Научная статья

УДК 519.86
DOI: 10.18101/2304-5728-2022-3-3-13

ОБ ОДНОМ ПРАКТИЧЕСКОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ЭКОЛОГИЧЕСКИМ КРИТЕРИЕМ

© Ассаул Виктор Николаевич
кандидат технических наук, доцент,
Государственный университет авиаприборостроения
Россия, 190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67А
vicvic21@yandex.ru

© Погодин Игорь Евгеньевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Военно-морской политехнический институт
Россия, 198516, г. Санкт-Петербург, ул. Разводная, 15
iepogodin@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен алгоритм решения транспортных задач с так называемым экологическим критерием, когда транспортные расходы состоят из тарифной части, пропорциональной количеству перевозимого груза, а также из не зависящих от этого постоянных «штрафных» добавок. Исходя из априорных интегральных оценок соотношения между оценками этих двух частей транспортных расходов предлагается предварительно оценить количественную роль «штрафной» компоненты и степень необходимости строить специальный план с ее учетом. Если учет этой компоненты существенен, то предлагается получить цепочку последовательных решений классических транспортных задач с перестраиваемыми ценами до момента ее зацикливания (повторения). После этого остается выбрать наилучший план, который либо оказывается оптимальным, либо близок к нему и может быть получен за несколько шагов, например, распределительным методом.

Исследовано применение этой процедуры при изменении ряда параметров транспортной задачи: относительной доли интегрального вклада штрафов, структуры таблицы штрафов, а также мощностей и емкостей.

Ключевые слова: целевая функция, стоимость перевозки, оптимальный план, корректирующий цикл.

Для цитирования
Ассаул В. Н., Погодин И. Е. Об одном практическом способе решения транспортной задачи с экологическим критерием // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 3. С. 3–13.

Введение

Рассмотрим некоторые возможности практического решения транспортной задачи (ТЗ) с «экологическим критерием» [1] (в других формулировках это «ТЗ с фиксированными доплатами», «неоднородная ТЗ» и т. д.). Суть задачи заключается в том, что помимо «сдельной» (тарифной) составляющей, пропорциональной тарифам за каждую единицу перевозимого груза [2], требуется также оплатить некий «штраф» только за сам факт использования конкретного участка трассы независимо от объема перевозки. Эта задача вызывает интерес в течение многих десятилетий[1] [3–11]. Однако известны лишь приближенные и часто достаточно сложные способы решения, причем некоторые из них по своим объемам сравнимы с прямым перебором всех вариантов планов, из-за чего они порой представляют чисто академический интерес.

Основная часть

В целях решения таких задач на практике для начала предлагается оценить, насколько существенно введение «штрафов» в конкретной задаче может повлиять на ее решение в виде обычной ТЗ только с транспортными «тарифной» (C) и без «штрафной» (D) составляющих по всей таблице (рассматривать эти вклады для каких-то отдельных частей таблицы не имеет смысла, поскольку оптимальные планы задачи не найдены и могут касаться различных частей таблицы). Введем следующий интегральный показатель:

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{i,j}\min(A_i, B_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{i,j}}.$$

Здесь A_i, $i=1 \div n$ — мощности поставщиков;

B_j, $j=1 \div m$ — емкости потребителей.

Целесообразно также использовать отношения характеристик «тарифной» и «штрафной» составляющих по каждой клетке таблицы:

$$R_{i,j} = \frac{c_{i,j} * \min(A_i, B_j)}{d_{i,j}}$$ и оперировать их средними значениями:

$$R_{i,j} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}}{n*m}$$ и среднеквадратичными отклонениями (СКО):

$$\delta R = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(R_{i,j} - R\right)^2}{n*m} \right)^{0,5}$$ по всем клеткам таблицы.

[1] URL: edu.alnam.ru/book_dpr.php?id=61. Приближенные методы для транспортной задачи с фиксированными доплатами (дата обращения: 20.12.2021). Текст: электронный.

