Научная статья

УДК 519.62, 519.63
DOI: 10.18101/2304-5728-2022-4-38-47

ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ТВЕРДОЕ ТЕЛО, ПРИКРЕПЛЕННОЕ К ДВУМ УПРУГИМ СТЕРЖНЯМ

© Мижидон Арсалан Дугарович
доктор технических наук, профессор,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
miarsdu@mail.ru

© Хамханов Алдар Кимович
преподаватель,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
msdos147@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассматривается построение математической модели для механической системы, представляющее собой твердое тело, прикрепленное к двум балкам Эйлера — Бернулли. Уравнений динамики были получены с использованием вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. Математическая модель, представлена в виде гибридной системы дифференциальных уравнений, для которой обсуждается возможность использования единого подхода исследования свободных колебаний, предложенного при исследовании систем твердых тел, прикрепленных к одному стержню.

Ключевые слова: твердое тело, гибридная система дифференциальных уравнений, балка Эйлера — Бернулли.

Для цитирования
Мижидон А. Д., Хамханов А. К. Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая твердое тело, прикрепленное к двум упругим стержням // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 4. С. 38–47.

Введение

Механические системы, состоящие из твердого тела или же системы твердых тел, связанные между собой одним стержнем достаточно подробно исследованы в работе [1]. Уравнения динамики для рассматриваемых систем были получены с применением вариационного принципа Гамильтона — Остроградского, что в свою очередь приводит к возникновению системы дифференциальных уравнений, названных гибридными (ГСДУ). Особенность ГСДУ состоит в том, что она представляет собой систему дифференциальных уравнений, включающая в себя как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных. Позже в работе [2] были получены теоретические основы исследования для данного класса гибридных систем, что в свою очередь привело к разработке единого подхода к исследованию собственных колебаний путем построения обобщенных математических моделей применительно к широкому классу механических систем, состоящего из систем твердых тел, закрепленных на балке Эйлера — Бернулли [3].

1 Постановка задачи

Механическая система состоит из двух упругих стержней, к которым крепится посредством пружин жесткостью c_1, c_2, c_3, c_4 твердое тело массой m в точках a_1, a_2, a_3, a_4 (рис. 1). Зададим $0xz$ неподвижную систему координат. Пусть $0xz$ имеет начало координат в точке крепления нижнего стержня, а ось $0x$ будет направлена вдоль оси этого стержня. Так же нам потребуется подвижная система координат $0'x'z'$, связанная с твердым телом. Будем считать, что в состоянии равновесия оси координат описанных систем параллельны. В рамках заданной механической системы тело с массой m может двигаться поступательно вдоль оси $0x$ и одновременно поворачиваться вокруг собственной оси на некоторый угол φ. Функции, выражающие перемещение точек стержней вдоль оси Oz обозначены как $u_1(x,t), u_2(x,t)$.

Запишем уравнение перемещения вдоль оси Oz для произвольной точки тела (x', z')

$$z = z_0 + z' + x'\varphi. \tag{1}$$

Данное равенство будет справедливо в силу того, что перемещение вдоль оси $0x$ отсутствует, а угол φ является достаточно малым.

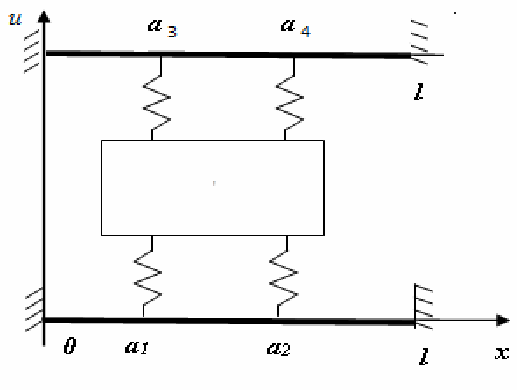

Рис. 1. Механическая система с двумя упругими стержнями

На основании полученного равенства (1), перемещения точек соединения упругих элементов и твердого тела массой m вдоль оси Oz можно описать следующими равенствами

$$z_1 = z_0 + z_1' + d_1\varphi,\;\; z_2 = z_0 + z_2' + d_2\varphi\,,$$
$$z_3 = z_0 + z_3' + d_3\varphi,\;\; z_4 = z_0 + z_4' + d_4\varphi\,, \tag{2}$$

где z_1', z_2', z_3', z_4' — координаты точек соединения тела массы m и упругих элементов вдоль оси Oz, d_1, d_2, d_3, d_4 — расстояния от подвижной оси $0'z'$ до осей пружин, прикрепленных к стержням в точках a_1, a_2, a_3, a_4.

