Научная статья

УДК 519.651
DOI: 10.18101/2304-5728-2022-3-27-36

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

© **Поленов Виктор Сидорович**
доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник,
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А
vva@mil.ru

© **Ницак Дмитрий Анатольевич**
кандидат технических наук, старший научный сотрудник,
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А
vva@mil.ru

Аннотация. Получено приближенное решение для интегралов, содержащих произведение степенной функции, экспоненциальной показательной функции с аргументом в виде перевернутой параболы второго порядка, модифицированной функции Бесселя первого рода и смещенной простой функции ошибок. В ходе решения приведены к замкнутой форме интегралы от произведения степенной и экспоненциальной функции с квадратичным показателем, а также упрощены табличные интегралы, содержащие произведение степенной функции с четным или нечетным показателем и экспоненциальной функции со смещенным квадратичным показателем. В работе использовано разложение модифицированной функции Бесселя первого рода и неполной гамма-функции в степенной ряд. Решение позволяет определить необходимое число членов ряда, чтобы интегральная ошибка не превысила заданное значение. Результаты работы могут найти применение при исследовании механических и радиотехнических процессов.

Ключевые слова: гамма-функция Эйлера, функция Куммера, гипергеометрическая функция, вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера.

Для цитирования
Поленов В. С., Ницак Д. А. Приближенное решение интегралов от показательных и степенных функций // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 3. С. 27–36.

Введение

При моделировании физических процессов переходных состояний часто требуется аппроксимация ступенчатых и символических импульсных функций непрерывными функциями с конечным значением параметра предельного перехода [1].

Простая функция ошибок или интеграл вероятностей $\operatorname{erf}(x - x_0)$ со смещением широко применяется в качестве непрерывной аппроксимации функции Хевисайда.

Интегралы, содержащие произведение степенной функции x^μ, $\mu > 0$, экспоненциальной показательной функции $\exp(-x^2)$ и модифицированной функции Бесселя первого рода ν-порядка $I_\nu(x)$, $\mu, \nu \in \mathsf{N}$, используются в механике, геофизике, сейсмологии, акустике, радиотехнике и т.д.

В справочной литературе [2] – [4] неопределенные интегралы от функций вида $x^\mu \, \mathrm{e}^{-x^2} I_\nu(x) \operatorname{erf}(x - x_0)$ не найдены, определенные интегралы с полубесконечными пределами $[\,0, \infty)$ содержат несмещенные интегралы вероятностей и экспоненциальные показательные функции вида e^{-x}. Большинство решений основано на использовании гамма-функции Эйлера (далее — гамма-функции) и обобщенной гипергеометрической функции [5]. Асимптотические методы приближенных вычислений интегралов хорошо известны [6] – [8] и широко используются в приложении математического анализа, существенно упрощая инженерные расчеты. Однако для регуляризации интегральной ошибки часто требуется проведение дополнительных исследований.

Целью данной работы является нахождение асимптотического решения интеграла от $x^\mu \, \mathrm{e}^{-ax^2} I_\nu(bx) \operatorname{erf}[c(x-x_0)]$, где a, b и c — действительные положительные константы, которое бы обеспечивало заданную точность вычислений.

1 Постановка задачи и приближение интегралов, содержащих $x^\mu \mathbf{e}^{-ax^2} \mathbf{I}_\nu(bx)$

Решение

$$\int x^\mu \, \mathrm{e}^{-ax^2} I_\nu(bx) \operatorname{erf}[c(x - x_0)] \, dx \tag{1}$$

будем искать, интегрируя (1) по частям: $\int uv \, dx = \left(\int u \, dx\right) v -$ $- \int \left(\int u \, dx\right) \frac{dv}{dx} \, dx$, где $u = x^\mu \, \mathrm{e}^{-ax^2} I_\nu(bx)$, $v = \operatorname{erf}[c(x - x_0)]$.

