Научная статья

УДК 517.934
DOI: 10.18101/2304-5728-2022-2-11-22

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ КОШИ ДЛЯ ОДНОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА

© Агамалыева Айгюн Исваган кызы
диссертант,
Бакинский государственный университет,
Азербайджан, Az 1148, г. Баку, ул. З. Халилова, 23
Институт систем управления НАН Азербайджана
Азербайджан, Az 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68
agamaliyeva88@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача Коши для одного класса линейных неоднородных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, являющегося обобщением интегро-дифференциального уравнения Е. А. Барбашина. Подобные уравнения описывают динамику некоторых сложных процессов. В частности, рассматриваемая в работе задача Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма описывает динамику ряда популяций. Поэтому разработка качественной теории подобных интегро-дифференциальных уравнений, обобщающих интегро-дифференциальные уравнения Е. А. Барбашина, является актуальной. В работе получено интегральное представление решения рассматриваемой задачи Коши. Полученное представление решения в дальнейшем может быть использовано для исследования качественной теории оптимального управления динамики некоторых популяций. С помощью этого представления можно получить как необходимые и достаточные условия оптимальности, так и исследовать задачи, связанные с управляемостью и наблюдаемостью в задачах оптимального управления, описываемых рассматриваемой системой интегро-дифференциальных уравнений. Полученный результат является нетривиальным обобщением аналогичного результата, установленного в работе Е. А. Барбашина и Л. П. Бисяриной. Изучена связь полученного результата с близким результатом Е. А. Барбашина и Л. П. Бисяриной, установленного другим способом только для скалярного уравнения с постоянным коэффициентом. Полученное представление для рассматриваемой общей задачи носит конструктивный характер.

Ключевые слова: задача Коши, интегро-дифференциальное уравнение, формула Коши, уравнение Барбашина, представление решения, динамика популяции.

Для цитирования
Агамалыева А. И. Аналог формулы Коши для однолинейного интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 2. С. 11–22.

Введение

В работе [1] рассмотрена задача Коши для одного двумерного линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка типа Фредгольма.

Для рассматриваемой задачи найдено интегральное представление решения.

В предлагаемой работе рассматривается достаточно общая задача для системы двумерных интегро-дифференциальных линейных уравнений типа Фредгольма.

Введя в рассмотрение аналог матрицы Коши, а затем резольвенту вспомогательного интегрального уравнения, получим представление решения рассматриваемой задачи Коши.

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$z_t(t,x) = A(t,x)z(t,x) + B(t,x)y(t,x) + f(t,x) \tag{1}$$

$$(t,x) \in \{t_0 \le t \le T; x_0 \le x \le X\},$$

$$z(t_0,x) = a(x), x \in [x_0, X], \tag{2}$$

$$y(t,x) = \int_{x_0}^{x_1} [C(t,x,s)z(t,s) + g(t,x,s)]ds. \tag{3}$$

Здесь $A(t,x), B(t,x), C(t,x,s)$ — заданные $(n \times n)$ матричные функции, непрерывные по совокупности переменных, $f(t,x)$ и $g(t,x,s)$ — заданные непрерывные по совокупности переменных n-мерные вектор-функции, $a(x)$ — заданная n-мерная непрерывная вектор-функция.

Найдем представление решения задачи (1)–(3).

Отметим, что различные аспекты качественной теории интегро-дифференциальных уравнений вида (1) в частном случае изучены в работе [1].

Нашей целью является нахождения представления решения задачи (1)–(3).

2 Представление решения задачи Коши (1)–(3)

Интерпретируя уравнение (1) как линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение по аргументу t на основе формулы об интегральном представлении решений таких уравнений (см. напр. [2; 3]), получим

$$z(t,x) = F(t,t_0,x)a(x) + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)B(\tau,x)y(\tau,x)d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)f(\tau,x)d\tau, \tag{4}$$

где $F(t,\tau)$ — $(n \times n)$ матричная функция (матрица Коши), являющаяся решением матричного дифференциального уравнения

$$F_\tau\left(t,\tau,x\right) = -F\left(t,\tau,x\right)A(\tau,x),\tag{5}$$
$$F\left(t,t_0,x\right) = E$$

(E — единичная матрица).