С учетом полученных выражений (2) запишем потенциальную энергию пружин как квадрат ее линейной деформации.

$$U_1 = \frac{c_1(z_0 + z_1' - d_1\varphi - u_1(a_1,t))^2 + c_2(z_0 + z_2' + d_2\varphi - u_1(a_2,t))^2}{2} +$$
$$+ \frac{c_3(z_0 + z_1' - d_3\varphi - u_2(a_3,t))^2 + c_4(z_0 + z_1' + d_4\varphi - u_2(a_4,t))^2}{2}. \tag{3}$$

Уравнение для кинетической энергии твердого тела массой m будет иметь вид

$$T_1 = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{I_\varphi \dot{\varphi}^2}{2}, \tag{4}$$

где I_φ — момент инерции данного тела относительно центра масс при повороте на угол φ.

Исходя из технической теории стержней, запишем потенциальную и кинетическую энергии рассматриваемых стержней.

$$T_2 = \frac{1}{2}\left[\int_0^l pF\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 dx + \int_0^l pF\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2 dx\right],$$
$$U_2 = \frac{1}{2}\left[\int_0^l El\left(\frac{d^2u_1}{dx^2}\right)^2 dx + \int_0^l El\left(\frac{d^2u_2}{dx^2}\right)^2 dx\right], \tag{5}$$

где I — момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний, E — модуль упругости, F — площадь поперечного сечения и ρ — плотность материала стержня.

Далее следуя единому подходу исследования свободных колебаний, предложенному для систем, прикрепленных к одному стержню, также воспользуемся вариационным принципом Гамильтона — Остроградского и получим следующий интеграл.

$$J(z,\varphi,u_1,u_2)=\int_{t_0}^{t_1}\delta\left(T-U\right)dt=0\,, \tag{6}$$

где U — кинетическая энергия системы, а T — потенциальная энергия системы.

2 Гибридная система дифференциальных уравнений

Составим вспомогательную функцию с учетом полученных соотношений для кинетической и потенциальной энергии (3)–(5).

$$\varphi(\alpha)=J(z+\alpha\Delta z,\varphi+\alpha\Delta\varphi,u_1+\alpha\Delta u_1,u_2+\alpha\Delta u_2)\,.$$

Затем вычислим производную от функции $\varphi(\alpha)$ по параметру α и тогда мы сможем определить вариацию функционала действия δJ при $\alpha=0$

$$\delta J=\frac{\partial\varphi(0)}{\partial a}=\int_{t_1}^{t_2}\left[m\dot{z}_0\delta\dot{z}_0+I_\varphi\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}\right]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[c_1(z_0+z_1'-d_1\varphi-u_1(a_1,t))(\delta z_0-d_1\delta\varphi-\delta u_1(a_1,t))\right]dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[c_2(z_0+z_2'+d_2\varphi-u_1(a_2,t))(\delta z_0+d_2\delta\varphi-\delta u_1(a_2,t))\right]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[c_3(z_0+z_3'-d_3\varphi-u_2(a_3,t))(\delta z_0-d_3\delta\varphi-\delta u_2(a_3,t))\right]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[c_4(z_0+z_4'+d_4\varphi-u_2(a_4,t))(\delta z_0+d_4\delta\varphi-\delta u_2(a_4,t))\right]dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^l pF\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\delta u_1(x,t)}{\partial t}dx-\int_0^l El\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta u_1(x,t)}{\partial x^2}dx\right]dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^l pF\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\delta u_2(x,t)}{\partial t}dx-\int_0^l El\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta u_2(x,t)}{\partial x^2}dx\right]dt.$$