Интеграл

$$\int u \, dx = \int x^\mu \, \mathrm{e}^{-ax^2} I_\nu(bx) \, dx \tag{2}$$

вычислим, используя разложение модифицированной функции Бесселя первого рода в степенной ряд [5]

$$I_\nu(bx) = \left(\frac{bx}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}, \tag{3}$$

где $\Gamma(...)$ — гамма-функция [5].

Запишем (2) с учетом (3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,(k+\nu)!} \int x^{2k+\mu+\nu}\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,dx. \tag{4}$$

Интеграл в (4) вида $\int x^n\,\mathrm{e}^{-ax^2}dx$ приводится в [2] (§ 1.3.3, п. 4) в незамкнутой форме как разложение в ряд с понижением степени при x^n

$$\int x^n\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,dx = -\frac{x^{n-1}}{2a}\,\mathrm{e}^{-ax^2} +$$
$$+\frac{n-1}{2a}\left[-\frac{x^{n-3}}{2a}\,\mathrm{e}^{-ax^2} + \frac{n-3}{2a}\left(-\frac{x^{n-5}}{2a}\,\mathrm{e}^{-ax^2} + ...\right)\right] =$$
$$= \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-ax^2}}{n+1}\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\Gamma\left(k-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}{(ax^2)^k\,\Gamma\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}\right],\ n > 0. \tag{5}$$

Здесь и далее опускаем для краткости постоянную интегрирования.

Если n — нечетное, то $\Gamma\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)$ в (5) имеет простые полюсы, поэтому получим замкнутую форму $\int x^n\,\mathrm{e}^{-ax^2}dx$ другим способом — используем разложение в ряд с повышением степени при x^n

$$\int x^n\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{e}^{-ax^2} +$$
$$+\frac{2a}{n+1}\left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\,\mathrm{e}^{-ax^2} + \frac{2a}{n+3}\left(\frac{x^{n+5}}{n+5}\,\mathrm{e}^{-ax^2} + ...\right)\right] =$$
$$= \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-ax^2}}{n+1}\left[1 + \frac{2ax^2}{n+3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax^2)^k\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}+\frac{5}{2}\right)}\right],\ n > 0. \tag{6}$$

Введем обозначения $z = ax^2$, $\alpha = \frac{n}{2}+\frac{5}{2}$ и запишем (6) в трех вариантах замкнутых форм:

$$\left(\frac{z}{a}\right)^{\alpha-2} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{2(\alpha-2)}\left[1 + \frac{z}{\alpha-1}\,M(1,\alpha,z)\right]; \tag{7}$$

$$\left(\frac{z}{a}\right)^{\alpha-2} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{2(\alpha-2)}\left[1 + \frac{z^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{z}{2}}}{\alpha-1}\,M_{\frac{\alpha}{2}-1,\,\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}(z)\right]; \tag{8}$$

$$\frac{a^{-(\alpha-2)}\,\gamma\,(\alpha-2,z)}{2}, \tag{9}$$

где $M\,(...,\,...,\,...)$ — функция Куммера; $M_{...,\,...}\,(...)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера; $\gamma\,(...,\,...)$ — неполная гамма-функция [5].

Выражения (7), (8) и (9) эквивалентны. Выбор специальной функции может зависеть от решаемой задачи и значений аргументов α, z.

Здесь k–член суммы (4) удобнее выразить с помощью (9):

$$\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu}\frac{a^{-k-\varepsilon}\,\gamma\left(k+\varepsilon,ax^2\right)}{2\,k!\,(k+\nu)!}, \tag{10}$$

где $\varepsilon=\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}$ и, таким образом $\varepsilon>0$ по определению.

Асимптотически строгое решение (2) на основе (10) принимает вид:

$$\int x^{\mu}\,\mathrm{e}^{-ax^2}I_{\nu}(bx)\,dx=$$
$$=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}}{2\,a^{\varepsilon}}\left[\frac{\Gamma\,(\varepsilon)\,M\,(\varepsilon,\nu+1,\beta)}{\nu!}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta^k\,\Gamma\left(k+\varepsilon,ax^2\right)}{k!\,(k+\nu)!}\right], \tag{11}$$

где $\beta=\frac{b^2}{4a}$, ${}_1F_2\,(...;...;...)$ — обобщенная гипергеометрическая функция, $\Gamma\,(...,...)$ — дополнительная неполная гамма-функция [5].

