \\
&+(g_1b_{11} + g_2b_{21} + g_3b_{31})x_{11} + (g_1b_{12} + g_2b_{22} + g_3b_{32})x_{12} + \\
&+(g_1b_{13} + g_2b_{23} + g_3b_{33})x_{13} \to \max,
\end{aligned}$$

$$x_{11} - x_1^0 \ge 0\,,\ x_{12} - x_2^0 \ge 0\,,\ x_{13} - x_3^0 \ge 0\,,$$

$$d_{11}x_{11} + d_{12}x_{12} + d_{13}x_{13} + b_{11}x_1^0 + b_{12}x_2^0 + b_{13}x_3^0 \ge 0\,,$$

$$d_{21}x_{11} + d_{22}x_{12} + d_{23}x_{13} + b_{21}x_1^0 + b_{22}x_2^0 + b_{23}x_3^0 \ge 0\,,$$

$$d_{31}x_{11} + d_{32}x_{12} + d_{33}x_{13} + b_{31}x_1^0 + b_{32}x_2^0 + b_{33}x_3^0 \ge 0\,,$$

$$x_{21} - x_{11} \ge 0\,,\ x_{22} - x_{12} \ge 0\,,\ x_{23} - x_{13} \ge 0\,,$$

$$d_{11}x_{21} + d_{12}x_{22} + d_{13}x_{23} + b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{13}x_{13} \ge 0\,,$$

$$d_{21}x_{21} + d_{22}x_{22} + d_{23}x_{23} + b_{21}x_{11} + b_{22}x_{12} + b_{23}x_{13} \ge 0\,,$$

$$d_{31}x_{21} + d_{32}x_{22} + d_{33}x_{23} + b_{31}x_{11} + b_{32}x_{12} + b_{33}x_{13} \ge 0\,,$$

Округленное до целого решение этой задачи при $g = (1,1,1)$ имеет вид:

$$x_{11}^* = 68506\,,\ x_{12}^* = 168207\,,\ x_{13}^* = 48941\,,\ x_{21}^* = 68506\,,\ x_{22}^* = 168207\,,$$

$$x_{23}^* = 48941\,.$$

Следовательно, получаем округленную до целого оптимальную траекторию вектора валового выпуска отраслей:

$$x^*(1) = x^*(2) = \begin{pmatrix} 68506 \\ 168207 \\ 48941 \end{pmatrix} = x^0\,.$$

Таким образом, округленная до целого оптимальная траектория вектора потребления имеет вид:

$$c^*(1) = c^*(2) = \begin{pmatrix} 21617 \\ 88715 \\ 32541 \end{pmatrix} = y(0)\,.$$

При значениях $g=(1,0,0)$, $g=(0,1,0)$ получаем тот же самый ответ.

При значении $g=(0,0,1)$ получаем другой ответ:

$$x^*(1)=\begin{pmatrix}68506\\168207\\69119\end{pmatrix},\ x^*(2)=\begin{pmatrix}68506\\168207\\69119\end{pmatrix}.$$

$$c^*(1)=\begin{pmatrix}0\\60044\\31113\end{pmatrix},\ c^*(2)=\begin{pmatrix}21018\\82926\\49418\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу (10), (11) на интервале $T=5$. Соответствующая задача (12), (13) с $N=5$ приводится к виду:

$$\begin{aligned}
&(g_1d_{11}+g_2d_{21}+g_3d_{31})x_{11}+(g_1d_{12}+g_2d_{22}+g_3d_{32})x_{12}+\\
&+(g_1d_{13}+g_2d_{23}+g_3d_{33})x_{13}+\\
&+(g_1d_{11}+g_2d_{21}+g_3d_{31})x_{21}+(g_1d_{12}+g_2d_{22}+g_3d_{32})x_{22}+\\
&+(g_1d_{13}+g_2d_{23}+g_3d_{33})x_{23}+\\
&+(g_1b_{11}+g_2b_{21}+g_3b_{31})x_{11}+(g_1b_{12}+g_2b_{22}+g_3b_{32})x_{12}+\\
&+(g_1b_{13}+g_2b_{23}+g_3b_{33})x_{13}+\\
&+(g_1d_{11}+g_2d_{21}+g_3d_{31})x_{31}+(g_1d_{12}+g_2d_{22}+g_3d_{32})x_{32}+\\
&+(g_1d_{13}+g_2d_{23}+g_3d_{33})x_{33}+\\
&+(g_1b_{11}+g_2b_{21}+g_3b_{31})x_{21}+(g_1b_{12}+g_2b_{22}+g_3b_{32})x_{22}+\\
&+(g_1b_{13}+g_2b_{23}+g_3b_{33})x_{23}+\\
&+(g_1d_{11}+g_2d_{21}+g_3d_{31})x_{41}+(g_1d_{12}+g_2d_{22}+g_3d_{32})x_{42}+\\
&+(g_1d_{13}+g_2d_{23}+g_3d_{33})x_{43}+\\
&+(g_1b_{11}+g_2b_{21}+g_3b_{31})x_{31}+(g_1b_{12}+g_2b_{22}+g_3b_{32})x_{32}+\\
&+(g_1b_{13}+g_2b_{23}+g_3b_{33})x_{33}+\\
&+(g_1d_{11}+g_2d_{21}+g_3d_{31})x_{51}+(g_1d_{12}+g_2d_{22}+g_3d_{32})x_{52}+\\
&+(g_1d_{13}+g_2d_{23}+g_3d_{33})x_{53}+\\
&+(g_1b_{11}+g_2b_{21}+g_3b_{31})x_{41}+(g_1b_{12}+g_2b_{22}+g_3b_{32})x_{42}+\\
&+(g_1b_{13}+g_2b_{23}+g_3b_{33})x_{43}\to\max,
\end{aligned}$$

