ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья

УДК 517.958
DOI: 10.18101/2304-5728-2021-4-34-47

УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© **Кожанов Александр Иванович**
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник,
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН
Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. акад. Коптюга, 4
kozhanov@math.nsc.ru

© **Намсараева Гэрэлма Владимировна**
преподаватель,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
gerel@inbox.ru

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости обратных задач нахождения вместе с решением некоторых уравнений соболевского типа также неизвестной правой части (неизвестных внешних источников). Особенностью изучаемых задач является то, что искомая правая часть в них определяется неизвестным множителем, зависящим лишь от пространственных переменных. Ранее подобные задачи для уравнений составного типа изучались для некоторых частных случаев. Метод исследования в работе заключается в переходе от обратной задачи к новой уже прямой задаче для уравнений составного типа. Используется также метод продолжения по параметру (с использованием полученных априорных оценок).

В данной работе для изучаемых задач авторы доказывают теоремы существования и единственности регулярных решений. Это решения, имеющие все обобщенные, по С. Л. Соболеву, производные, входящие в уравнение. Описываются некоторые обобщения и усиления полученных результатов.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения соболевского типа, обратные задачи, неизвестная правая часть. регулярные решения, существование, единственность.

Благодарности
Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект 0314-2019-0010.

Для цитирования
Кожанов А. И., Намсараева Г. В. Уравнения соболевского типа с неизвестной правой частью // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. № 4. С. 34–47.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач для дифференциальных уравнений

$$Au_t + Bu = F(x,t), \tag{$*$}$$

$$Au_{tt} + Bu = F(x,t) \tag{$**$}$$

с операторами A и B, действующими по пространственным переменным (точный вид этих операторов будет приведен ниже).

Дифференциальные уравнения ($*$) и ($**$) в последнее время называют уравнениями соболевского типа [1–3], или же уравнениями составного типа [4], или же уравнениями, не разрешенными относительно производной [5].

Разрешимость краевых и начально-краевых задач для уравнений ($*$) и ($**$) представляется хорошо изученной — помимо названных выше монографий [1–5], можно назвать монографии [6–8]; что же касается журнальных статей, то их так много,что перечислить даже малую их часть весьма затруднительно.

В настоящей работе изучается разрешимость некоторых линейных обратных задач для уравнений ($*$) и ($**$). Близкие задачи достаточно хорошо изучены для классических дифференциальных уравнений второго порядка — см. монографии [9–14], и в значительно меньшей степени — для уравнений соболевского типа, уравнений составного типа и других неклассических дифференциальных уравнений.

Особенностью изучаемых в работе задач является то, что в них неизвестная правая часть определяется некоторой функцией, зависящей лишь от пространственных переменных. Для уравнений ($*$) и ($**$) в ряде работ [15–20] изучалась разрешимость линейных и нелинейных обратных задач в случае, когда неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) зависел (зависели) лишь от временной переменной. Что же касается случая, когда неизвестный коэффициент является функцией от пространственных переменных, то здесь можно назвать лишь работы [21; 22], в которых изучались линейные обратные задачи пространственного типа для некоторых частных случаев уравнения ($**$).

Одним из методов исследования линейных обратных задач является метод, основанный на переходе от исходной задачи к новой задаче для уравнения более высокого порядка, не содержащего неизвестных коэффициентов — см. [23–26]. Именно этот метод будет применяться в настоящей работе, и именно он позволит получить существенно новые результаты для уравнений ($*$) и ($**$) с правой частью, содержащей неизвестный множитель, зависящий лишь от пространственных переменных.

Все построения и рассуждения в работе будут проводиться на основе пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения и описание свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [27–29].

Уточним, что целью настоящей работы будет доказательство существования и единственности регулярных решений для поставленных задач.

В работе будут изучаться дифференциальные уравнения $(*)$ и $(**)$ модельного вида. Некоторые обобщения и усиления полученных результатов будут представлены в конце работы.