Из (11) легко найти его значение при $x\to\infty$ или его определение на положительной полуплоскости $x\in[\,0,\infty)$

$$\int\limits_0^{\infty}x^{\mu}\,\mathrm{e}^{-ax^2}I_{\nu}(bx)\,dx=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\Gamma\,(\varepsilon)\,M\,(\varepsilon,\nu+1,\beta)}{2\,a^{\varepsilon}\,\nu!}. \tag{12}$$

Этим объясняется выбор (9) для определения k–члена суммы (4).

При $x\to\infty$ интегральная ошибка, связанная с усечением ряда (4),

$$\Delta=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\beta^{n+1}\,\Gamma\,(n+\varepsilon+1)\,{}_2F_2\,(1,n+\varepsilon+1;\,n+2,n+\nu+2;\,\beta)}{2\,a^{\varepsilon}\,(n+1)!\,(n+\nu+1)!}. \tag{13}$$

Примем

$$\mu=1,\ a=\frac{1}{2},\ \nu=0,\ b=\sqrt{2\sigma} \tag{14}$$

и подставим эти значения в (11). Определим для (11) пределы интегрирования $[\,0,\,t\,]$ и выполним нормировку с использованием (12).

Тогда
$$\int\limits_0^t x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-\sigma}\, I_0\left(x\sqrt{2\sigma}\right)\, dx = 1-\mathrm{e}^{-\sigma}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sigma^k\,\Gamma\left(k+1,\frac{t^2}{2}\right)}{\Gamma\left(k+1\right)^2}$$

является обобщенной функцией распределения Релея или функцией распределения Релея-Райса [1], широко используемой при исследовании гауссовских процессов.

Интегральную ошибку, вызванную усечением степенного ряда, вычислим с помощью (13). Выполнив нормировку Δ согласно (12), получим

$$\underline{\Delta} = 1-\frac{\Gamma\left(n+1,\sigma\right)}{\Gamma\left(n+1\right)}.$$

Поскольку «остаточный» ряд
$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu} x^{2(k+\varepsilon)-1}\,\mathrm{e}^{-ax^2}}{k!\,\left(k+\nu\right)!} =$$
$$= \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{2(n+1)+\nu} x^{2(n+\varepsilon)+1}\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,{}_1F_2\left(1;\, n+2, n+\nu+2;\, \frac{b^2x^2}{4}\right)}{\Gamma\left(n+2\right)\,\Gamma\left(n+\nu+2\right)},$$

на основе (13) запишем тождество, дополняющее [4] (§ 2.22.3):
$$\int\limits_0^\infty x^{\varsigma+\epsilon-1}\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,{}_1F_2\left(1;\, \varsigma, \varsigma+\nu;\, \omega x\right) dx =$$
$$= \sigma^{-(\varsigma+\epsilon)}\,\Gamma\left(\varsigma+\epsilon\right){}_2F_2\left(1, \varsigma+\epsilon;\, \varsigma, \varsigma+\nu;\, \frac{\omega}{\sigma}\right);$$
$$\operatorname{Re}\varsigma,\ \operatorname{Re}\sigma>0;\ \operatorname{Re}\epsilon,\ \operatorname{Re}\nu\geqslant 0.$$

2 Приближение интегралов, содержащих $\mathbf{e}^{-c^2(x-x_0)^2}\boldsymbol{\Gamma}\left(\xi, ax^2\right)$

Поскольку правая часть (11) является суммой $U_0+U_n\left(x\right)$, где $U_0 = \frac{b^\nu\,\Gamma(\varepsilon)\,M(\varepsilon,\nu+1,\beta)}{2^{1-\nu}\,a^\varepsilon\,\nu!}$, $U_n\left(x\right) = -\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{b^\nu\beta^k\,\Gamma\left(k+\varepsilon,\, ax^2\right)}{2^{1-\nu}\,a^\varepsilon\,k!\,(k+\nu)!}$, то (1) уточняется к виду $\int uv\,dx = U_n\left(x\right)v-\int U_n\left(x\right)\frac{dv}{dx}\,dx$.