Ясно, что

$$y(\tau,x) = \int_{x_0}^{x_1}\left[C(\tau,x,s)z(\tau,s) + g(\tau,x,s)\right]ds.$$

Поэтому из (4) следует, что

$$z(t,x) = \int_{t}^{t}\int_{x_0}^{x_1} F(t,\tau,x)B(\tau,x)C(\tau,x,s)z(\tau,s)dsd\tau +$$
$$+\int_{t}^{t}\int_{x_0}^{x_1} F(t,\tau,x)B(\tau,x)g(\tau,x,s)dsd\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)f(\tau,x)d\tau + F(t,t_0,x)a(x).\tag{6}$$

Введем обозначения

$$Q(t,x;\tau,s) = F(t,\tau,x)B(\tau,x)C(\tau,x,s),$$
$$l(t,x) = F\left(t,t_0,x\right)a(x) + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)f(\tau,x)d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x}^{x_1} F(t,\tau,x)B(\tau,x)g(\tau,x,s)dsd\tau.\tag{7}$$

Тогда с учетом обозначений (7) представление (6) принимает вид:

$$z(t,x) = l(t,x) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} Q(t,x,\tau,s)z(\tau,s)dsd\tau.\tag{8}$$

Таким образом, доказали, что $z(t,x)$ является решением уравнения (8). В свою очередь, можно доказать (например, проверкой), что решение $z(t,x)$ уравнения (8) допускает представление:

$$z(t,x) = l(t,x) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,x,\tau,s)z(\tau,s)dsd\tau.\tag{9}$$

Здесь $R(t,x,\tau,s)$ — $(n\times n)$ матричная функция, являющаяся решением уравнения:

$$R(t,x,\tau,s) = Q(t,x,\tau,s) + \int_{\tau}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,x,\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta,\tau,s)d\alpha d\beta\ .$$

Используя формулу для $l(t,x)$, преобразуем выражение:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,x,\tau,s)l(\tau,s)dsd\tau .$$

Имеем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,x,\tau,s)l(\tau,s)dsd\tau =$$

$$=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,x,\tau,s)\Big[F(\tau,t_0,s)a(s)+\int_{t_0}^{t}F(\tau,\alpha,s)f(\alpha,s)d\alpha +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}F(t,\alpha,s)B(\alpha,s)g(\alpha,s,\beta)d\alpha d\beta\Big]dsd\tau =$$

$$=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,x,\tau,s)F(\tau,t_0,s)a(s)dsd\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{\tau}R(t,x,\tau,s)F(\tau,\alpha,s)f(\alpha,s)d\alpha\right]dsd\tau +$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{\tau}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)F(t,\alpha,s)B(\alpha,s)g(\alpha,s,\beta)d\alpha d\beta\right]dsd\tau. \tag{10}$$

Далее, применяя теорему Фубини, получаем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{\tau}R(t,x,\tau,s)F(\tau,\alpha,s)f(\alpha,s)d\alpha\right]dsd\tau =$$

$$=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t}R(t,x,\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)f(\tau,s)d\alpha\right]dsd\tau. \tag{11}$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{\tau}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)F(t,\alpha,s)B(\alpha,s)g(\alpha,s,\beta)d\alpha d\beta\right]dsd\tau =$$

$$=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)B(\tau,s)g(\tau,s,\beta)d\alpha d\beta\right]d\tau ds. \tag{12}$$

Учитывая тождество (10)–(12) в представлении (9), получим

$$z(t,x)=F(t,t_0,x)a(x)+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)f(\tau,x)d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}F(t,\tau,x)B(\tau,x)g(\tau,x,s)dsd\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,x,\tau,s)F(\tau,t_0,s)a(s)dsd\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t} R(t,x,\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)f(\tau,s)d\alpha\right]dsd\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,x,\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)B(\tau,s)g(\tau,s,\beta)d\beta\right]d\tau ds. \tag{13}$$

Из (13) ясно, что

$$z(t,s) = F(t,t_0,s)a(s) + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau,s)f(\tau,s)d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} F(t,\tau,s)B(\tau,s)g(\tau,s,\beta)d\tau d\beta +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,s,\tau,\beta)F(\tau,t_0,\beta)a(\beta)d\beta d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t} R(t,s,\alpha,\beta)F(\alpha,\tau,\beta)f(\tau,\beta)d\alpha\right]d\beta d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t}\int_{x_0}^{x_1} R(t,s,\alpha,\beta)F(\alpha,\tau,\beta)B(\tau,\beta)g(\tau,\beta,\gamma)d\alpha d\gamma\right]d\tau d\beta.$$