1 Постановка задачи

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$ есть боковая граница Q. Далее, пусть $b^{ij}(x)$, $i, j = 1, .., n$, $b_0(x), h(x, t)$ и $f(x, t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $\quad t \in [0, T]$, $\triangle$ есть оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, x_2, .., x_n$, B есть дифференциальный оператор, действие которого по заданной функции $v(x)$ определяется равенством

$$Bv = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)v_{x_j}) + b_0(x)v,$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Обратная задача I: найти функции $u(x, t)$ и $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$\triangle u_t + Bu = f(x, t) + q(x)h(x, t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x, T) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{4}$$

Обратная задача II: найти функции $u(x, t)$, $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$\triangle u_{tt} + Bu = f(x, t) + q(x)h(x, t), \tag{5}$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий (2)–(4), а также условия

$$u_t(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{6}$$

В обратной задаче I условия (2) и (3) есть условия начально-краевой задачи для уравнения (1), называемого в некоторых источниках псевдопараболическим [1], условие же (4) есть условие переопределения, необходимость которого диктуется наличием дополнительной неизвестной функции $q(x)$.

В обратной задаче II условия (2), (3) и (6) можно трактовать как условия первой начально-краевой задачи для нестационарного уравнения (5), условие же (4) можно трактовать как условия переопределения. Можно и по иному трактовать условия обратной задачи II.

2 Разрешимость обратных задач I и II

Всюду ниже будем считать выполненным условие

$$h(x,t) \geq h_0 > 0 \qquad \text{при} \qquad (x,t) \in \bar{Q}. \tag{7}$$

Определим функции $h_1(x,t), h_2(x,t)$ и $F(x,t,\xi,\eta)$ при $(x,t) \in \bar{Q}$, $\xi = (\xi_1,..,\xi_n) \in R^n$, $\eta \in R$:

$$h_1(x,t) = -\frac{h_t(x,t)}{h(x,t)},$$

$$h_2(x,t) = h_1(x,t)b_0(x) + \frac{1}{2}(b^{ij}(x)h_{1x_i}(x,t))_{x_j},$$

$$F(x,t,\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} h_{1x_i}(x,t)\xi_i\right)\eta + h_2(x,t)\eta^2.$$

Далее определим операторы C_1 и C_2:

$$C_1 = h_1(x,t)\Delta + B,$$

$$C_2 = -(h_1(x,t)B - h_{1t}(x,t)\Delta).$$

Теорема 1. Пусть выполняются условие (7), а также условия

$$\begin{gathered} b^{ij}(x) \in C^3(\bar{\Omega}), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad i,j = 1,..,n, \\ b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in R^n; \end{gathered} \tag{8}$$

$$b_0(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad b_0(x) \leq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}; \tag{9}$$

$$\begin{gathered} h(x,t) \in C^3(\bar{Q}), \quad h_1(x,t) \leq 0, \quad h_{1t}(x,t) \leq 0, \\ h_2(x,t) \geq 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in Q; \end{gathered} \tag{10}$$

$$F(x,t,\xi,\eta) \geq \gamma_0 \sum_{i=0}^{n} \xi_i^2, \quad \gamma_0 > 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}, \quad \xi \in R^n, \quad \eta \in R; \tag{11}$$

$$\begin{array}{c} \text{оператор} \quad C_1 \quad \text{эллиптичен при} \quad (x,t) \in \bar{Q}, \\ \text{оператор} \quad C_2 \quad \text{эллиптико-параболичен в} \quad \bar{Q}. \end{array} \tag{12}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), q(x)\}$, для которого выполняются включения

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad k = 0,1,2, \quad q(x) \in L_2(Q).$$

Доказательство. Определим функцию $f_1(x,t)$:

$$f_1(x,t) = h(x,t) \left(\frac{f(x,t)}{h(x,t)} \right)_t.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$*, являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$\triangle u_{tt} + C_1 u_t + h_1 B u = f_1(x,t) \tag{13}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)—(4).

