

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Научная статья

УДК 531.38

DOI: 10.18101/2304-5728-2022-4-30-37

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ

© **Алексеев Алексей Владимирович**

кандидат технических наук, доцент,

Самарский национальный исследовательский университет

имени академика С. П. Королева

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34

alexeeff05@mail.ru

Аннотация. Рассматривается движение относительно неподвижной точки твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости. Для построения динамических уравнений движения используется метод, предложенный Ф. Л. Черноусько, основанный на применении теоремы об изменении кинетического момента. Для случая динамически симметричного твердого тела выведен первый интеграл движения, получены точные аналитические зависимости компонент угловой скорости твердого тела в связанной с ним системе отсчета от времени, построены соответствующие графики. Полученные аналитические зависимости угловых скоростей от времени позволяют исследовать влияние параметров системы, в том числе жидкости, на динамику ее движения относительно неподвижной точки. Практическим приложением может являться использование полученных результатов при исследовании движения космических аппаратов, имеющих на борту запас жидкого топлива.

Ключевые слова: математическая модель, твердое тело, кинетический момент, жидкость, вязкость, момент инерции, интеграл движения, быстрые и медленные переменные, аналитическое решение.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00085).

Для цитирования

Алексеев А. В. Аналитическое решение динамических уравнений движения твердого тела с жидкостью большой вязкости // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 4. С. 30–37.

Введение

За последние несколько десятилетий вновь актуальной стала задача исследования движения твердых тел и их систем с жидким наполнением. Основным источником таких задач является проблема движения летательных, в том числе космических, аппаратов, содержащих существенный

запас жидкого топлива. Зачастую масса топлива составляет большую (а иногда преобладающую) часть массы всей системы, что говорит о существенном влиянии жидких компонент на движение всей системы. Влияние оказывают следующие факторы: инертность жидкого топлива, вовлекаемость в движение (вращение), трение жидкости о стенки полости, колебания (всплески) жидкости при наличии свободных поверхностей.

Задаче исследования движения относительно неподвижной точки твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, посвящено существенное количество работ [1–6]. Первооткрывателем в этой области является Н. Е. Жуковский [1]. Им получены первые математические модели систем с идеальной жидкостью. Далее подобными задачами занимались Б. Н. Румянцев [2, 3], Н. Н. Моисеев [3], Ф. Л. Черноусько [4, 5], А. Ю. Ишлинский [6]. Подавляющее большинство работ направлено на построение уравнений движения, включая решение гидродинамической задачи, или посвящено исследованию устойчивости конкретных (в основном, вращательных) движений. Имеется ряд публикаций, посвященных исследованию течений вязкой жидкости, например, [7, 8].

Гораздо меньше работ посвящено получению аналитических зависимостей параметров движения (координат и скоростей) систем от времени, начальных условий и инерционно-массовых характеристик системы. Объективной причиной этому является сложность механической системы твердого тела с жидкостью — она фактически является системой с бесконечным числом степеней свободы и требует применения аппарата дифференциальных уравнений в частных производных, который далеко не всегда (особенно в случае уравнения Навье — Стокса) позволяет получить аналитические решения. Возникает необходимость преобразовывать математические модели, чтобы они становились конечномерными. Больших результатов в этом добился Ф. Л. Черноусько [5].

В данной работе приводится математическая модель движения твердого тела с жидкостью большой вязкости и для частного случая получается аналитическое решение, которое для проверки правильности результата сравнивается с численным решением исходных уравнений.

1 Математическая модель

Согласно методике, предложенной Ф. Л. Черноусько [5], и в соответствии с логикой, представленной в [9], динамические уравнения движения относительно неподвижной точки твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости, в связанной системе координат (оси являются главными осями инерции) примут вид:

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - B)qr &= M_x - \rho v^{-1}D \left(A^{-1} \left[\dot{M}_x + (B - C)(\dot{q}r + q\dot{r}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + qC^{-1} \left[M_z + (A - B)pq \right] - rB^{-1} \left[M_y + (C - A)pr \right] \right); \\
 B\dot{q} + (A - C)pr &= M_y - \rho v^{-1}D \left(B^{-1} \left[\dot{M}_y + (C - A)(\dot{p}r + p\dot{r}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + rA^{-1} \left[M_x + (B - C)qr \right] - pC^{-1} \left[M_z + (A - B)pq \right] \right); \\
 C\dot{r} + (B - A)pq &= M_z - \rho v^{-1}D \left(C^{-1} \left[\dot{M}_z + (A - B)(\dot{p}q + p\dot{q}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + pB^{-1} \left[M_y + (C - A)pr \right] - qA^{-1} \left[M_x + (B - C)qr \right] \right),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно главных осей x, y, z ; p, q, r — проекции вектора угловой скорости; M_x, M_y, M_z — проекции главного момента внешних сил, ρ — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, D — параметр полости [5].