Поэтому из (12) получаем, что

$$y(t,x) = \int_{x_0}^{x_1} g(t,x,s)ds + \int_{x_0}^{x_1} C(t,x,s)F(t,t_0,s) + a(s)ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} C(t,x,s)F(t,\tau,s)f(\tau,s)d\tau +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} C(t,x,s)F(t,\tau,s)B(\tau,s)g(\tau,s,\beta)d\tau d\beta ds +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} C(t,x,s)R(t,s,\tau,\beta)a(\beta)d\beta d\tau ds +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t} C(t,x,s)R(t,s,\tau,\beta)F(\alpha,\tau,\beta)f(\tau,\beta)\right]d\beta d\alpha ds +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t} C(t,x,s)R(t,s,\alpha,\beta)F(\alpha,\tau,\beta)B(\tau,\beta)g(\tau,\beta,\gamma)d\alpha\right]\times$$
$$\times d\gamma d\tau d\beta. \tag{14}$$

Таким образом, доказали, что решение $(z(t,x), y(t,x))$ задачи (1)–(3) допускает представление в виде (13), (14).

3 Об одном частном случае

В этом пункте изучается один важный частный случай задачи (1)–(3). В частности, установим связь полученного результата с результатом работы [1].

Рассмотрим частный случай задачи Коши (1)–(3).

В области $D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]$ рассмотрим двумерное линейное интегро-дифференциальное уравнение типа Фредгольма вида

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = A(t,x)y(t,x) + \int_a^b K(t,x,s)y(t,s)ds + f(t,x),(t,x)\in D \tag{15}$$

с начальным условием Коши

$$y(t_0,x) = a(x), x\in[x_0,x_1]. \tag{16}$$

Здесь $A(t,x)$ — заданная непрерывная в D $(n\times n)$ матричная функция, $f(t,x)$, $a(x)$ — заданные непрерывные соответственно в D и на $[a,b]$ n-мерные вектор-функции, $y(t,x)$ — искомая вектор-функция, $K(t, x, s)$ — заданная непрерывная в $[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]\times[x_0,x_1]$ $(n\times n)$ матричная функция.

Нашей целью является нахождение представления решения задачи Коши (15)–(16).

Как видно, уравнение (15) является частным случаем уравнения (1). Это позволяет с более простыми рассуждениями получить представление решения задачи (15)–(16).

Задача (15)–(16) может быть интерпретирована как аналог задачи Коши для рассматриваемого уравнения (15).

Отметим, что в [1] для задачи (15)–(16) в скалярном случае и при предположении, что $A(t,x)=\lambda=const$, найдено, в частности, интегральное представление решения. Таким образом, задача (15)–(16) является более общей, чем соответствующая задача из [1].

В настоящем пункте при помощи вышеприведенной схемы получено интегральное представление решения задачи (15)–(16).

Введя обозначение

$$g(t,x) = f(t,x) + \int_{x_0}^{x_1} K(t,x,s)y(t,s)ds,$$

система уравнений (15) записывается в виде:

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial x} = A(t,x)y(t,x) + g(t,x). \tag{17}$$

Поэтому, интерпретируя уравнение (17) как неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, решение задачи Коши (17)–(16) на основе формулы Коши об интегральном представлении решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений можно представить в виде

$$y(t,x) = F(t,t_0,x)a(x) + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)g(\tau,x)d\tau. \tag{18}$$

Здесь $F(t,\tau,x)$ — $(n \times n)$ матричная функция, являющаяся решением матричного дифференциального уравнения (аналог сопряженного уравнения).

$$\frac{\partial F(t,\tau,x)}{\partial \tau} = -F(t,\tau,x)A(\tau,x), \tag{19}$$

$$F(t,\tau,x) = E \quad (E \text{ — } (n \times n) \text{ единичная матрица}).$$

Можно показать (см. напр. [3]), что $F(t,\tau,x)$ по первому аргументу по (t) является решением следующего матричного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F(t,\tau,x)}{\partial \tau} = A(\tau,x)F(t,\tau,x) \tag{20}$$

с начальным условием $F(\tau,\tau,x) = E$.