Покажем, используя метод продолжения по параметру [30, гл. III, § 14], что данная задача имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t)$, $u_t(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$ принадлежат пространству $L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$.

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство задач: *найти функцию* $u(x,t)$*, являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$\triangle u_{tt} + \lambda \left[C_1 u_t + h_1 B u \right] = f_1(x,t) \tag{13_λ}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)—(4).

Как следует из теоремы о методе продолжения по параметру, эта задача будет иметь решение из указанного класса для всех чисел λ из отрезка $[0,1]$, если 1) задача (13_0), (2)—(4) имеет решение, принадлежащее требуемому классу; 2) для всевозможных решений $u(x,t)$ краевой задачи (13_λ), (2)—(4) при выполнении условий теоремы имеет место априорная оценка

$$\begin{array}{c} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|u_t\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \\ \|u_{tt}\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \leq R_0 \|f_1\|_{L_2(Q)} \end{array} \tag{14}$$

с постоянной R_0, определяющийся лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$, $h(x,t)$, областью Ω и числом T.

Выполнение пункта 1) очевидно. Покажем, что для всевозможных решений $u(x,t)$ краевой задачи (13_λ), (2)—(4) действительно имеет место требуемая оценка.

Умножим уравнение (13_λ) на функцию $u(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по цилиндру Q. После несложных преобразований с использованием условий (8)—(11) придем к оценке

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_Q u_{x_i t}^2 dxdt \leq R_1 \int\limits_Q f_1^2 dxdt \tag{15}$$

с постоянной R_1, определяющейся лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$ и $h(x,t)$.

На следующем шаге умножим уравнение (13_λ) на функцию $-C_1 u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Полученное равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\int\limits_Q \Delta u_t C_1 u_t dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_Q h_{1tt}(\Delta u)^2 dxdt + \int\limits_Q C_1 u C_2 u dxdt = -\int\limits_Q f_1 C_1 u dxdt. \tag{16}$$

Поскольку оператор C_1 эллиптичен в Q, то первое слагаемое левой части (16) можно преобразовать, используя технику доказательства второго основного неравенства для эллиптических операторов [28]; учитывая дополнительную оценку (15), придем к неравенству

$$\int\limits_Q \Delta u_t C_1 u_t dxdt \geq R_2 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_Q u_{x_i x_j t}^2 dxdt - R_3, \tag{17}$$

постоянные R_2 и R_3 в котором положительны и определяются лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$ и $h(x,t)$, а также областью Ω и числом T.

Преобразуем аналогичным образом третье слагаемое левой части (16), учитывая, что оператор C_2 эллиптично-параболичен в $\bar{Q}$, применяя теоремы вложения и оценку (15) получим, что справедливо неравенство

$$\int\limits_Q C_1 u C_2 u dxdt \geq I - \delta \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_Q u_{x_i x_j t}^2 dxdt - M(\delta), \tag{18}$$

в котором I есть некоторый неотрицательный интеграл, δ есть произвольное положительное число, число же $M(\delta)$, помимо числа δ, определяется также функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$ и $b_0(x)$, а также областью Ω и числом T.

Неравенства (17) и (18) вместе с выбором числа δ малым означают, что следствием равенства (16) будет вторая априорная оценка решений $u(x,t)$ краевой задачи (13_λ), (2)—(4):

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q} u^2_{x_i x_j t}dxdt \leq R_4 \int\limits_{Q} f_1^2 dxdt; \tag{19}$$

постоянная R_4 здесь вновь определяется лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$ и $b_0(x)$, а также областью Ω и числом T.

Из оценок (15) и (19) вытекает очевидная третья оценка решений $u(x,t)$ краевой задачи (13_λ), (2)–(4):

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q} u^2_{x_i x_j tt}dxdt \leq R_5 \int\limits_{Q} f_1^2 dxdt; \tag{20}$$

постоянная R_5, как и постоянные $R_1 - R_4$, определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$ и $b_0(x)$, а также областью Ω.