Далее при помощи вариационного принципа Гамильтона — Остроградского получим

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}\Big(-m\ddot{z}_0-c_1\left[z_0+z_1'-d_1\varphi-u_1\left(a_1,t\right)\right]-c_2\left[z_0+z_2'+d_2\varphi-u_1\left(a_2,t\right)\right]+$$
$$+c_3\left[z_0+z_3'-d_3\varphi-u_2\left(a_3,t\right)\right]-c_4\left[z_0+z_4'-d_4\varphi-u_2\left(a_4,t\right)\right]\Big)\delta z_0dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big(-I_\varphi\ddot{\varphi}+c_1d_1\left[z_0+z_1'-d_1\varphi-u_1\left(a_1,t\right)\right]+c_2d_2\left[z_0+z_2'+d_2\varphi-u_1\left(a_2,t\right)\right]+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big(-I_\varphi\ddot{\varphi}+c_1d_1\left[z_0+z_1'-d_1\varphi-u_1\left(a_1,t\right)\right]+c_2d_2\left[z_0+z_2'+d_2\varphi-u_1\left(a_2,t\right)\right]+$$
$$+c_3d_3\left[z_0+z_3'-d_3\varphi-u_2\left(a_3,t\right)\right]+c_4d_4\left[z_0+z_4'+d_4\varphi-u_2\left(a_4,t\right)\right]\Big)\delta\varphi dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\Big(c_1\left[z_0+z_1'-d_1\varphi-u_1\left(x,t\right)\right]+c_2\left[z_0+z_2'+d_2\varphi-u_1\left(x,t\right)\right]-$$
$$-\rho F\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}-EI\frac{\partial^4u_1}{\partial x^4}\Big)\delta u_1dxdt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\Big(c_3\left[z_0+z_3'-d_3\varphi-u_2\left(x,t\right)\right]+c_4\left[z_0+z_4'+d_4\varphi-u_2\left(x,t\right)\right]-$$
$$-\rho F\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}-EI\frac{\partial^4u_2}{\partial x^4}\Big)\delta u_2dxdt=0.$$

Далее согласно основной лемме вариационного исчисления мы получим ГСДУ для динамики системы. Так как допустимые вариации $\delta z_0(t)$, $\delta\varphi$ и $\delta u_1(x,t)$, $\delta u_2(x,t)$ независимы и произвольны.

$$\begin{cases}m\ddot{z}_0+c_1\left[z_0+z_1'-d_1\varphi-u_1\left(a_1,t\right)\right]+c_2\left[z_0+z_2'+d_2\varphi-u_1\left(a_2,t\right)\right]+\\+c_3\left[z_0+z_3'-d_3\varphi-u_2\left(a_3,t\right)\right]+c_4\left[z_0+z_4'+d_4\varphi-u_2\left(a_4,t\right)\right]=0;\\I_\varphi\ddot{\varphi}-c_1d_1\left[z_0+z_1'-d_1\varphi-u_1\left(a_1,t\right)\right]+c_2d_2\left[z_0+z_2'+d_2\varphi-u_1\left(a_2,t\right)\right]+\\-c_3d_3\left[z_0+z_3'-d_3\varphi-u_2\left(a_3,t\right)\right]+c_4d_4\left[z_0+z_4'+d_4\varphi-u_2\left(a_4,t\right)\right]=0;\\\rho F\dfrac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+EI\dfrac{\partial^4u_1}{\partial x^4}=c_1\left[z_0+z_1'-d_1\varphi-u_1\left(x,t\right)\right]\delta\left(x-a_1\right)+\\+c_2\left[z_0+z_2'+d_2\varphi-u_1\left(x,t\right)\right]\delta\left(x-a_2\right)\\\rho F\dfrac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+EI\dfrac{\partial^4u_2}{\partial x^4}=c_3\left[z_0+z_3'-d_3\varphi-u_2\left(x,t\right)\right]\delta\left(x-a_3\right)+\\+c_4\left[z_0+z_4'+d_4\varphi-u_2\left(x,t\right)\right]\delta\left(x-a_4\right).\end{cases}\tag{7}$$