Используя вид вектор-функции $g(t,x)$ из (18), будем иметь

$$y(t,x) = F(t,t_0,x)a(x) + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)f(\tau,x)d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} F(t,\tau,x)K(\tau,x,s)y(\tau,s)dsd\tau. \tag{21}$$

Введем следующие вспомогательные обозначения

$$l(t,x) = F(t,t_0,x)a(x) + \int_{t_0}^{t} f(\tau,x)F(t,\tau,x)d\tau,$$
$$Q(t,x,\tau,s) = F(t,\tau,x)K(\tau,x,s). \tag{22}$$

Тогда представление (22) может быть записано в виде:

$$y(t,x) = l(t,x) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} Q(t,x,\tau,s)y(\tau,s)dsd\tau. \tag{23}$$

Таким образом доказали, что решение задачи Коши (15)–(16) является решением линейного неоднородного интегрального уравнения (23) типа Вольтерра — Фредгольма.

Решение уравнения (23) допускает представление

$$y(t,x)=l(t,x)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)l(\tau,s)dsd\tau. \tag{24}$$

Здесь $(n\times n)$ матричная функция $R(t,x,\tau,s)$ (резольвента) является решением интегрального уравнения

$$R(t,x,\tau,s)=Q(t,x,\tau,s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x;\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta,\tau,s)d\alpha d\beta\ . \tag{25}$$

Принимая во внимание (25), можно доказать, что резольвента $R(t,x,\tau,s)$ удовлетворяет также уравнению

$$R(t,x;\tau,s)=Q(t,x,\tau,s)+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}Q(t,x;\alpha,\beta)R(\alpha,\beta,\tau,s)d\alpha d\beta\ . \tag{26}$$

Учитывая (22) для $l(t,x)$ в (24) и используя теорему Фубини (Дирихле [3]), после некоторых преобразований будем иметь

$$y(t,x)=F(t,t_0,x)a(x)+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau;x)f(\tau,x)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x;\tau,s)\left[F(\tau,t_0;s)a(s)+\int_{t_0}^{\tau}F(\tau,\alpha;s)f(\alpha,s)\right]dsd\tau=$$

$$=F(t,t_0;x)a(x)+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau;x)f(\tau,x)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x;\tau,s)F(\tau,t_0;s)a(s)dsd\tau+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\int_{\tau}^{t}R(t,x;\tau,s)F(\alpha,\tau,s)f(\tau,s)d\alpha dsd\tau.$$

Таким образом, доказали, что решение $y(t,x)$ задачи Коши (15)–(16) допускает следующее представление

$$y(t,x)=F(t,t_0;x)a(x)+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau;x)f(\tau,x)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x;\tau,s)F(\tau,t_0;s)a(s)dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\int_{\tau}^{t}R(t,x;\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)f(\tau,s)d\alpha dsd\tau. \tag{27}$$

Здесь матричные функции $F(t,\tau;x)$ и $R(t,x;\alpha,s)$ определяются из соотношений (20) и (25) соответственно.

С учетом (22) из (25) получим, что

$$R(t,x;\tau,s)=F(t,\tau;x)K(\tau,x,s)+$$

$$+\int_{\tau}^{t}\int_{a}^{b} F(t,\alpha;x)K(\alpha,x,\beta)R(\alpha,\beta;\tau,s)d\alpha d\beta .$$

Отсюда сразу следует соотношение

$$R(t,x;\tau,s)=K(\tau,x,s).$$

Далее из последнего соотношения получаем, что

$$\frac{\partial R(t,x;\tau,s)}{\partial t}=\frac{\partial F(t,\tau;x)}{\partial t}K(t,x,s)+$$

$$+\int_{a}^{b} F(t,t;x)K(\tau,x,\beta)R(t,\beta;\tau,s)d\beta+$$

$$+\int_{\tau}^{t}\int_{a}^{b}\frac{\partial F(t,\alpha;x)}{\partial t}K(\alpha,x,\beta)R(\alpha,\beta;\tau,s)d\alpha d\beta=$$

$$=A(t,x)F(t,\tau;x)K(\tau,x,s)+$$

$$+\int_{a}^{b} K(\tau,x,\beta)R(t,\beta;\tau,s)d\beta+$$

$$+A(t,x)\int_{\tau}^{t}\int_{a}^{b} A(t,x)F(t,\alpha;x)K(\alpha,x,\beta)R(\alpha;\beta,\tau,s)d\alpha d\beta=A(t,x)\times$$