Оценки (15), (19) и (20) и дают в целом требуемую оценку (14). Как уже говорилось выше, из этой оценки следует, что краевая задача (13_λ), (2)–(4) будет разрешима в требуемом классе для всех чисел λ из отрезка $[0,1]$. Но тогда и задача (13), (2)–(4) будет иметь решение $u(x,t)$, также принадлежащее требуемому классу.

Уравнение (13) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{h}(\Delta u_t + Bu) - \frac{f}{h}\right) = 0.$$

Интегрируя, получим равенство

$$\Delta u_t(x,t) + Bu(x,t) = f(x,t) + h(x,t)q(x), \tag{21}$$

в котором $q(x)$ есть функция

$$q(x) = \frac{1}{h(x,0)}[\Delta u_t(x,0) - f(x,0)].$$

Принадлежность функции $q(x)$ пространству $L_2(\Omega)$ очевидна. Уравнение (21) и означает, что функции $u(x,t)$ и $q(x)$ представляют собой искомое решение обратной задачи I.

Теорема доказана.

Исследование разрешимости обратной задачи II будет проведено в целом по той же схеме, по какой было проведено исследование разрешимости обратной задачи I.

Пусть для коэффициентов $b^{ij}(x)$, $i,j=1,..,n$, $b_0(x)$ оператора B выполняются условия гладкости теоремы 1, и пусть β_0 есть фиксированное число, $v(x)$ есть функция из пространства $W_2^2(\Omega)\bigcap \dot{W}_2^1(\Omega)$. Используя простейшие алгебраические неравенства, а также применяя второе основное неравенство для эллиптических операторов, нетрудно показать, что для функции $v(x)$ имеет место оценка

$$\|Bv-\beta_0\triangle v\|_{L_2(\Omega)}\leq \beta_1\|\triangle v\|_{L_2(\Omega)}+\beta_2\|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{22}$$

в которой числа β_1 и β_2 определяются функциями $b^{ij}(x)$, $i,j=1,..,n$ и $b_0(x)$, а также числом β_0 и областью Ω.

Оценка (22) нам понадобится для доказательства разрешимости обратной задачи II.

В дальнейшем будем считать, что функция h зависит лишь от переменной t; общий случай $h=h(x,t)$ будет отличаться от рассмотренного большей громоздкостью условий и выкладок.

Через $\nu=(\nu_1,..,\nu_n)$ будем обозначать вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке.

Теорема 2. Пусть выполняются условие (7), а также условия

$$\begin{gathered} b^{ij}(x)\in C^1(\bar\Omega),\quad b^{ij}(x)=b^{ji}(x),\quad i,j=1,..,n,\\ b^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq 0\quad \text{при}\quad x\in\bar\Omega,\xi\in R^n; \end{gathered} \tag{23}$$

$$b_0(x)\in C(\bar\Omega),\quad b_0(x)\leq 0\quad \text{при}\quad x\in\bar\Omega; \tag{24}$$

$$\begin{gathered} h\equiv h(t)\in C^3([0,T]),\quad (T-t)h_1(t)\leq -\tfrac{1}{2},\\ ((T-t)h_1(t))_{tt}\leq 0\quad \text{при}\quad t\in[0,T]; \end{gathered} \tag{25}$$

а также одно из условий

$$b^{ij}(x)\nu_i\nu_j=0\quad \text{при}\quad x\in\Gamma \tag{26}$$

или

для оператора B существует число β_0 из промежутка $(-\infty;0]$ такое, что для числа β_1, определенного в (22), выполняется неравенство

$$\frac{3}{2}+(T-t)h_1(t)-\frac{T^2\beta_1}{\pi}\geq 0. \tag{27}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t)\in L_2(Q)$, $f_t(x,t)\in L_2(Q)$ обратная задача II имеет решение $\{u(x,t),q(x)\}$ такое, что

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)),\quad k=0,1,2,3,\quad q(x)\in L_2(\Omega).$$

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\triangle u_{ttt} + h_1 \triangle u_{tt} + Bu_t + h_1 Bu = f_1(x,t) \tag{28}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4) и (6). Разрешимость этой задачи вновь будет установлена с помощью метода продолжения по параметру.