Если эти интегральные (средние) характеристики существенно больше единицы, т. е. «штрафная» составляющая относительно невелика, то можно решать классическую ТЗ, задав только несколько измененные (модифицированные) тарифы:

$$cm_{i,j} = c_{i,j} + \frac{d_{i,j}}{\min\left(A_i B_j\right)}.$$

Можно использовать оптимальный план классической ТЗ также и в случае, если СКО «штрафной» компоненты существенно меньше, чем СКО «тарифной» компоненты.

В противном случае влияние «штрафной» составляющей значительно и должно учитываться иным образом при выборе оптимального плана. Начав с решения ТЗ с теми же измененными тарифами, далее будем (многократно) повторять такие классические решения ТЗ, каждый раз пересчитывая модифицированные тарифы по правилу:

$$cm_{i,j} = c_{i,j} + d_{i,j}/x_{i,j},$$

где $x_{i,j}$ — перевозка, назначенная в последнем плане в ячейку с адресом (i, j) [1].

Эта процедура относится к ячейкам транспортной таблицы оптимального плана. Исследуем применение этой процедуры, изменяя в задачах:
а) относительную долю интегрального вклада штрафов;
б) размер таблиц;
в) структуру таблицы штрафов;
г) структуру партнеров, их емкости и мощности.

В качестве первого примера рассмотрим следующую транспортную задачу (табл. 1):

Таблица 1

$A_i \backslash B_j$	9	18	23
16	9 20	4 45	7 29
22	5 39	3 50	6 36
12	1 60	8 22	2 54

На примере тарифов, заданных в левых верхних углах ячеек, и исходных штрафов (в правых нижних углах ячеек табл.1) с различными значениями пробного коэффициента *k* по правилу:

$$cm_{i,j} = c_{i,j} + \frac{d_{i,j}}{\min\left(A_i B_j\right)}$$

строились условные модифицированные тарифы $cm_{i,j}$, для которых делались оценки параметров сравнения R_o и $R_{i,j}$, а также находились начальные оптимальные планы для классической ТЗ с оценкой соответствующей тарифной составляющей.

В таблице 2 пошагово представлена процедура получения цикла новых планов на основании пересчета модифицированных тарифов при k = 1. Планы первого и третьего шагов совпадают, что позволяет остановить процесс, выбрав в качестве наилучшего результат второго шага. Наряду с этим в таблице 2 в скобках представлены оптимальный план и полная стоимость перевозок (412).

Таблица 2

k		1		
R_o		*1.738*		
R		*2.244±1.607*		
планы	$A_i \backslash B_j$	*9*	*18*	*23*
	16	*11.222*	*6.813* ***15***	*8.813* ***1***
	22	*9.333*	*5.778* ***2***	*7.636* ***20***
	12	*7.667* ***9***	*9.833*	*6.5* ***3***
C_o+D_o		***205+255=450***		
планы	*16*	*11.222* *(5)*	*6.813* ***16***	*8.813* *(11)*
	22	*9.333* *(4)*	*28* *(18)*	*7.8* ***22***
	12	*7.667* ***9***	*9.833*	*6.5* ***3*** *(12)*
C_o+D_o		*232+192=424* (412)		
планы	*16*	*1.222*	*7* ***16***	*36*
	22	*9.333*	*5.778* ***2***	7.636 ***20***
	12	7.667 ***9***	*15.333*	*6.5* ***3***
C_o+D_o		***205+255=450***		

С целью иллюстрации влияния амплитудного фактора доли штрафной компоненты при неизменной структуре таблицы штрафов в табл. 3 представлены аналогичные цепочки расчетов для k =25, 0.5, 0.25 по столбцам.