Систему (7) приведем к следующему виду

$$\begin{cases} \ddot{z}_0 + p_1^2\left(z_0 + z_1' - d_1\varphi - u_1\left(a_1,t\right)\right) + p_2^2\left(z_0 + z_2' + d_2\varphi - u_1\left(a_2,t\right)\right) + \\ + p_3^2\left(z_0 + z_3' - d_3\varphi - u_2\left(a_3,t\right)\right) + p_4^2\left(z_0 + z_4' + d_4\varphi - u_2\left(a_4,t\right)\right) = 0, \\ \ddot{\varphi} - q_1^2\left(z_0 + z_1' - d_1\varphi - u_1\left(a_1,t\right)\right) + q_2^2\left(z_0 + z_2' + d_2\varphi - u_1\left(a_2,t\right)\right) - \\ - q_3^2\left(z_0 + z_3' - d_3\varphi - u_2\left(a_3,t\right)\right) + q_4^2\left(z_0 + z_4' + d_4\varphi - u_2\left(a_4,t\right)\right) = 0, \\ \dfrac{d^2u_1}{dt^2} + b\dfrac{d^4u_1}{dt^4} = e_1\left(z_0 + z_1' - d_1\varphi - u_1\left(a_1,t\right)\right)\delta\left(x - a_1\right) + \\ + e_2\left(z_0 + z_2' + d_2\varphi - u_1\left(a_2,t\right)\right)\delta\left(x - a_2\right) \\ \dfrac{d^2u_2}{dt^2} + b\dfrac{d^4u_2}{dt^4} = e_3\left(z_0 + z_3' - d_3\varphi - u_2\left(a_3,t\right)\right)\delta\left(x - a_3\right) + \\ + e_4\left(z_0 + z_4' + d_4\varphi - u_2\left(a_4,t\right)\right)\delta\left(x - a_4\right), \end{cases} \tag{8}$$

где $p_i = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, $q_i = \sqrt{\dfrac{c_i d_i}{I_\varphi}}, b = \dfrac{EJ}{\rho F}$, $e_i = \dfrac{c_i}{\rho F}$, i=1,..4.

На $u_1\left(x,t\right), u_2\left(x,t\right)$, наложены граничные условия:

$$\begin{aligned} &u_1\left(0,t\right) = u_1\left(l,t\right) = 0, \quad u_2\left(0,t\right) = u_2\left(l,t\right) = 0, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x}\left(0,t\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x}\left(l,t\right) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}\left(0,t\right) = \frac{\partial u_2}{\partial x}\left(l,t\right) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

3 Дифференциально-алгебраическая система дифференциальных уравнений

Подставим в (8) z_0, φ, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ в следующем виде:

$$z_0 = A\sin(\omega t), \qquad \varphi = A_\varphi \sin(\omega t),$$

$$u_1\left(x,t\right) = V_1\left(x\right)\sin\left(\omega t\right), \qquad u_2\left(x,t\right) = V_2\left(x\right)\sin\left(\omega t\right),$$

и из системы (8) получим дифференциально-алгебраическую систему уравнений.

$$\begin{cases} -\omega^2 A + p_1^2(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(a_1)) + p_2^2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(a_2)) + \\ + p_3^2(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(a_3)) + p_4^2(A + z_1' + d_4 A_\varphi - V_2(a_4)) = 0, \\ -\omega^2 A_\varphi - q_1^2(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(a_1)) + q_2^2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(a_2)) - \\ -q_3^2(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(a_3)) + q_4^2(A + z_4' + d_4 A_\varphi - V_2(a_4)) = 0, \\ -\omega^2 V_1(x) + b\dfrac{d^4 V_1(x)}{dx^4} = e_1(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(x))\delta(x - a_1) + \\ +e_2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(x))\delta(x - a_2) \\ -\omega^2 V_2(x) + b\dfrac{d^4 V_2(x)}{dx^4} = e_3(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(x))\delta(x - a_3) + \\ +e_4(A + z_4' + d_4 A_\varphi - V_2(x))\delta(x - a_4). \end{cases} \tag{10}$$

В силу того, что соотношения три и четыре из (10) понимаются в обобщенном смысле, то для произвольной основной функции $\varphi(x,t)$ будут справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered} \int_0^l (-\omega^2 V_1(x) + b\frac{d^4 V_1(x)}{dx^4})\varphi(x,t)\,dx = \\ = e_1(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(a_1))\varphi(a_1,t) + e_2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(a_2))\varphi(a_2,t), \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \int_0^l (-\omega^2 V_2(x) + b\frac{d^4 V_2(x)}{dx^4})\varphi(x,t)\,dx = \\ = e_3(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(a_3))\varphi(a_3,t) + e_4(A + z_4' + d_4 A_\varphi - V_2(a_4))\varphi(a_4,t). \end{gathered} \tag{12}$$