Для чисел λ из отрезка $[0,1]$ рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\triangle u_{ttt} + \lambda \left[h_1 \triangle u_{tt} + Bu_t + h_1 Bu\right] = f_1(x,t) \tag{28_λ}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4) и (6). При $\lambda = 0$ эта задача имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t)$ и все ее производные по переменной t до третьего порядка включительно существуют и принадлежат пространству $L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$. Покажем, что для произвольных регулярных решений задачи (28_λ), (2)–(4), (6) имеют место необходимые априорные оценки.

Умножим уравнение (28_λ) на функцию $(T-t)u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. После несложных преобразований получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \int_Q \left[\tfrac{3}{2} + \lambda(T-t)\right] u_{x_i t}^2 dxdt - \lambda \int_Q \left[\tfrac{1}{2} + (T-t)h_1(t)\right] b^{ij} u_{x_i} u_{x_j} dxdt -$$
$$\frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_Q \left[(T-t)h_1(t)\right]_{tt} u_{x_i}^2 dxdt + \lambda \int_Q \left[\tfrac{1}{2} + (T-t)h_1(t)\right] b_0 u^2 dxdt =$$
$$\int_Q (T-t) f_1 u dxdt.$$

Используя условия (23)–(25) и применяя неравенство Юнга, нетрудно получить первую априорную оценку решений $u(x,t)$ краевой задачи (28), (2)–(4), (6):

$$\sum_{i=1}^{n} \int_Q u_{x_i t}^2 dxdt \le N_1 \int_Q f_1^2 dxdt \tag{29}$$

с постоянной N_1, определяющейся лишь функцией $h(t)$ и числом T.

На следующем шаге умножим уравнение (28_λ) на функцию $-(T-t)\triangle u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Получим равенство

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} \int_Q \left[\tfrac{3}{2} + (T-t)h_1(t)\right] (\triangle u_t)^2 dxdt - \\ \frac{1}{2} \int_Q \left[(T-t)h_1(t)\right]_{tt} (\triangle u)^2 dxdt - \int_Q (T-t) B u_t \triangle u dxdt - \\ \int_Q (T-t) h_1(t) Bu \triangle u dxdt = -\int_Q (T-t) f_1 \triangle u dxdt.\end{gathered} \tag{30}$$

Пусть выполняется условие (26). Тогда третье слагаемое I_3 левой части (30) преобразуется к виду

$$I_3 = -\frac{1}{2}\int\limits_Q b^{ij} u_{x_i x_k} u_{x_j x_k} dxdt$$

(появляющиеся при интегрировании по частям граничные интегралы будут равны нулю вследствие условия характеристического вырождения (26) и условий (3) и (4)), и тем самым будет представлять собой неотрицательную величину. Далее, четвертое слагаемое левой части (30) преобразуется к сумме неотрицательной величины и величины, являющейся ограниченной вследствие оценки (29). Учитывая далее условия теоремы и премeняя неравенство Юнга, получим, что при выполнении условия (26) из равенства (30) вытекает оценка

$$\int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt \le N_2 \int\limits_Q f_1^2 dxdt, \tag{31}$$

постоянная N_2 в которой определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$ и $h(t)$, а также областью Ω и числом T.