Решение

$$\int U_n\left(x\right)\frac{dv}{dx}\,dx =$$
$$= \frac{c\left(\frac{b}{2}\right)^\nu}{a^\varepsilon\sqrt{\pi}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta^k}{k!\,(k+\nu)!}\int \mathrm{e}^{-c^2(x-x_0)^2}\Gamma\left(k+\varepsilon, ax^2\right) dx \qquad (15)$$

будет зависеть от ε.

Поскольку ε может быть представлена в виде суммы $\lfloor\varepsilon\rfloor+\frac{1}{2}\left[(2\varepsilon)\,\mathbf{mod}\,2\right]$, где **mod** — операция определения остатка при целочисленном делении, $\lfloor\varepsilon\rfloor$ — целая часть ε, рассмотрим два возможных случая в рамках решаемой задачи.

1. Если $\varepsilon=\lfloor\varepsilon\rfloor$ ($\varepsilon\in\mathsf{N}$), на основе тождества $\Gamma\left(n+1,z\right)=n!\,\mathrm{e}^{-z}\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{z^l}{l!}$ [3] (прил. II.7), правая часть (15) принимает вид

$$\frac{c\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\mathrm{e}^{-aqx_0}}{a^{\varepsilon}\sqrt{\pi}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta^k\left(k+\varepsilon-1\right)!}{k!\left(k+\nu\right)!}\sum_{l=0}^{k+\varepsilon-1}\frac{a^l}{l!}\int x^{2l}\mathrm{e}^{-p^2(x-q)^2}dx,\tag{16}$$

где $p=+\sqrt{a+c^2}$, $q=\frac{c^2x_0}{a+c^2}$ и таким образом p, $q>0$ по определению.

2. Если $\varepsilon=\lfloor\varepsilon\rfloor+\frac{1}{2}$, то с помощью рекуррентной формулы $\gamma\left(a+1,z\right)=$ $=a\,\gamma\left(a,z\right)-z^a\,\mathrm{e}^{-z}$ [5] (п. 6.5.22) и разложения дополнительной неполной гамма-функции в степенной ряд $\Gamma\left(\frac{1}{2},ax^2\right)=\sqrt{\pi}\left[1-\sqrt{a}\,\mathrm{e}^{-ax^2}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{a^l\,x^{2l+1}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+l\right)}\right]$ на основе [5] (п. 6.5.29) получим правую часть (15) в виде

$$\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\Gamma\left(\varepsilon\right)M\left(\varepsilon,\nu+1,\beta\right)\mathrm{erf}\left[c\left(x-x_0\right)\right]}{2\,a^{\varepsilon}\nu!}-\frac{c\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\mathrm{e}^{-aqx_0}}{a^{\lfloor\varepsilon\rfloor}\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta^k\Gamma\left(k+\varepsilon\right)}{k!\left(k+\nu\right)!}\lim_{m\to\infty}\sum_{l=k+\lfloor\varepsilon\rfloor}^{m}\frac{a^l}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+l\right)}\int x^{2l+1}\mathrm{e}^{-p^2(x-q)^2}dx.\tag{17}$$

Интегралы в (16) и (17) вида $\int x^{\eta}\,\mathrm{e}^{-p^2(x-q)^2}dx$ на основе [2] (§ 1.3.3, п. 5, 6, 18) и с учетом четности или нечетности $\eta=2n+\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\}$ представим комбинацией ${}_2F_0\left(...;...\right)$ и конечных сумм:

$$\Upsilon_{0,1}\left(n,x\right)=\int x^{2n+\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\}}\,\mathrm{e}^{-p^2(x-q)^2}dx=$$
$$=\frac{q^{2n+\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\}}}{2p}\Bigg\{\mathrm{sgn}\left[p\left(x-q\right)\right]\Bigg[\sqrt{\pi}\,{}_2F_0\left(-n,-n\pm\tfrac{1}{2};\,(pq)^{-2}\right)-$$
$$-\left(2n+\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\}\right)!\sum_{i=0}^{n}\frac{(pq)^{-2i}\,\Gamma\left(i+\frac{1}{2},p^2\left(x-q\right)^2\right)}{(2i)!\left(2\left(n-i\right)+\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\}\right)!}\Bigg]-$$
$$-\left(2n+\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\}\right)!\sum_{i=0}^{n-\left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right\}}\frac{(pq)^{-2i-1}\,\Gamma\left(i+1,p^2\left(x-q\right)^2\right)}{(2i+1)!\left(2\left(n-i\right)-\left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right\}\right)!}\Bigg\},\tag{18}$$

где

$$\operatorname{sgn}\zeta = \begin{cases} 1,\ \zeta > 0, \\ 0,\ \zeta = 0, \\ -1,\ \zeta < 0. \end{cases}$$

При переходе от (15) к (17) получены выражения, дополняющие [3] (прил. II.7):

$$\begin{Bmatrix} \gamma\,(a+n,z) \\ \Gamma\,(a+n,z) \end{Bmatrix} = (a)_n \left[\begin{Bmatrix} \gamma\,(a,z) \\ \Gamma\,(a,z) \end{Bmatrix} \mp z^a \mathrm{e}^{-z} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{(a)_{k+1}} \right], \tag{19}$$

где $(a)_n$ — символ Похгаммера [2].

С помощью (19) запишем (15) для $\forall\varepsilon > 0$

$$\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \Gamma\,(\varepsilon)\, M\,(\varepsilon, \nu+1, \beta)\, \mathrm{erf}\,[c\,(x-x_0)]}{2\,a^{\varepsilon}\nu!} - \frac{c\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \mathrm{e}^{-aqx_0}}{a^{\lfloor\varepsilon\rfloor}\sqrt{\pi}} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k \Gamma\,(k+\varepsilon)}{k!\,(k+\nu)!} \sum_{l=k+\lfloor\varepsilon\rfloor}^{\infty} \frac{a^l}{\Gamma\,(l+1+\varepsilon')} \int x^{2(l+\varepsilon')} \mathrm{e}^{-p^2(x-q)^2} dx, \tag{20}$$

где $\varepsilon' = \varepsilon - \lfloor\varepsilon\rfloor$. Из (20) несложно получить (16) и (17). Интеграл, входящий в (20), за исключением двух рассмотренных случаев к классу (18) не относится и в работе не вычисляется.

При получении (18) приведены к замкнутой форме интегралы [2] (§ 1.3.3, п. 5, 6):

$$\int x^{2n}\, \mathrm{e}^{-a^2x^2} dx = \frac{\operatorname{sgn}\,(ax)\ \gamma\left(n+\frac{1}{2}, a^2x^2\right)}{2a^{2n+1}};$$

$$\int x^{2n\pm1}\, \mathrm{e}^{-a^2x^2} dx = -\frac{\Gamma\left(n + \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}, a^2x^2\right)}{2a^{2n+\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}}}.$$

3 Примеры

1. На основе (11), (16) и (18) запишем решение (1) для $\varepsilon = \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} = \lfloor\varepsilon\rfloor$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \left[-\frac{\mathrm{erf}[c(x-x_0)]}{2\,a^{\varepsilon}} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta^k\, \Gamma\left(k+\varepsilon, ax^2\right)}{k!\,(k+\nu)!} + \right.$$
$$\left. + \frac{c\,\mathrm{e}^{-aqx_0}}{a^{\varepsilon}\sqrt{\pi}} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta^k\,(k+\varepsilon-1)!}{k!\,(k+\nu)!} \sum_{l=0}^{k+\varepsilon-1} \frac{a^l\, \Upsilon_0\,(l,x)}{l!} \right]. \tag{21}$$

Рассмотрим интегральную ошибку (21), связанную с усечением k–членов ряда.