А полученные условия для функций $V_1(x), V_2(x)$ из граничных условий (10) будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} V_1(0) = V_1(l) = 0, \qquad V_2(0) = V_2(l) = 0, \\ \frac{dV_1}{dx}(0) = \frac{dV_1}{dx}(l) = 0, \qquad \frac{dV_2}{dx}(0) = \frac{dV_2}{dx}(l) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Теорема 1. Пусть $G_1(x), G_2(x), G_3(x), G_4(x)$ — обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 G_i(x) + b\frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad i = 1,..4\,. \tag{14}$$

Тогда для любых ω, A, A_φ решения системы

$$\begin{gathered} -\omega^2 V_1(x) + b\frac{d^4 V_1(x)}{dx^4} = e_1\left(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(x)\right)\cdot\delta(x - a_1) + \\ +e_2\left(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(x)\right)\cdot\delta(x - a_2) \end{gathered}$$

(15)

$$-\omega^2 V_2\left(x\right)+b\frac{d^4V_2\left(x\right)}{dx^4}=e_3\left(A+z_3'-d_3A_\varphi-V_2\left(x\right)\right)\cdot\delta\left(x-a_3\right)+$$
$$+e_4\left(A+z_4'+d_4A_\varphi-V_2\left(x\right)\right)\cdot\delta\left(x-a_4\right)$$

будут иметь вид

$$\begin{gathered}V_1\left(x\right)=G_1\left(x-a_1\right)\cdot e_1(A+z_1'-d_1A_\varphi-V_1(a_1))+\\+G_2\left(x-a_2\right)\cdot e_2(A+z_2'+d_2A_\varphi-V_1(a_2))\\V_2\left(x\right)=G_3\left(x-a_3\right)\cdot e_3(A+z_3'-d_3A_\varphi-V_2(a_3))+\\+G_4\left(x-a_4\right)\cdot e_4(A+z_4'+d_4A_\varphi-V_2(a_4))\end{gathered}\tag{16}$$

и удовлетворять следующим краевым условиям

$$G_i\left(-a_i\right)=G_i\left(l-a_i\right)=0,\ \ \frac{dG_i}{dx}\left(-a_i\right)=\frac{dG_i}{dx}\left(l-a_i\right)=0.\tag{17}$$

Доказательство.

Запишем уравнение один из системы (16) в следующем виде:

$$\begin{gathered}V_1\left(x\right)=\int_0^\ell G_1\left(x-\xi\right)e_1\left(A+z_1'-d_1A_\varphi-V_1\left(\xi\right)\right)\delta\left(\xi-a_1\right)d\xi+\\+\int_0^\ell G_2\left(x-\xi\right)e_2\left(A+z_2'+d_2A_\varphi-V_1\left(\xi\right)\right)\delta\left(\xi-a_2\right)d\xi.\end{gathered}\tag{18}$$

Подставим получившееся $V_1(x)$ в левую часть уравнения (11). Затем умножим на $\varphi\left(x,t\right)$ и проинтегрируем по переменной x от 0 до l с заменой порядка интегрирования. Тогда с учетом (14), мы получим:

$$\int_0^l\Big(\int_0^l[(-\omega^2G_1(x-\xi)+b\frac{d^4G_1(x-\xi)}{dx^4})*$$
$$*e_1\left(A+z_1'-d_1A_\varphi-V_1\left(\xi\right)\right)\delta\left(\xi-a_1\right)+$$
$$+(-\omega^2G_2(x-\xi)+b\frac{d^4G_2(x-\xi)}{dx^4})*$$
$$*e_2\left(A+z_2'+d_2A_\varphi-V_1\left(\xi\right)\right)\delta\left(\xi-a_2\right)]d\xi\varphi\left(x,t\right)dx=$$

$$=\int_0^l [e_1\left(A+z_1'-d_1A_\varphi-V_1(\xi)\right)\delta(\xi-a_1)*$$

$$*\left(\int_0^l (-\omega^2 G_1(x-\xi)+b\frac{d^4G_1(x-\xi)}{dx^4})\varphi(x,t)dx\right)+$$

