УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Научная статья

УДК 517.977
DOI: 10.18101/2304-5728-2022-1-18-25

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В РАМКАХ МОДЕЛИ РЕАЛИЗАЦИИ ГАЗОВОГО ПРОДУКТА

© Аксенюшкина Елена Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Байкальский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
aks.ev@mail.ru

© Аксенюшкин Александр Владимирович
аспирант,
Байкальский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
alekshd@gmail.com

Аннотация. Рассматривается линейная по состоянию задача оптимального управления с конечным горизонтом планирования, связанная с динамической моделью разработки газового месторождения. Построение экстремального управления проводится на основе принципа максимума. Глобальное решение задачи реализуется с помощью достаточного условия оптимальности в терминологии сильно экстремальных управлений. Оптимальный процесс описывается простыми интегральными соотношениями в зависимости от функции цены. Отдельно выделен частный вариант задачи, когда цена на сырье постоянна.

Ключевые слова: прикладная задача оптимального управления, принцип максимума, достаточное условие оптимальности.

Для цитирования
Аксенюшкина Е. В., Аксенюшкин А. В. Решение задачи оптимального управления в рамках модели реализации газового продукта // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 1. С. 18–25.

Введение

Спектр прикладных задач оптимального управления, допускающих аналитическое либо численное решение на основе известных результатов теории, динамично расширяется в том числе за счет многообразия приложений (см., например, [1–3]). В данной работе изучается один вариант прикладной задачи из [4; 5], связанный с эффективной по стоимости реализацией некоторого продукта с конечным горизонтом планирования и известным прогнозом по цене. Рабочий инструмент анализа — принцип максимума Понтрягина [6], который в очередной раз позволяет успешно построить экстремальный процесс. Поскольку задача является невыпуклой, то возникает необходимость дополнительного рассмотрения на предмет оптимальности. С этой целью используется достаточное условие в формате сильно экстремального управления [7]. В результате получена оптимальная программа реализации продукта в виде простых квадратурных соотношений с явной зависимостью от параметров задачи.

1 Постановка задачи

Сформулируем специальную задачу оптимального управления, связанную в содержательном смысле с моделью разработки газового месторождения [4; 5]

$$\Phi(u) = \int_0^T e^{-\nu t} p(t) u(t) x(t) dt \to \max, \tag{1}$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} u^2 x, \qquad x(0) = x_0 > 0 .$$

Здесь $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования, $p(t) > 0$, $t \in [0, T]$ — известная функция цены, $T >> 0$ — горизонт планирования.

В задаче (1) фазовая переменная $x(t)$ характеризует текущий запас сырья, управление $u(t)$ описывает программу реализации продукта, функционал $\Phi(u)$ выражает стоимость этой программы.

Предположим, что множество допустимых управлений V содержит кусочно-непрерывные функции с условиями неотрицательности $u(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$. Кроме того, считаем, что $p(\cdot) \in V$. Будем использовать обозначение $q(t) = e^{-\nu t} p(t)$, $t \in [0, T]$ (дисконтированная функция цены).

Проведем решение задачи (1) на основе принципа максимума [3], который в данном случае не является, вообще говоря, достаточным условием оптимальности (невыпуклая задача за счет произведений ux, $u^2 x$). Поэтому для полного решения задачи дополнительно к принципу максимума будем использовать достаточные условия оптимальности в наиболее приемлемом варианте, который представлен, например, в [7].

2 Аналитическое решение задачи

Пусть $u \in V$. Соответствующее решение фазового уравнения имеет вид (формула Коши)

$$x(t, u) = x_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t u^2(\tau) d\tau \right), \qquad t \in [0, T] .$$

Отсюда получаем свойство положительности фазовых траекторий: $x(t, u) > 0$, что соответствует их содержательному смыслу.

Для задачи (1) образуем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = q(t)ux - \frac{1}{2}\psi u^2 x$$

и рассмотрим сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2}\psi u^2 - q(t)u, \qquad \psi(T) = 0.$$

Введем обозначение

$$s(t, u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^T u^2(\tau)\,d\tau\right), \qquad t \in [0, T].$$

Тогда

$$\dot{s}(t, u) = \frac{1}{2}u^2(t)s(t, u), \qquad s(T, u) = 1.$$

Проверим следующую формулу для решения сопряженного уравнения

$$\psi(t, u) = s(t, u)\int_t^T \frac{1}{s(\tau, u)} q(\tau)u(\tau)\,d\tau. \qquad (2)$$

Действительно, $\psi(T, u) = 0$. При этом

$$\dot{\psi}(t, u) = \frac{1}{2}u^2(t)s(t, u)\int_t^T \frac{1}{s(\tau, u)} q(\tau)u(\tau)\,d\tau - s(t, u)\frac{1}{s(t, u)}q(t)u(t) =$$

$$= \frac{1}{2}u^2(t)\psi(t, u) - q(t)u(t).$$

Получили сопряженное уравнение, т. е. формула (2) справедлива. Из нее, в частности, получаем условие положительности сопряженных траекторий: $\psi(t, u) > 0$ для $t \in [0, T]$, $u \in V \setminus \{0\}$ $(\psi(t, 0) \equiv 0,\ t \in [0, T])$.