В (2) запишем u в виде суммы $u = u_n + \delta$, где $u_n = x^{\mu}\,\mathrm{e}^{-ax^2} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(k+\nu)!}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k+\nu}$, $\delta = x^{\mu}\,\mathrm{e}^{-ax^2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!(k+\nu)!}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k+\nu}$ и пусть $\int \delta\,dx = \Delta(x) + C$. Тогда $\int (u_n+\delta)\,v\,dx = \int u_n v\,dx + \Delta(x)\,v - \int \Delta(x)\,\frac{dv}{dx}\,dx$. При $x\to\infty$ $\Delta(x)\,v = \Delta(\infty) > 0$ по определению v. В силу фильтрующих свойств $\frac{dv}{dx}$: $0 < \int \Delta(x)\,\frac{dv}{dx}\,dx < \Delta(\infty)$.

Следовательно, $\left|\int \delta v\,dx\right| < \Delta(\infty)$ при $x_0 \in [0,\infty)$, где $\Delta(\infty)$ определено (13) как Δ. Например, чтобы интегральная ошибка не превышала минус 110 дБ, при $\mu = 1$, $\nu = 2$, $a = \frac{1}{2}$ и $b = \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}$ значение n в (21) должно быть не менее 7, 10, 15, 23 и 36 соответственно.

2. Возьмем за основу вместо (16) формулу (17) и получим решение (1), когда $\varepsilon = \lfloor\varepsilon\rfloor + \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\left\{\frac{\mathrm{erf}[c(x-x_0)]}{2\,a^{\varepsilon}}\left[\frac{\Gamma(\varepsilon)\,M(\varepsilon,\nu+1,\beta)}{\nu!} - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta^k\,\Gamma\left(k+\varepsilon, ax^2\right)}{k!\,(k+\nu)!}\right] - \right.$$
$$\left. -\frac{c\,\mathrm{e}^{-aqx_0}}{a^{\lfloor\varepsilon\rfloor}\sqrt{\pi}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta^k\Gamma(k+\varepsilon)}{k!\,(k+\nu)!}\lim_{m\to\infty}\sum_{l=k+\lfloor\varepsilon\rfloor}^{m}\frac{a^l\,\Upsilon_1(l,x)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+l\right)}\right\}. \qquad (22)$$

Решение (22) по сравнению с (21) получилось более сложным в силу того, что неполная гамма-функция с нецелым первым аргументом не выражается в виде конечной суммы.

Интегральная ошибка (22) связана как с усечением k–членов ряда, так и l–членов степенного ряда разложения неполной гамма-функции. Аддитивность «остаточных» рядов по k и l позволяет, выравнивая их пределы, получить для (22): $\left|\int \delta v\,dx\right| < 2\Delta$ при $x_0 \in [0,\infty)$.

Чтобы в этом случае интегральная ошибка не превысила минус 110 дБ, уменьшим предел для каждого из «остаточных» рядов до минус 116 дБ и получим при $\nu = 1$ и $c = \frac{1}{2}$, что значение n в (22) должно быть не менее 8, 11, 16, 24 и 37 в соответствии с варьированием b.

Оценку значений m выполним следующим образом. Пусть при $l > l_0$ выполняется $\frac{f_l}{f_{l-1}} > \frac{f_{l+1}}{f_l}$, где $f_i = \frac{a^i[\Upsilon_1(i,\infty)-\Upsilon_1(i,0)]}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\right)}$, тогда с учетом $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, где $|x| < 1$, получим: $\sum_{k=m}^{\infty} f_k < \frac{f_m^2}{f_m - f_{m+1}}$, $m > l_0$. Значение l_0 определяем из условия $\frac{g_{l_0}}{g_{l_0-1}} - \frac{f_{l_0}}{f_{l_0-1}} < \Omega$, где $g_i = \frac{2a^i\Upsilon_1(i,\infty)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\right)}$ и $\frac{g_l}{g_{l-1}} > \frac{g_{l+1}}{g_l}$ выполняется при $l > 0$. Например, при $\Omega \leqslant -110$ $l_0 > 20$.