$$+e_2\left(A+z_2'+d_2A_\varphi-V_1(\xi)\right)\delta(\xi-a_2)*$$

$$*\left(\int_0^l (-\omega^2 G_2(x-\xi)+b\frac{d^4G_2(x-\xi)}{dx^4})\varphi(x,t)dx\right)]d\xi=$$

$$=\int_0^l [e_1\left(A+z_1'-d_1A_\varphi-V_1(\xi)\right)\delta(\xi-a_1)\int_0^l \varphi(x,t)\delta(x-\xi)dx+$$

$$+e_2\left(A+z_2'+d_2A_\varphi-V_1(\xi)\right)\delta(\xi-a_2)\int_0^l \varphi(x,t)\delta(x-\xi)dx]d\xi=$$

$$=e_1\left(A+z_1'-d_1A_\varphi-V_1(a_1)\right)\varphi(a_1,t)+e_2\left(A+z_2'+d_2A_\varphi-V_1(a_2,t)\right)\varphi(a_2),$$

что соответствует правой части первого соотношения из (11). Доказательство второго соотношения из (16) для функции $V_2(x)$ получается аналогично. Что и требовалось доказать.

Заключение

В данной работе была рассмотрена возможность применения единого подхода исследования свободных колебаний, ранее предложенного при исследовании систем, состоящих из твердых тел, прикрепленных к одному стержню, применительно к малоизученным системам твердых тел, прикрепленных к двум стрежням. Для этого была построена математическая модель, которая в свою очередь так же имеет вид ГСДУ вследствие использования вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. Также была сформулирована и доказана теорема о представлении решений вспомогательной дифференциально-алгебраической системы уравнений, на основе которой в дальнейшем строится уравнение частот, аналогично [2, 4]. В дальнейшем планируется обобщение полученных ранее результатов для систем твердых тел, закрепленных на двух и более стержнях. Подобные модели широко используются в машиностроении и аэродинамике. Например, они могут найти применение в области исследования систем виброзащиты объектов.

Литература

1. Мижидон А. Д., Мижидон К. А. Собственные значения для одной системы гибридных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 911–922.

2. Мижидон А. Д. Теоретические основы исследования одного класса гибридных систем дифференциальных уравнений // Математический анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 155. С. 38–64.

3. Мижидон А. Д. Гибридные системы дифференциальных уравнений в приложении к исследованию одного класса механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов: в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 21–23.

4. Мижидон А.Д. Об одной дифференциально-алгебраической системе уравнений с сингулярными коэффициентами // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование: материалы международного симпозиума, посвященного 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения профессора О. В. Васильева / ответственный редактор В. Г. Антоник (Иркутск, 5–12 октября 2019 г.). Иркутск: Изд-во ИГУ, 2019. С. 155-159.

Статья поступила в редакцию 30.11.2022; одобрена после рецензирования 14.12.2022; принята к публикации 14.12.2022.

A HYBRID SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS DESCRIBING A RIGID BODY ATTACHED TO TWO ELASTIC RODS

Arsalan D. Mizhidon
Dr. Sci. (Engineering), Prof.,
East Siberia state university of technology and management
Russia, 670013, Republic Buryatia, Ulan-Ude, st. Klyuchevskaya, 40v(1)
miarsdu@mail.ru

Aldar K. Hamhanov
teacher,
East Siberia state university of technology and management
Russia, 670013, Republic Buryatia, Ulan-Ude, st. Klyuchevskaya, 40v(1)
msdos147@gmail.com

Abstract. In this paper, we consider the construction of a mathematical model for a mechanical system, which is a rigid body attached to two Euler-Bernoulli beams. Dynamic equations were obtained using the variational principle of Hamilton-Ostrogradsky. The mathematical model is presented in the form of a hybrid system of differential equations, for which the possibility of using a unified approach to the study of free vibrations, proposed in the study of systems of solids attached to one rod, is discussed.

Keywords: solid, Euler-Bernoulli beam, equilibrium position, hybrid system of differential equations.

For citation
Mizhidon A. D., Hamhanov A. K. A Hybrid System of Differential Equations Describing a Rigid Body Attached to Two Elastic Rods // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 4. P. 38–47.

The article was submitted 30.11.2022; approved after reviewing 14.12.2022; accepted for publication 14.12.2022.