Таблица 3

k		25			0.5			0.25		
R_o		43.5			0.9			0.4		
R		56.1±40.1			1.1±0.8			0.6±0.4		
планы	$A_i\backslash B_j$	9	18	23	9	18	23	9	18	23
	16		**16**		**9**	7		**9**	**6**	**1**
	22		**2**	**20**		**11**	**11**			**22**
	12	**9**		**3**			**12**		**12**	
C_o+D_o		**205+10=215**			**232+410=642**			**340+608=948**		
планы	16		16				16	9	7	
	22		2	20	9	13				2
	12	9		3		5	7		11	1
C_o+D_o		205+10=215			250+388=638			331+708=1039		
планы	16		16			16		9		7
	22		2	20			22		6	16
	12	9		3	9	2	1		12	
C_o+D_o		205+10=215			223+434=657			340+628=968		
планы	16					**15**	**1**	9	7	
	22						**22**			2
	12				**9**	**3**			11	1
C_o+D_o					232+384=616			331+708=1039		
планы	16				**9**	**7**				
	22					**11**	**11**			
	12						**12**			
C_o+D_o					232+410=642					

Здесь предполагается, что классическая ТЗ с критерием цен легко решается с помощью стандартной процедуры, например, методом «потенциалов». Можно использовать также и другие способы, например, стандартную процедуру «*minimize*» пакета *Mathcad* [12].

Как и следовало ожидать, параметры сравнения составляющих C/D R_o и $R_{i,j}$ имеют тот же порядок, что и задаваемый амплитудный фактор k, отличаясь примерно в 2–3 раза, а найденные таким способом планы перевозок существенно изменяются. При этом увеличивается тарифная составляющая C, которая перестает быть доминирующей при выборе оптимального плана.

Таким образом, по крайней мере, в последних двух случаях ($k \geq 2$; $R_o \leq 0.9$; $R \leq 1.1 \pm 0.8$) требуется по-новому проводить процедуру поиска наилучших планов.

Анализируя результаты представленных в столбиках трех ТЗ с различными значениями k, можно заметить, что в каждой из них наблюдаются цепочки циклических повторений ситуаций различной длины, на которых можно найти наилучший план перевозок, наиболее близкий к оптимальному.

Аналогично в таблице 4 рассмотрена такая же задача большей размерности (4*4) , а в скобках представлен оптимальный план с полной стоимостью перевозок 1636.

Таблица 4

$A_i \backslash B_j$	*28*	*20*	*12*	*20*
15	9 120	24 ***3*** **(3)** 20	16 ***12*** **(12)** 50	18 40
22	17 ***10*** **(2)** 40	8 120	19 30	14 ***12*** **(20)** 60
25	15 **(8)** 60	12 ***17*** **(17)** 80	21 20	13 ***8*** 70
18	11 ***18*** **(18)** 90	15 60	17 40	10 100

Анализ полученных решений показывает, что при $k \leq 0.05$ влияние штрафной компоненты можно не учитывать. При изменении значений k предложенная процедура приводит к появлению циклов повторяющихся ситуаций различной длины, из которых можно выделить наилучший план с минимальной полной стоимостью перевозок ($C_o + D_o$); длина этих циклов не обнаруживает регулярной связи с априорным соотношением тарифной и штрафной компонент C/D (параметр k).

Количество используемых шагов при этом несравнимо меньше, чем потребовалось бы при прямом переборе всех планов перевозок. Например, при $R_о = 2.15$; $R = 3.21 \pm 2.3$ до появления повторяющейся ситуации, позволяющей остановить вычислительную процедуру (выделена жирным шрифтом во второй строке табл. 5), требуется сделать 12 шагов. Для этого случая по причине громоздкости полного аналога таблиц 2, 3 в таблице 5 для каждого из этих шагов приведены лишь расчеты двух компонент: $C_о$ и $D_о$ и полные значения расходов на перевозку S_Σ без указания самих промежуточных планов ($C_о/D_о = 1108/670 = 1.65$). Оптимальный план указан жирным курсивом в табл. 5. В то же время при $R_о = 1075$ и $R = 1607 \pm 1149$ требуется только 4 шага и окончательное соотношение $C_о/D_о = 1171/1100 = 1.06$.