Таким образом, m в (22) должно быть не менее 48, 51, 58, 69 и 92 соответственно.

3. Решения (21) и (22) основаны на разложении модифицированной функции Бесселя первого рода в степенной ряд (3), а также на решениях интегралов вида $\int x^n \,\mathrm{e}^{-ax^2} dx$ (9) и $\int x^{2n+\left\{ {0 \atop 1} \right\}} \mathrm{e}^{-p^2(x-q)^2} dx$ (18). Решение (22), кроме этого, использует степенной ряд для вычисления дополнительной неполной гамма-функции $\Gamma\left(\frac{1}{2}, ax^2\right)$. Как (9), приводящее к (11), так и (18) могут использоваться для нормировки соответствующих интегралов, а также для оценки интегральной ошибки, связанной с усечением используемых рядов.

Заключение

1. Полученное решение основано на интегрировании $k-$члена разложения модифицированной функции Бесселя первого рода в степенной ряд и использует обобщенные и вырожденные гипергеометрические функции, а также гамма-функцию. Результаты решения удобны для выполнения нормировки и оценки интегральной ошибки, обусловленной переходом от ряда к конечной сумме.

2. Более сложным является вычисление интегралов, содержащих произведение смещенного гауссовского экспоненциального импульса и дополнительной неполной гамма-функции с нецелым первым аргументом.

3. Абсолютное значение интегральной ошибки решения задачи не превышает удвоенной интегральной ошибки, связанной с усечением степенного ряда разложения модифицированной функции Бесселя первого рода.

Литература

1. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Москва, 1973. 832 с. Текст: непосредственный.
2. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: в 3 т. Т. 1. Элементарные функции. Изд. 2, испр. Москва: Физматлит, 2002. 632 с. Текст: непосредственный.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: в 3 т. Т. 2. Специальные функции. Изд. 2, испр. Москва: Физматлит, 2003. 664 с. Текст: непосредственный.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: в 3 т. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. Изд. 2, испр. Москва: Физматлит, 2003. 688 с. Текст: непосредственный.
5. Абрамовиц М., Стегун И. Справочник по специальным функциям. Москва: Физматлит, 1972. 1046 с. Текст: непосредственный.
6. Федорюк М. В. Асимптотические методы в анализе // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. фундам. направления. 1986. Т. 13. С. 93–210. Текст: непосредственный.
7. Видилина О. В., Щетинина Е. В. Асимптотические методы анализа: методические указания. Самара: Универс групп, 2010. 32 с. Текст: непосредственный.
8. Тропкина Е. А. Асимптотические методы: учебное пособие. Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2022. 64 с. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 12.10.2022; одобрена после рецензирования 18.10.2022; принята к публикации 20.10.2022.

APPROXIMATE ANSWER ON INTEGRALS OF EXPONENTIAL AND POWER FUNCTIONS

Victor S. Polenov
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,
Senior Researcher
Air Force Educational and Scientific Center
54A Starykh Bolshevikiv St., 394064, Voronezh, Russia

Dmitry A. Nitsak
Cand. Sci. (Engineering),
Senior Researcher
Air Force Educational and Scientific Center
54A Starykh Bolshevikiv St., 394064, Voronezh, Russia

Abstract. An approximate solution for integrals of product of power function, exponential function with the inverted parabola of the second order argument, modified Bessel function of first kind and biased error function is received. In the course of evaluation a integrals of product of power and exponential functions are brought into a closed form and standard integrals of product of power and biased exponential functions are simplified. The result suggests desired number of members with the integral error not to be in excess of specified value. This paper presents the power series expansion of modified Bessel function of first kind and incomplete gamma function. Working results may be required in mechanical and radio engineering processes research.

Keywords: Euler gamma-function, hypergeometric function, Kummer function, Whittaker function.

For citation
Polenov V. S., Nitsak D. A. Approximate Answer on Integrals of Exponential and Power Functions. Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 3. P. 27–36.

The article was submitted 12.10.2022; approved after reviewing 18.10.2022; accepted for publication 20.10.2022.