Рассмотрим случай, когда тело является динамически симметричным $A = B$, на него не действует внешний момент. Кроме того, величина $\rho v^{-1}D = \varepsilon$ является малой из-за большой вязкости жидкости, что позволяет при отмеченных ограничениях пренебречь членами второго порядка малости. Тогда уравнения (1) преобразуются:

$$\begin{cases}
 A\dot{p} + (C - A)qr = \varepsilon(C - A)CA^{-2}pr^2; \\
 A\dot{q} + (A - C)qr = \varepsilon(C - A)CA^{-2}qr^2; \\
 C\dot{r} = \varepsilon(A - C)A^{-1}(p^2 + q^2)r.
 \end{cases} \tag{2}$$

Умножим первое уравнение системы (2) на Ap , второе — на Aq , третье — на Cr .

$$\begin{cases}
 A^2\dot{p}p + A(C - A)pqr = \varepsilon(C - A)CA^{-1}p^2r^2; \\
 A^2\dot{q}q + A(A - C)pqr = \varepsilon(C - A)CA^{-1}q^2r^2; \\
 C^2\dot{r}r = \varepsilon(A - C)CA^{-1}(p^2 + q^2)r^2.
 \end{cases} \tag{3}$$

Сложим уравнения системы (3):

$$A^2\dot{p}p + A^2\dot{q}q + C^2\dot{r}r = 0. \tag{4}$$

Проинтегрировав последнее выражение, получим первый интеграл уравнений движения (2):

$$A^2p^2 + A^2q^2 + C^2r^2 = K^2, \tag{5}$$

где $K = const$.

2 Аналитическое решение динамических уравнений движения

Введем замену переменных:

$$p = x \cos y, \quad q = x \sin y, \quad r = z. \quad (6)$$

Тогда уравнения (2) примут вид:

$$\begin{cases} A(\dot{x} \cos y - x\dot{y} \sin y) + (C - A)xz \sin y = \varepsilon(C - A)CA^{-2}xz^2 \cos y; \\ A(\dot{x} \sin y + x\dot{y} \cos y) + (A - C)xz \cos y = \varepsilon(C - A)CA^{-2}xz^2 \sin y; \\ C\dot{z} = \varepsilon(A - C)A^{-1}zx^2. \end{cases} \quad (7)$$

Выражая из системы (7) старшие производные введенных координат, получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon(C - A)CA^{-3}xz; \\ \dot{y} = (C - A)A^{-1}z; \\ \dot{z} = \varepsilon(A - C)A^{-1}C^{-1}zx^2, \end{cases} \quad (8)$$

где x и z — это медленные переменные типа «амплитуда», а y — быстрая переменная типа «фаза». Подставим замену переменных (6) в первый интеграл (5) и выразим:

$$x^2 = \frac{K^2 - C^2 z^2}{A^2}. \quad (9)$$

Подставим (9) в третье уравнение системы (8):

$$\dot{z} = \varepsilon \frac{(A - C)}{AC} z \frac{K^2 - C^2 z^2}{A^2}. \quad (10)$$

Решая уравнение (10), получим:

$$z = \frac{K \exp\left(\frac{\varepsilon(A - C)K^2 t}{A^3 C} + C_1\right)}{\sqrt{1 + C^2 \exp\left(2\left(\frac{\varepsilon(A - C)K^2 t}{A^3 C} + C_1\right)\right)}}. \quad (11)$$

Переменная x выражается из (9):

$$x = \frac{AK}{\sqrt{1 + C^2 \exp\left(2\left(\frac{\varepsilon(A - C)K^2 t}{A^3 C} + C_1\right)\right)}}. \quad (12)$$

После подстановки выражения (11) во второе уравнение (8) решим его относительно переменной y :

$$y = -\frac{A^2}{\varepsilon K} \left[\ln\left(C \exp(F(t)) + \sqrt{1 + C^2 \exp(2(F(t)))}\right) + C_2 \right], \quad (13)$$

где $F(t) = \frac{\varepsilon(A - C)K^2 t}{A^3 C} + C_1$.

Параметры K, C_1, C_2 являются постоянными интегрирования и находятся из начальных условий:

$$p(0) = p_0, q(0) = q_0, r(0) = r_0;$$

$$x_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}, y_0 = \operatorname{arctg} \frac{q_0}{p_0}, z_0 = r_0;$$

$$K = \sqrt{A^2 p_0^2 + A^2 q_0^2 + C^2 r_0^2}.$$

Для того чтобы получить явные зависимости от времени компонент угловой скорости p, q, r тела в связанной системе координат необходимо подставить выражения (11), (12) и (13) в (6).