$$x_{11}-x_1^0\ge 0,\ x_{12}-x_2^0\ge 0,\ x_{13}-x_3^0\ge 0,$$

$$d_{11}x_{11}+d_{12}x_{12}+d_{13}x_{13}+b_{11}x_1^0+b_{12}x_2^0+b_{13}x_3^0\ge 0,$$

$$d_{21}x_{11}+d_{22}x_{12}+d_{23}x_{13}+b_{21}x_1^0+b_{22}x_2^0+b_{23}x_3^0\ge 0,$$

$$d_{31}x_{11}+d_{32}x_{12}+d_{33}x_{13}+b_{31}x_1^0+b_{32}x_2^0+b_{33}x_3^0\ge 0,$$

$$x_{21}-x_{11}\ge 0,\ x_{22}-x_{12}\ge 0,\ x_{23}-x_{13}\ge 0,$$

$$d_{11}x_{21}+d_{12}x_{22}+d_{13}x_{23}+b_{11}x_{11}+b_{12}x_{12}+b_{13}x_{13}\ge 0,$$

$$d_{21}x_{21}+d_{22}x_{22}+d_{23}x_{23}+b_{21}x_{11}+b_{22}x_{12}+b_{23}x_{13}\geq 0\,,$$
$$d_{31}x_{21}+d_{32}x_{22}+d_{33}x_{23}+b_{31}x_{11}+b_{32}x_{12}+b_{33}x_{13}\geq 0\,,$$
$$x_{31}-x_{21}\geq 0\,,\ x_{32}-x_{22}\geq 0\,,\ x_{33}-x_{23}\geq 0\,,$$
$$d_{11}x_{31}+d_{12}x_{32}+d_{13}x_{33}+b_{11}x_{21}+b_{12}x_{22}+b_{13}x_{23}\geq 0\,,$$
$$d_{21}x_{31}+d_{22}x_{32}+d_{23}x_{33}+b_{21}x_{21}+b_{22}x_{22}+b_{23}x_{23}\geq 0\,,$$
$$d_{31}x_{31}+d_{32}x_{32}+d_{33}x_{33}+b_{31}x_{21}+b_{32}x_{22}+b_{33}x_{23}\geq 0\,,$$
$$x_{41}-x_{31}\geq 0\,,\ x_{42}-x_{32}\geq 0\,,\ x_{43}-x_{33}\geq 0\,,$$
$$d_{11}x_{41}+d_{12}x_{42}+d_{13}x_{43}+b_{11}x_{31}+b_{12}x_{32}+b_{13}x_{33}\geq 0\,,$$
$$d_{21}x_{41}+d_{22}x_{42}+d_{23}x_{43}+b_{21}x_{31}+b_{22}x_{32}+b_{23}x_{33}\geq 0\,,$$
$$d_{31}x_{41}+d_{32}x_{42}+d_{33}x_{43}+b_{31}x_{31}+b_{32}x_{32}+b_{33}x_{33}\geq 0\,,$$
$$x_{51}-x_{41}\geq 0\,,\ x_{52}-x_{42}\geq 0\,,\ x_{53}-x_{43}\geq 0\,,$$
$$d_{11}x_{51}+d_{12}x_{52}+d_{13}x_{53}+b_{11}x_{41}+b_{12}x_{42}+b_{13}x_{43}\geq 0\,,$$
$$d_{21}x_{51}+d_{22}x_{52}+d_{23}x_{53}+b_{21}x_{41}+b_{22}x_{42}+b_{23}x_{43}\geq 0\,,$$
$$d_{31}x_{51}+d_{32}x_{52}+d_{33}x_{53}+b_{31}x_{41}+b_{32}x_{42}+b_{33}x_{43}\geq 0\,.$$