Пусть теперь выполняется условие (27). Для интеграла I_3 выполняется равенство

$$I_3 = -\frac{\beta_0}{2}\int\limits_Q (\triangle u)^2 dxdt - \int\limits_Q (T-t)(Bu_t - \beta_0 \triangle u_t)\triangle u dxdt.$$

Первое слагаемое правой части данного равенства неотрицательно, второе же нетрудно оценить с помощью неравенства Гельдера, неравенства

$$\int\limits_0^T v^2(t)dt \le \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \int\limits_0^T v_t^2(t)dt,$$

справедливого для любой функции $v(t)$ из пространства $\dot{W}_2^1([0,T])$, а также неравенства (22) и оценки (29):

$$\left|\int\limits_Q (T-t)(Bu_t - \beta_0\triangle u_t)\triangle u dxdt\right| \le \frac{T^2\beta_1}{\pi}\int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt + N_3\left(\int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

(число N_3 здесь определяется лишь числом N_1, областью Ω и числом T).

Проведенные выше рассуждения и выкладки, а также условие (27) означают, что следствием равенства (30) будет оценка

$$\int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt \leq N_2' \int\limits_Q f_1^2 dxdt \tag{32}$$

с постоянной N_2', определяющейся функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$ и $h(t)$, а также областью Ω и числом T.

Последняя оценка

$$\int\limits_Q (\triangle u_{ttt})^2 dxdt \leq N_4 \int\limits_Q f_1^2 dxdt \tag{33}$$

очевидным образом вытекает из оценок (29), (31) и (32), а также из неравенства

$$\int\limits_Q (\triangle u_{tt})^2 dxdt \leq \delta \int\limits_Q (\triangle u_{ttt})^2 dxdt + C(\delta) \int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt,$$

в котором δ есть произвольное положительное число (см. [31]).

Оценки (29), (31) и (32), а также (33) дают окончательную оценку

$$\sum_{k=0}^{3} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \leq N_0 \|f_1\|_{L_2(Q)}, \tag{34}$$

постоянная N_0 в которой определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$, $h(t)$, а также областью Ω и числом T.

Из оценки (34) и теоремы о методе продолжения по параметру следует, что краевая задача (28), (2)—(4), (6) имеет решение $u(x,t)$, для которого выполняется оценка (34). Повторяя далее рассуждения из доказательства теоремы 1, получим, что функции $u(x,t)$ и $q(x)$, определенная равенством

$$q(x) = \triangle u_{tt}(x,0) - f(x,0),$$

и дадут требуемое решение обратной задачи II.

Теорема доказана.

Заключение

Представленные в работе результаты представляют собой новые результаты о разрешимости линейных обратных задач для некоторых неклассических дифференциальных уравнений. Эти результаты нетрудно усилить — например, оператор Лапласа в уравнениях (1) и (5) можно заменить общим линейным эллиптическим оператором второго или более высокого порядка (с естественным добавлением необходимых граничных условий). В то же время можно заметить, что метод, используемый в настоящей работе, можно применять и в других ситуациях — в том числе, для уравнений, существенно отличающихся от уравнений (1) или (5).

Литература

1. Свешников А. Г., Альшин А. Б, Корпусов М. О., Плетнер Б. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. Москва: Физматлит, 2007. 736 с. Текст: непосредственный.
2. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroup of Operators. Utrecht: VSP, 2003. 193 p.
3. Корпусов М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. Москва: Либроком, 2011. 376 с. Текст: непосредственный.
4. Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999. 181 p.
5. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998. 438 с. Текст: непосредственный.
6. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985. 220 с. Текст: непосредственный.
7. Копачевский Н. Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012. 152 с. Текст: непосредственный.
8. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2014. 385 с. Текст: непосредственный.
9. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Basel: Marcell Dekker Inc., 2000. 724 p.
10. Anikonov Yu. E., Bubnov B. A., Erokhin G. N. Inverse and Ill-Posed Sources Problems. Utrecht: VSP, 1997. 239 p.
11. Ivanchov M. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. Mathematical Studies. Monograph Series, Vol. 10. VNTL Publishers, 2003. 238 p.
12. Belov Yu. Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Utrecht: VSP, 2002. 211 p.
13. Anikonov Yu. E. Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations. Utrecht: VSP, 2001. 286 p.
14. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское науч. изд-во, 2009. 457 с. Текст: непосредственный.
15. Pyatkov S. G., Shergin S. N. Inverse Problems for Some Sobolev-type Mathematical Models // Bull. South Ural State Univ. Ser.: Math. Model. Program. Comput. Softw. 2016. Volume 9, Issue 2. P. 75–89. https://doi.org/10.14529/mmp160207
16. Кожанов А. И. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. № 2(8). С. 81–99. Текст: непосредственный.
17. Кожанов А. И. О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнении составного типа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2008. № 15(115). С. 27–36. Текст: непосредственный.