Таблица 5

$C_о$	$D_о$	$C_о+D_о$
977	*830*	*1807*
1108	*670*	***1778***
1112	*790*	*1902*
941	*870*	*1811*
1111	*830*	*1941*
1256	*550*	*1806*
944	*990*	*1934*
1027	*830*	*1857*
1813	*710*	*2023*
1087	***710***	***1797***
1034	*1010*	*2044*
1087	***710***	***1797***

Наконец, в таблице 6 представлено получение циклических процедур для двух различных структур таблицы штрафов при общей таблице тарифов. Наилучший план со штрафами, представленными выше дроби, совпадает с оптимальным, в то время как наилучший план со штрафами ниже дроби отличается от оптимального под дробью в скобках и дающего общую стоимость 679.

Таблица 6

$A_i \backslash B_j$	*19*	*5*	*12*	*11*
16	8 11/16/**(16)** 30/59	5 5/ 40/63	10 50/74	9 25/129
10	6 ***1/*** 34/70	11 30/22	7 60/61	5 ***9/10(10)*** 48/38
14	12 ***/1*** 58/70	13 /(**1**) 38/31	9 ***12/12 (12)*** 62/55	10 ***2/1(1)*** 51/63
7	7 ***7/2(3)*** 45/49	6 ***/5(4)*** 53/23	14 30/34	9 55/73

Для первого варианта системы штрафов (фактор априорного отношения компонент C/D: R_o=1.40 (R=1.86±1.53)) задача решается за три шага (левая половина табл. 7):

Таблица 7

C_o	D_o	C_o+D_o	C_o	D_o	C_o+D_o
341	*310*	*651*	*352*	*357*	*709*
345	*308*	***653***	*369*	*349*	***718***
341	*310*	*651*	*352*	*357*	*709*

Если полностью изменить матрицу штрафов (их значения представлены в табл. 6 через дробь в правых нижних углах ячеек), сохранив на прежнем уровне фактор C/D: R_o = 1.42 (R = 3.2±2.3), то задача решается также за три шага с наилучшим планом, получаемым на первом шаге (правая половина табл. 7).

Два варианта задачи, различающиеся только структурой мощностей производителей и емкостей заказчиков, дают совершенно различные планы, причем оба на первом шаге процедуры с цепочкой из трех шагов (левая (R_o = 1.64; R = 1.76±1.04) и правая (R_o = 2.08; R = 2.16±0.99) половины табл. 8).

Таблица 8

$A_i \backslash B_j$	19	5	12	11	$A_i \backslash B_j$	*8*	*20*	*11*	*16*
16	6 **16** 39	8 40	9 39	10 68	*12*	6 **8 (8)** 39	8 **2(4)** 40	9 **2** 39	10 68
10	8 30	7 33	6 **6** 38	7 **4** 50	*10*	8 30	7 33	6 **9(9)** 38	7 **1(1)** 50
14	6 **3** 33	5 **5** 45	10 **6** 25	9 60	*18*	6 33	5 **18(16)** 45	10 **(2)** 25	9 60
7	5 38	9 30	8 35	5 **7** 66	*15*	5 38	9 30	8 35	5 **15(15)** 66

$C_o+D_o = 298+296 = 594$ $\qquad$ $C_o+D_o = 308+317 = 625$

Здесь также наилучший план задачи в левой части таблицы 8 совпадает с оптимальным, в то время как наилучший план задачи в правой части отличается от оптимального, представленного в скобках и дающего общую стоимость перевозок *613*.

Следует отметить, что по девяти рассмотренным задачам отношение «штрафной» части к «тарифной» C_o/D_o тесно коррелирует ($r \geq 0.9$) с аналогичным отношением интегральных частей из априорных расчетов C/D: $ln[C_o/D_o]=0.8*ln[(C/D)]-0.3$. Это указывает на уменьшение относительной доли тарифной части расходов в наилучших найденных планах D_o по сравнению с априорными интегральными оценками, поскольку некоторые участки выгоднее использовать с их неполной загрузкой

$$\left(x_{i,j} \leq \min\left(A_i, B_j\right)\right).$$

Такая связь может позволить найти оценки отношения этих составляющих еще до получения самих планов решения задачи.