Решая эту задачу при $g=(1,1,1)$, получаем оптимальную траекторию вектора валового выпуска отраслей:

$$x^*(1)=x^*(2)=x^*(3)=x^*(4)=x^*(5)=\begin{pmatrix}68506\\168207\\48941\end{pmatrix}=x^0\,.$$

Тогда оптимальная траектория вектора потребления принимает вид:

$$c^*(1)=c^*(2)=c^*(3)=c^*(4)=c^*(5)=\begin{pmatrix}21617\\88715\\32541\end{pmatrix}=y(0)\,.$$

При $g=(1,0,0)$ имеем:

$$x^*(1)=\begin{pmatrix}89313\\168207\\51519\end{pmatrix},\ x^*(2)=\begin{pmatrix}111334\\168207\\51519\end{pmatrix},\ x^*(3)=x^*(4)=x^*(5)=\begin{pmatrix}133050\\168207\\51519\end{pmatrix},$$

$$c^*(1)=\begin{pmatrix}0\\40051\\0\end{pmatrix},\ c^*(2)=\begin{pmatrix}19366\\35233\\0\end{pmatrix},\ c^*(3)=\begin{pmatrix}38463\\30482\\0\end{pmatrix},\ c^*(4)=c^*(5)=\begin{pmatrix}76700\\72111\\33303\end{pmatrix}.$$

При $g=(0,1,0)$ имеем:

$$x^*(1)=\begin{pmatrix}68506\\180229\\48941\end{pmatrix},\ x^*(2)=\begin{pmatrix}68506\\190841\\48941\end{pmatrix},\ x^*(3)=x^*(4)=x^*(5)=\begin{pmatrix}68506\\200208\\48941\end{pmatrix}.$$

$$c^*(1)=\begin{pmatrix}0\\76489\\15428\end{pmatrix},\ c^*(2)=\begin{pmatrix}0\\86471\\16941\end{pmatrix},\ c^*(3)=\begin{pmatrix}0\\95281\\18277\end{pmatrix},$$

$$c^*(4)=c^*(5)=\begin{pmatrix}14868\\111468\\31226\end{pmatrix}.$$

При $g=(0,0,1)$ имеем:

$$x^*(1)=\begin{pmatrix}68506\\168207\\69119\end{pmatrix},\ x^*(2)=\begin{pmatrix}68506\\168207\\88738\end{pmatrix},\ x^*(3)=\begin{pmatrix}68506\\168207\\107813\end{pmatrix},$$

$$x^*(4)=x^*(5)=\begin{pmatrix}68506\\168207\\126359\end{pmatrix}.$$

$$c^*(1)=\begin{pmatrix}0\\60044\\31113\end{pmatrix},\ c^*(2)=\begin{pmatrix}0\\55050\\48029\end{pmatrix},\ c^*(3)=\begin{pmatrix}0\\50194\\64477\end{pmatrix},\ c^*(4)=\begin{pmatrix}0\\45473\\80468\end{pmatrix},$$

$$c^*(5)=\begin{pmatrix}19318\\66504\\97293\end{pmatrix}.$$

Рассмотренные случаи иллюстрируют эффективность и простоту предлагаемой методики расчета траекторий оптимального потребления на основе построенной дискретной динамической модели межотраслевого баланса региональной экономики при используемых в экономической практике интервалах времени $T \le 5$.

Полученные результаты расчетов не противоречат отчетным статистическим данным межотраслевой таблицы «затраты-выпуск» по Республике Бурятия. Варьируя структурными параметрами потребления домашних хозяйств, получаем возможность построения различных оптимальных сценариев и закономерностей развития межотраслевой экономики региона на среднесрочную перспективу и сравнения получаемых траекторий оптимального потребления в регионе с реальными данными.

Заключение

Представленная оптимизационная задача межотраслевого баланса на основе динамической межотраслевой модели Леонтьева позволяет максимизировать вектор потребления домашних хозяйств с учетом задаваемого вектора, характеризующего соизмерение различных потребительских благ. Сформированная модель оптимизации межотраслевого баланса региона в принципе сводится к задаче оптимального управления, а с учетом вырожденности матрицы капиталоемкости B данную модель целесообразно рассматривать в дискретной постановке на основе разностной динамической модели. Полученная дискретная задача оптимизации представляет самостоятельный интерес. Кроме того, она может рассматриваться в качестве возможной аппроксимации непрерывной задачи при поиске допустимого начального приближения для итерационных методов решения. Рассматривая показатель потребления $c(t)$ в качестве управляемой переменной, получаем специальную дискретную задачу оптимального управления, позволяющую определять «технологически достижимый» показатель суммарного потребления.