3 Верификация решений

Зачастую дифференциальные уравнения движения систем твердых тел с жидким наполнением не имеют точного аналитического решения. Такие системы исследуются численными методами. При этом получающиеся решения считают достаточно точными. Сравним аналитические решения, полученные в предыдущем пункте, с решением системы (2), полученным численно. На рисунках 1–3 показаны результаты численного (кривая 1) и аналитического (кривая 2) расчетов.

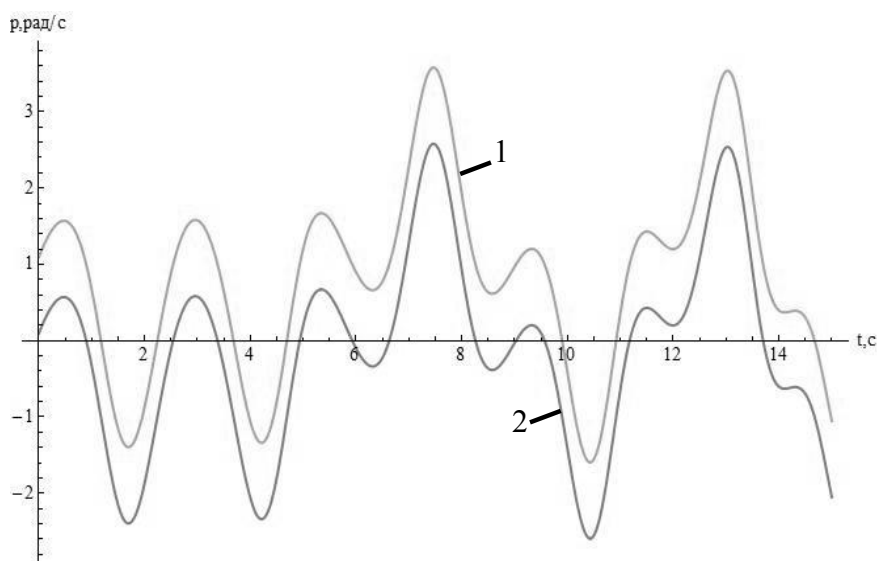


Рис. 1. Зависимость проекции угловой скорости p от времени:
1 — численное решение; 2 — аналитическое решение.

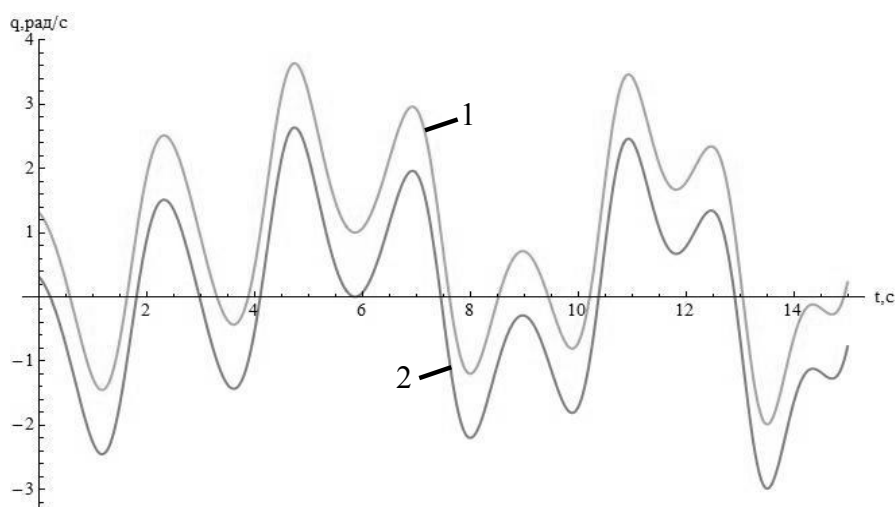


Рис. 2. Зависимость проекции угловой скорости q от времени:
1 — численное решение; 2 — аналитическое решение.

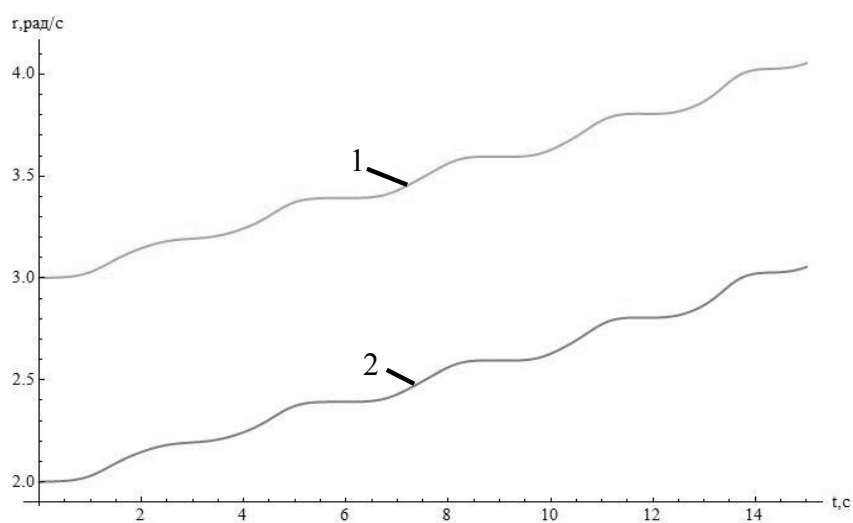


Рис. 3. Зависимость проекции угловой скорости r от времени:
1 — численное решение; 2 — аналитическое решение.