$$\times\left[F(t,\tau;x)K(\tau,x,s)+\int_{\tau}^{t}\int_{a}^{b} A(t,x)F(t,\alpha;x)K(\alpha,x,\beta)R(\alpha,\beta;\tau,s)d\alpha d\beta\right]+$$

$$+\int_{a}^{b} K(t,x,\beta)R(t,\beta;\tau,s)d\beta. \tag{28}$$

Таким образом, доказали, что матричная функция $R(t,x;\tau,s)$, определяемая как решение интегрального матричного уравнения (25), является решением следующей задачи Коши

$$\frac{\partial R(t,x;\tau,s)}{\partial t}=A(t,x)R(t,x;\tau,s)+\int_{a}^{b} K(\tau,x,\beta)R(t,\beta;\tau,s)d\beta,$$

$$R(t,x;\tau,s)=K(t,x,s). \tag{29}$$

Изучим связь полученного результата в скалярном случае с результатом из [1].

Пусть в задаче (15)–(16) $A(t,x)=\lambda=const$, а система уравнений скалярная, т. е. $n=1$. Тогда аналог задачи (15)–(16) в рассматриваемом скалярном случае принимает вид

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}=\lambda y(t,x)+\int_{x0}^{x_1} K(t,x,s)y(t,s)ds+f(t,x), \tag{30}$$

$$y(t_0,x)=\phi(x).x\in\left[x_0,x_1\right]. \tag{31}$$

При этом в силу того, что при $n=1$, $F(t,\tau,x)=e^{\lambda(t-\tau)}$ представление (27) в случае рассматриваемой задачи (30)–(31) принимает вид:

$$y(t,x)=e^{\lambda(t-\tau)}a(x)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}e^{\lambda(t-\tau)}R(t,x;\tau,s)\varphi(s)dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau;x)f(\tau,x)d\tau+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\int_{\tau}^{t}e^{\lambda(\alpha-\tau)}R(t,x;\tau,s)f(\tau,s)d\alpha dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}e^{\lambda(t-t_0)}e^{\lambda(\tau-t)}R(t,x;\tau,s)\varphi(s)dsd\tau+$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\int_{\tau}^{t}e^{\lambda(t-\tau)}e^{\lambda(\alpha-\tau)}R(t,x;\tau,s)f(\tau,s)d\alpha dsd\tau.$$

Следовательно,

$$y(t,x)=e^{\lambda(t-t_0)}\left[\varphi(x)+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}e^{\lambda(t-\tau)}R(t,x;\tau,s)\varphi(s)dsd\tau\right]+$$

$$+e^{\lambda(t-\tau)}\left[e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau,x)d\tau+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{\tau}^{t}e^{\lambda(\alpha-\tau)}R(t,x;\tau,s)f(\tau,s)d\alpha ds\right]d\tau. \quad (32)$$

Введем обозначение в виде

$$L(t,x;\tau,s)=e^{\lambda(\tau-t)}R(t,x;\tau,s).$$

Тогда получаем, что

$$L(t,x;\alpha,\beta)=e^{\lambda(\tau-t)}R(t,x;\tau,s)e^{\lambda(\alpha-t)},$$

$$L(\alpha,\beta,\tau,s)=e^{\lambda(\tau-t)}R(\alpha,\beta;\tau,s)e^{\lambda(\tau-\alpha)}.$$

Далее, принимая во внимания формулу (28), получим, что

$$L(t,x;\tau,s)=e^{\lambda(\tau-t)}R(t,x;\tau,s)=$$

$$+e^{\lambda(\tau-t)}\left[e^{\lambda(\tau-t)}K(t,x,s)+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}e^{\lambda(t-\alpha)}K(\alpha,x,\beta)R(\alpha,\beta;\tau,s))d\alpha d\beta\right]. \quad (33)$$