Найдем экстремальное управление задачи (1).

Учитывая свойство положительности траекторий, сформулируем и решим задачу на максимум функции Понтрягина при условии $x > 0$, $\psi > 0$

$$-\frac{1}{2}\psi x u^2 + q(t)xu \to \max, \qquad u \ge 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{2}\psi u^2 + q(t)u \to \max, \qquad u \ge 0.$$

Максимизирующее управление:

$$u(\psi, t) = \frac{q(t)}{\psi}, \qquad \psi > 0, \quad t \in [0, T].$$

Найдем теперь решение $\psi(t)$ сопряженного уравнения для управления $u(\psi, t)$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2}\psi u^2(\psi, t) - q(t)u(\psi, t), \qquad \psi(T) = 0.$$

После подстановки получаем

$$\psi = -\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{\psi}.$$

Отсюда вдоль решения $\psi(t)$ имеем

$$2\dot{\psi}(t)\psi(t) = -q^2(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\psi^2(t) = -q^2(t).$$

Проинтегрируем по $t \in [\tau, T]$

$$\psi^2(T) - \psi^2(\tau) = -\int_\tau^T q^2(t)dt.$$

Следовательно,

$$\psi(\tau) = \left(\int_\tau^T q^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

Заменяя переменные, получаем итоговую формулу для решения

$$\psi_*(t) = \left(\int_t^T q^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}, \qquad t \in [0, T].$$

В результате определяется экстремальное управление задачи (1)

$$u_*(t) = u(\psi_*(t), t) = \frac{q(t)}{\left(\int_t^T q^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}}, \qquad t \in [0, T).$$

Отметим, что при $t \to T - 0 \quad u_*(t) \to \infty$.

Рассмотрим фазовое уравнение для управления $u_*(t)$

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}u_*^2(t)x = -\frac{q^2(t)x}{2\int_t^T q^2(\tau)}, \qquad x(0) = x_0.$$

Введем обозначение

$$r(t) = \int_t^T q^2(\tau)d\tau,$$

Тогда $\dot{r}(t) = -q^2(t)$, и уравнение принимает вид

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}x, \qquad x(0) = x_0.$$

Запишем решение по формуле Коши

$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\dot{r}(\tau)}{r(\tau)} d\tau \right).$$

Проведем интегрирование в правой части

$$\int_0^t \frac{\dot{r}(\tau)}{r(\tau)} d\tau = \int_0^t \frac{d}{dt} \ln r(\tau) d\tau = \ln \frac{r(t)}{r(0)}.$$

Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{2} \ln \frac{r(t)}{r(0)} \right) = \left(\frac{r(t)}{r(0)} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, фазовая траектория, соответствующая управлению $u_*(t)$, выражается по формуле

$$x_*(t) = x_0 \frac{\left(\int_t^T q^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}}{\left(\int_0^T q^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}}, \qquad t \in [0, T].$$

Отметим, что $x_*(T) = 0$.

В результате экстремальный режим задачи (1) представляется следующими формулами в зависимости от параметров x_0, T и дисконтированной функции цены $q(t)$

$$\psi_*(t) = \left(\int_t^T q^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}, \tag{3}$$

$$u_*(t) = \frac{q(t)}{\psi_*(t)}, \qquad x_*(t) = x_0 \frac{\psi_*(t)}{\psi_*(0)}, \qquad t \in [0, T].$$

Рассмотрим вопрос об оптимальности управления $u_*(t)$ в задаче (1). С этой целью используем условие оптимальности из [7], которое применительно к управлению $u_*(t)$ в линейной по состоянию задаче (1) имеет вид

$$u_*(t) = \arg\max_{u \ge 0} H(\psi_*(t), x(t, v), u, t), \qquad t \in [0, T), \quad v \in V. \tag{4}$$

Это свойство сильной экстремальности для управления $u_*(t)$: условие максимума функции H для любой фазовой траектории $x(t, v)$.

В нашем случае управление $u_*(t)$ является решением задачи

$$-\frac{1}{2} \psi_*(t) u^2 + q(t) u \to \max, \qquad u \ge 0.$$

Поскольку $x(t,v)>0,\ v\in V,\ t\in[0,T)$, то выполняется условие

$$u_*(t)=\arg\max_{u\ge 0}\left(-\frac{1}{2}\psi_*(t)u^2+q(t)u\right)x(t,v),\qquad v\in V,$$

которое совпадает с условием сильной экстремальности (4).