На рисунках 1–3 кривые полностью совпадают, но для наглядности одна кривая (численное решение) смещена вдоль вертикальной оси на единицу. Графики показывают, что результаты численного и аналитического решения совпадают.

Заключение

В результате выполнения работы построена математическая модель движения относительно неподвижной точки твердого тела с полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости (1). Данная модель представлена динамическими уравнениями. При необходимости исследования ориентации тела в пространстве к этим уравнениям добавляются любые кинематические уравнения (в углах Эйлера, в направляющих косинусах, в кватернионах и т. д.). Уравнения (1) записаны для твердого тела любой формы, что расширяет их применимость. Для случая динамической симметрии твердого тела получены упрощенные уравнения (2), позволившие найти первый интеграл движения (5) и точное аналитическое решение типа (6) с учетом (11), (12) и (13). Как показывают графики на рисунках 1–3, полученное аналитическое решение полностью совпадает с результатом численного расчета, из чего можно сделать вывод о правильности решений.

Полученные аналитические зависимости для амплитуд x и z показывают, что на большом интервале времени они стремятся к постоянным значениям: амплитуда x стремится к нулевому значению, амплитуда z к величине K/C . Данный факт говорит о том, что диссипативные свойства жидкости внутри твердого тела обеспечивают перераспределение кинетического момента так, что он перенаправляется вдоль продольной оси (оси динамической симметрии) твердого тела.

Литература

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика. Москва: Гостехиздат, 1949. 139 с.
2. Румянцев Б. Н. О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью // Прикладная механика и математика. 1964. Т. 28, № 6. С. 1127–1132.
3. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Москва: Наука, 1965. 439 с.
4. Черноушко Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 308 с.
5. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. Москва: Изд. ВЦ АН СССР, 1968. 250 с.
6. Ишлинский А. Ю., Темченко М. Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // Прикладная математика и теоретическая физика. 1960. № 3. С. 65–75.
7. Абрамова О. А., Гимадеев А. В., Фаткуллина Н. Б. Моделирование гидродинамических потоков вязкой жидкости вокруг неподвижных элементов различного поперечного сечения // Вестник Башкирск. ун-та. 2019. № 4. С. 788–793.
8. Низамова А. Д., Киреев В. Н., Урманчиев С. Ф. Определение критического числа Рейнольдса в задаче об устойчивости течения термовязкой жидкости // Вестник Башкирск. ун-та. 2018. № 3. С. 627–634.

А. В. Алексеев. Аналитическое решение динамических уравнений движения твердого тела с жидкостью большой вязкости

9. Алексеев А. В., Дорошин А. В. Приведение спутника-гиростата с полостью с жидкостью к системам твердых тел с вязким трением // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». 2007. № 9. С. 26–33.

Статья поступила в редакцию 17.11.2022; одобрена после рецензирования 16.12.2022; принята к публикации 16.12.2022.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE DYNAMIC EQUATIONS OF MOTION OF A SOLID BODY WITH A HIGH VISCOSITY LIQUID

Aleksey V. Alekseev

Cand. Sci. (Engineering), A/Prof,
Samara National Research University
34 Moskovskoye shosse, Samara 443086, Russia

Abstract. The motion of a solid body with a spherical cavity filled with a high viscosity liquid is considered relative to a fixed point. To construct dynamic equations of motion, the method proposed by F.L. Chernousko, based on the application of the theorem on the change in angular momentum. For the case of a dynamically symmetric solid body, the first integral of motion is derived, exact analytical dependences of the components of the angular velocity of the solid body in a coupled reference frame on time are obtained, and the corresponding graphs are plotted. The obtained analytical dependencies allow us to study the influence of system parameters, including fluid, on the dynamics of its motion relative to a fixed point. Practical application can be the use of the results obtained in the study of the motion of spacecraft with a supply of liquid fuel on board.

Keywords: mathematical model, rigid body, kinetic moment, liquid, viscosity, moment of inertia, integral of motion, fast and slow variables, analytical solution.

For citation

Alekseev A. V. Analytical Solution of the Dynamic Equations of Motion of a Solid Body With a High Viscosity Liquid // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 4. P. 30–37.

The article was submitted 17.11.2022; approved after reviewing 16.12.2022; accepted for publication 16.12.2022.