18. Кожанов А. И. О разрешимости коэффициентных обратных задач для некоторых уравнений соболевского типа // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2010. № 5(76). С. 88–98. Текст: непосредственный.
19. Кожанов А. И. Линейные обратные задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 5(264). С. 33–42. Текст: непосредственный.
20. Мегралиев Я. Т. Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска — Лява с дополнительным интегральным условием // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. № 1(16). С. 75–83. Текст: непосредственный.
21. Аблабеков Б. С. Обратная задача восстановления правой части уравнения Буссинеска — Лява // Материалы II международной научной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 21-29 сентября 2010 г. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. С. 2–4. Текст: непосредственный.
22. Намсараева Г. В. Обратные задачи определения внешних источников в уравнении распространения продольных волн // Сибирский журнал индустриальной математики. 2016. № 3(19). С. 28–40. Текст: непосредственный.
23. Kozhanov A. I. Questions of Posing and Solvability of Linear Inverse Problems for Elliptic Equations // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1997. Vol. 5, № 4. P. 337–352.
24. Кожанов А. И., Кириллова Г. А. О некоторых обратных задачах для параболического уравнения четвертого порядка // Математические заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, Вып. 1. С. 35–48. Текст: непосредственный.
25. Кириллова Г. А. Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Стерлитамак, 2004. 20 с. Текст: непосредственный.
26. Акимова Е. В., Кожанов А. И. Линейные обратные задачи пространственного типа для квазипараболических уравнений // Математические заметки СВФУ. 2018. № 3(18). С. 3–17. Текст: непосредственный.
27. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Москва: Наука, 1988. 333 с. Текст: непосредственный.
28. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва: Наука, 1973. 576 с. Текст: непосредственный.
29. Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Amsterdam, New York: North-Holland Pub. Co., 1978. 528 p.
30. Треногин В. А. Функциональный анализ. Москва: Физматлит, 2002. 488 с. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 06.12.2021; одобрена после рецензирования 09.12.2021; принята к публикации 14.12.2021.

SOBOLEV-TYPE EQUATIONS WITH UNKNOWN RIGHT SIDE

Aleksandr I. Kozhanov
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Chief Researcher,
Institute of Mathematics S. L. Sobolev SB RAS
4 ac. Koptyuga, Novosibirsk 630090, Russia

Gerelma V. Namsaraeva
Lecturer,
East Siberian State University of Technology and Management
40V Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia

Abstract. The work is devoted to the study of the solvability of inverse problems of finding, together with the solution of some Sobolev-type equations, also an unknown right-hand side (unknown external sources). The peculiarity of the studied problems is that the desired right part in them is determined by an unknown multiplier that depends only on spatial variables. The research method in the work is based on the transition from the inverse problem to a new direct problem for equations of a composite type. For the problems under study, the theorems of the existence and uniqueness of regular solutions are proved in the work - solutions having all derivatives generalized by S. L. Sobolev included in the corresponding equation.

Keywords: differential equations of Sobolev type, inverse problems, unknown right side, regular solutions, existence, uniqueness.

For citation

Kozhanov A. I., Namsaraeva G. V. Sobolev-type Equations with Unknown Right Side. Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2021. N. 4. Pp. 34–47.

The article was submitted 06.12.2021; approved after reviewing 09.12.2021; accepted for publication 14.12.2021.