Учитывая формулы (3), подсчитаем значение функционала

$$\Phi(u_*)=\int_0^T q(t)u_*(t)x_*(t)dt=\frac{x_0}{\psi_*(0)}\int_0^T q^2(t)dt=x_0\,\psi_*(0)\,.$$

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема. Управление $u_*(t),\ t\in[0,T)$ является оптимальным в задаче (1), причем $\Phi(u_*)=x_*(0)\psi_*(0)$.

Замечание 1. Согласно формулам (3), оптимальная программа реализации продукта включает его «обнуление» в конечный момент времени: $x_*(T)=0$. Это достигается за счет неограниченного роста управляющей функции на финишном участке реализации: $u_*(t)\to\infty$ при $t\to T-0$.

Замечание 2. Выделим частный вариант задачи (1), когда цена на сырье постоянна: $p(t)\equiv c,\quad t\in[0,T]$. В этом случае оптимальное управление выражается по формуле

$$u_*(t)=\frac{e^{-\vartheta t}}{\left(\int_t^T e^{-2\vartheta t}dt\right)^{1/2}}$$

и не зависит от c.

Интересно отметить, что

$$u_*^2(t)=2\vartheta\frac{e^{-2\vartheta t}}{e^{-2\vartheta t}-e^{-2\vartheta T}}\,.$$

Следовательно, при $T=\infty$ (задача с бесконечным горизонтом) получаем простейшую формулу для оптимального управления: $u_*^2(t)\equiv 2\vartheta,\quad t\in[t_0,T]$.

Заключение

Рассмотренная модель является хорошим методическим примером прикладной задачи, которая элегантно решается в глобальном исполнении на основе известных результатов математической теории оптимального управления. Дальнейший анализ и решение подобного типа задач могут быть связаны, например, с биологическими моделями [8].

Литература

1. Киселев Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Исследование краевой задачи принципа максимума Понтрягина в модели двухсекторной экономики с интегральной функцией полезности // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 2015. Т. 55, №11. С. 1812–1826. Текст: непосредственный.

2. Модель конкуренции Лотки-Вольтерры с немонотонной функцией терапии для нахождения оптимальных стратегий лечения раковых заболеваний крови / Н. Л. Григоренко, Е. Н. Хайлов, Э. В. Григорьева, А. Д. Клименкова // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 79–98. Текст: непосредственный.

3. Аксенюшкина Е. В., Аксенюшкин А. В. Параметризация задач оптимального управления применительно к одной модели биологической очистки воды // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. № 1. С. 3–12. DOI: 10.18101/2304-5728-2021-1-3-12. Текст: непосредственный.

4. Скиба А. К. Исследование задачи оптимального управления для динамической модели газового месторождения // Труды VI Московской международной конференции по исследованию операций. Москва, 2010. С. 118-119. Текст: непосредственный.

5. Киселев Ю. Н., Орлов М. В. Исследование модели разработки газового месторождения на бесконечном горизонте планирования // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1583–1591. Текст: непосредственный.

6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Москва: Либроком, 2011. 272 с. Текст: непосредственный.

7. Срочко В. А., Антоник В. Г. Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала // Известия вузов. Математика. 2014. № 8. С. 96–102. Текст: непосредственный.

8. Lenhart S., Workman J. T. Optimal Control Applied to Biological Models. Mathematical and Computational Biology Series. London: Chapman & Hall/CRC, 2007. 257 p.

Статья поступила в редакцию 25.01.2022; одобрена после рецензирования 04.03.2022; принята к публикации 15.03.2022.

RESOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITHIN THE FRAMEWORK OF THE GAS PRODUCT REALIZATION MODEL

Elena V. Aksenyushkina
candidate in physics and mathematics, associate professor,
Baikal State University
Russia, 664003, Irkutsk, st. Lenin, 11
aks.ev@mail.ru

Aleksandr V. Aksenyushkin
postgraduate student,
Baikal State University
Russia, 664003, Irkutsk, st. Lenin, 11
alekshd@gmail.ru

Abstract. A linear state-based optimal control problem with a finite planning horizon associated with a dynamic model of gas field development is considered. The construction of extreme control is carried out on the basis of the maximum principle. The global solution of the problem is realized with the help of a sufficient optimality condition in the terminology of highly extreme controls. For a more complete solution of the problem, in addition to the maximum principle, sufficient optimality conditions are used. The optimal process is described by simple integral relations depending on the price function. A special variant of the problem is singled out separately when the price of raw materials is constant.

Keywords: applied optimal control problem, maximum principle, sufficient optimality condition.

For citation

Aksenyushkina E .V., Aksenyushkin A. V. Resolution of the Optimal Control Problem within the Framework of the Gas Product Realization Model // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 1. Pp. 18–25.

The article was submitted 25.01.2022; approved after reviewing 04.03.2022; accepted for publication 15.03.2022.