Из (22) следует, что при $n=1$

$$Q(t,x;\tau,s)=e^{\lambda(t-\tau)}K(\tau,x,s),$$

$$Q(t,x;\alpha,\beta)=e^{\lambda(t-\alpha)}K(\alpha,x,\beta). \quad (34)$$

Поэтому из (33) получим, что

$$L(t,x;\tau,s)=e^{\lambda(\tau-t)}e^{\lambda(t-\tau)}K(\tau,x,s)$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}e^{\lambda(\tau-t)}e^{\lambda(t-\alpha)}K(\alpha,x,\beta)R(\alpha,\beta;\tau,s))d\alpha d\beta=$$

$$= K(\tau,x,s) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} K(\alpha,x,\beta)L(\alpha,\beta;\tau,s))d\alpha d\beta. \qquad (35)$$

Таким образом, доказали, что функция $L(t,x;\tau,s)$, определяемая вышеприведенной формулой (35), является решением интегрального уравнения типа Вольтерра — Фредгольма

$$L(t,x;\tau,s) = K(\tau,x,s) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} K(\alpha,x,\beta)L(\alpha,\beta;\tau,s))d\alpha d\beta. \qquad (36)$$

При этом из (29) получим

$$y(t,x) = e^{\lambda(t-t_0)}\left[a(x) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} L(t,x,\tau,s)\varphi(s)dsd\tau\right] +$$

$$+\int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-t_0)}\left[f(\tau,x) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\int_{\tau}^{t} e^{\lambda(\alpha-\tau)}R(t,x,\tau,s)f(\tau,s)d\alpha ds\right]d\tau. \qquad (37)$$

Из формулы (36) следует, что функция $L(t,x,\tau,s)$ является решением следующей системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial L(t,x;\tau,s)}{\partial t} = \int_{x0}^{x_1} K(t,x,\beta)L(t,\beta;\tau,s))ds,$$

с начальным условием

$$L(t_0,x;\tau,s) = K(\tau,x,s).$$

Формула представления (37) решения совпадает с аналогичным представлением решения задачи (30)–(31) из [1], полученным несколько иным способом.

Заключение

Рассмотрен аналог задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма. Получено интегральное представление решение задачи Коши, используя матрицу Коши и резольвенту вспомогательной задачи. Изучен частный случай. Показано, как из этого результата в частном случае можно получить результат работы Е. А. Барбашина и Л. П. Бисяриной.

Литература

1. Барбашин Е. А., Бисярина Л. П. Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. 1963. № 3. С. 3–14. Текст: непосредственный.

2. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем: методы функцион. анализа. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 246 с. Текст: непосредственный.

3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. Москва: Физматлит, 2005. 384 с. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 28.05.2022; одобрена после рецензирования 15.06.2022; принята к публикации 08.09.2022.

AN ANALOGUE OF THE CAUCHY FORMULA FOR A LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FREDHOLM TYPE

Aygun I. Agamaliyeva
Dissertation student
Baku State University,
23 Z. Khalilova St., Baku Az 1148, Azerbaijan
Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences,
68 B. Vahabzade St., Baku Az 1141, Azerbaijan

Abstract. The Cauchy problem is considered for one class of linear inhomogeneous Fredholm integro-differential equations, which is a generalization of the E.A. Barbashin integro-differential equation.

Such equations describe the dynamics of some complex processes. In particular, the Cauchy problem considered in this paper for a system of Fredholm-type integro-differential equations describes the dynamics of a number of populations.

Therefore, the development of a qualitative theory of such integro-differential equations, which is a generalization of the integro-differential equation of E.A. Barbashin, is very relevant.

An integral representation of the solution of the Cauchy problem under consideration is obtained.

The resulting representation of the solution can later be used to study the qualitative theory of optimal control of the dynamics of some populations.

Using this representation, it is possible to obtain both necessary and sufficient optimality conditions, and to investigate problems related to controllability and observability in optimal control problems described by the system of integro-differential equations under consideration.

The result obtained is a nontrivial generalization of a similar result established in the work of E. A. Barbashin and L. P. Bisyarina.

The relationship of the obtained result with the close result of E.A. Barbashin and L.P. Bisyarina is studied, or in another way only for a scalar equation with a constant coefficient.

The resulting representation for the general problem under consideration is constructive in nature.

Keywords: Cauchy problem, integro-differential equation, Cauchy formula, Barbashin equation, solution representation, population dynamics.

For citation

Agamaliyeva A. I. An Analogue of the Cauchy Formula for a Linear Integro-Differential Equation of the Fredholm Type // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 2. P. 11–22.

The article was submitted 28.05.2022; approved after reviewing 15.06.2022; accepted for publication 08.09.2022.