Формируемая в целях оптимизации вспомогательная задача в конечном счете представима в форме эквивалентной задачи линейного программирования относительно вспомогательного вектора отраслевых валовых выпусков в регионе. После введения дополнительных неотрицательных переменных получаемая каноническая задача линейного программирования с ограничениями-равенствами решается симплекс-методом. Таким образом, не требуется отдельно вычислять значения искомого вектора потребления домашних хозяйств после нахождения решения, поскольку координаты такого вектора определяются как соответствующие значения дополнительных переменных решения канонической задачи. По сути, формируемая вспомогательная задача в виде задачи линейного программирования предстает как эффективное средство решения достаточно сложной вырожденной задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями, возникающей при моделировании межотраслевого баланса.

Предлагаемая методика оптимизации межотраслевого баланса апробирована на реальных данных трехсекторной экономики Республики Бурятия. Полученные расчетные результаты представляют собой несомненный практический интерес. Полученные путем оптимизационных расчетов результаты подтверждают эффективность предлагаемого подхода сведения задачи оптимального управления системой межотраслевой экономики региона к задаче линейного программирования.

Литература

1. Методические проблемы формирования информационной базы динамической межотраслевой модели экономики Республики Бурятия / Баранов А. О., Дондоков З. Б.-Д., Дырхеев К. П., Павлов В. Н., Суслов В. И. // Регион: экономика и социология. 2016. № 4 (92). С. 47–68. Текст: непосредственный.
2. Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства. Москва: Экономика, 1985. 240 с. Текст: непосредственный.
3. Дадаян В. С. Моделирование народно-хозяйственных процессов. Москва: Экономика, 1973. 479 с. Текст: непосредственный.

4. Дементьев Н. П. Магистральные свойства моделей экономической динамики с потреблением. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. 168 с. Текст: непосредственный.

5. Динамические модели экономических систем / ответственный редактор В. Н. Павлов, А. О. Баранов. Новосибирск: ИЭиОПП СО РАН, 1999. 240 с. Текст: непосредственный.

6. Дырхеев К. П., Хишектуева И.-Х. Д. Модель сбалансированного роста межотраслевой экономики региона // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. № 1. С. 54–66. Текст: непосредственный.

7. Кобелев Н. Б., Половников В. А., Девятков В. В. Имитационное моделирование. Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2015. 368 с. Текст: непосредственный.

8. Колемаев В. А. Математическая экономика. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 399 с. Текст: непосредственный.

9. Основы теории оптимального управления / Кротов В. Ф., Лагоша Б. А., Лобанов С. М. и др. Москва: Высшая школа, 1990. 430 с. Текст: непосредственный.

10. Лагоша Б. А. Оптимальное управление в экономике. Москва: Финансы и статистика, 2003. 192 с. Текст: непосредственный.

11. Леонтьев В. Межотраслевая экономика. Москва: Экономика, 1997. 477 с.

12. Математические методы и модели исследования операций / под ред. В. А. Колемаева. Москва: ЮНИТИ-ДАНА. 2008. 592 с. Текст: непосредственный.

13. Моделирование и управление процессами регионального развития / под ред. С. Н. Васильева. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 432 с. Текст: непосредственный.

14. Моделирование народнохозяйственных процессов / под ред. И. В. Котова. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1990. 288 с. Текст: непосредственный.

15. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. Москва: Наука, 1978. 352 с. Текст: непосредственный.

16. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. Москва: Наука, 1972. 280 с. Текст: непосредственный.

17. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. Ижевск: Удмуртский университет, 2000. 200 с. Текст: непосредственный.

18. Miller R. E., Blair P. D. Input-Output Analysis. Foundations and Extensions. Second Edition. Cambridge University Press. The Edinburg Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2009. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 15.09.2021; одобрена после рецензирования 15.10.2021; принята к публикации 29.10.2021.

MODELING AND OPTIMIZATION FOR INTER-BRANCH ECONOMY OF THE REGION

Aleksandr S. Buldaev
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
buldaev@mail.ru

Konstantin P. Dyrkheev
Cand. Sci. (Econ.), A/Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
dkonst86@gmail.com

Abstract. The model of optimization of the inter-branch economy of the region formed based on the dynamic inter-branch model of Leontiev is considered. The optimization problem with the criterion of maximizing the household consumption vector is reduced to a discrete optimal control problem based on a discrete dynamic model. The resulting discrete optimization problem is considered as a linear programming problem for the vector of industry gross outputs in the region. The developed optimization technique is tested on real data for three large sectors of the economy of the Republic of Buryatia. As a result of solving the linear programming problem by the simplex method, the effectiveness of the proposed optimization technique as a means of solving complex problems of optimal control with phase constraints arising in the simulation of inter-branch balance is shown.

Keywords: inter-branch balance model; optimal control problem; linear programming problem; optimization method.

For citation

Buldaev A. S., Dyrkheev K. P. Modeling and Optimization for Inter-Branch Economy of the Region // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2021. N. 3. Pp. 14–27.

The article was submitted 15.09.2021; approved after reviewing 15.10.2021; accepted for publication 29.10.2021.