Заключение

Таким образом, предложенный путь решения транспортной задачи с экологическим критерием, носящий до некоторой степени эвристический характер, заключается в следующем:

Исходя из простых априорных интегральных оценок отношения «штрафной» части к «тарифной», если оно составляет более нескольких процентов (например, около 5% для задач (3*3) и 1% для задач (4*4)), то предлагается получить цепочку последовательных решений для планов классических транспортных задач с измененными тарифами (ценами) до момента зацикливания (повторения ситуаций), после чего следует выбрать среди них наилучший план и при необходимости уточнить его, например, распределительным методом.

Литература

1. Ассаул В. Н., Погодин И. Е. О транспортной задаче с экологическим критерием // Экономика и математические методы. 2019. Т. 55, № 2. С. 58–64. Текст: непосредственный.

2. Канторович Л. В. О перемещении масс // Доклады Академии наук СССР. 1942. Т. 37. С. 227–229. Текст: непосредственный.

3. Бирман И. Я. Оптимальное программирование. Москва: Экономика, 1968. 231 с. Текст: непосредственный.

4. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. Москва: Наука, 1969. 368 с. Текст: непосредственный.

5. Поляк Р. А. Об одной неоднородной транспортной задаче // Математические модели и методы оптимального планирования: сборник статей. Новосибирск: Наука, 1966. С. 109–115. Текст: непосредственный.

6. Седова С. В., Лебедев С. С. Решение одной задачи размещения с использованием узловых векторов разрешающих множителей // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35, № 3. С. 116–121. Текст: непосредственный.

7. Седова С. В., Лебедев С. С. Метод узловых векторов целочисленного программирования. 2. Задачи специального вида: препринт ЦЭМИ. WP/2000/094. 2001. 88 с. Текст: непосредственный.

8. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное и дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. Москва: Физматлит, 2007. С. 45–49. Текст: непосредственный.

9. Фролькис В. А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. Санкт-Петербург: Питер, 2002. 320 с. Текст: непосредственный.

10. Хоанг Туй. Вогнутое программирование при линейных ограничениях // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 159, № 1. С. 32–35. Текст: непосредственный.

11. Balinski M. L. Fixed Cost Transportation Problem // Naval Res. Log. Quart. 1961. Vol. 8, N. 1. P. 41–54.

12. Кирьянов Д. В. Mathcad 12 в подлиннике. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. 557 с. С. 192–193. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 23.08.2022; одобрена после рецензирования 18.10.2022; принята к публикации 20.10.2022.

ON ONE PRACTICAL METHOD TO SOLVE THE TRANSPORTATION PROBLEM WITH ECOLOGICAL CRITERION

Victor N. Assaul
Dr. of phyl., (Phys. and Math.), Assistant Prof.
State Aerospace Technologies University, 1
190000, SPb, Bol'shaya Morskaya str. 67 A, Russia

Igor E. Pogodin
Double Dr. of phyl., (Phys. and Math.)
Navy Polytechnic Institute
198516, SPb, Razvodnaya str. 15, Russia

Abstract. A practical method of solving a transportation problem with «ecological» criterion, including additional rates not proportional to cargo (“penalty”) is considered. Based on a priori integral estimates of the relationship between the estimates of these two parts of transportation costs, it is proposed to: preliminarily estimate the quantitative role of the “penalty” component and the degree of need to build a special plan taking it into account. If it is essential to take this component into account, then it is proposed to obtain a chain of successive solutions to classical transport problems with tunable prices until the moment of its cycling (repetition). These chains form cycles allowing to get the optimal solution of the problem or the close to this one, that can be improved using standard methods of solving the transportation problem.

Keywords: goal function, transportation costs, optimal solution, corrective cycle.

For citation
Assaul V. N., Pogodin I. E. On One Practical Method to Solve the Transportation Problem With Ecological Criterion // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 3. P. 3–13.

The article was submitted 23.08.2022; approved after reviewing 18.10.2022; accepted for publication 20.10.2022.