

Научная статья

УДК 534

DOI: 10.18101/2304-5728-2022-4-48-59

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ АКУСТИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ

© **Поленов Виктор Сидорович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
старший научный сотрудник,  
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил  
Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А  
vva@mil.ru

© **Кукарских Любовь Алексеевна**

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,  
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил  
Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А  
vva@mil.ru

© **Ницак Дмитрий Анатольевич**

кандидат технических наук, старший научный сотрудник,  
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил  
Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А  
vva@mil.ru

**Аннотация.** Получены выражения для определения коэффициента затухания и скорости распространения акустической волны в пористом коллекторе по методу акустической эмиссии при гармоническом возмущении. Решение получено в предположении, что размеры пор малы по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения. Это позволяет считать, что обе среды сплошные и в каждой точке пространства будет два вектора смещения: вектор смещения упругой компоненты и вектор смещения компоненты, заполняющей поры. Построены сравнительные зависимости нормированной скорости распространения акустической волны в пористом коллекторе от частоты при положительном и отрицательном значениях коэффициента Пуассона. Результаты работы могут найти применение при выявлении информативных форм сигналов акустической эмиссии в двухкомпонентных средах.

**Ключевые слова:** коэффициент затухания, пористый коллектор, очаг эмиссии, спонтанная дисторсия, упругая дисторсия, фазовая постоянная распространения.

### Для цитирования

Поленов В. С., Кукарских Л. А., Ницак Д. А. Математическое моделирование двухкомпонентной среды при акустическом возмущении // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 4. С. 48–59.

### Введение

Теория акустической эмиссии (АЭ) находит многочисленные приложения в геофизике, сейсмологии, акустике. Метод АЭ успешно применяется для исследования электромеханических эффектов в пористых спеченных композиционных материалах. Относительная простота и наглядность метода АЭ используется при полунатурном моделировании физических процессов в радиотехнике.

В двухкомпонентных пористых средах АЭ возникает в результате быстрых структурных изменений в некоторых областях упругой среды при пластическом сдвиге, изменении атомной структуры, появлении микротрещин и т.п. Такие области в пористой двухкомпонентной принято называть очагами эмиссии.

Гармонические сигналы широко используются при практической реализации метода АЭ. Актуальность гармонического анализа сохраняется при исследовании метаматериалов с электрически управляемой диэлектрической и магнитной проницаемостями, а также композитов обладающих необычными механическими свойствами, например ауксетиков, имеющих отрицательные значения коэффициента Пуассона.

Построению математической модели двухкомпонентной среды при гармоническом акустическом возмущении посвящена данная работа.

### 1 Математическая модель АЭ в двухкомпонентной среде

Наличие очага эмиссии (ОЭ) в пористом коллекторе порождает смещения элементов среды  $U_i^{(1)}$ , которые можно разделить на упругие  $U_i^{(1)e}$  и спонтанные  $U_i^{(1)s}$  [1, 2, 3, 4, 5]

$$U_i^{(1)} = U_i^{(1)e} + U_i^{(1)s}. \quad (1)$$

Основной характеристикой структурного превращения среды в ОЭ являются спонтанные перемещения  $U_i^{(1)s}$  или тензор спонтанной дисторсии, записанный в виде  $u_{ij}^{(1)s} = U_{i,j}^{(1)s}$ , где запятая внизу означает дифференцирование по  $j$ -координате.

По повторяющимся одинаковым индексам здесь и в дальнейшем проводится суммирование от одного до трех.

Из (1) находим упругие смещения  $U_i^{(1)e} = U_i^{(1)} - U_i^{(1)s}$ . Дифференцируя это выражение, приходим к тензору упругой дисторсии

$$u_{ij}^{(1)e} = U_{i,j}^{(1)e} = \frac{1}{2} \left( U_{i,j}^{(1)} + U_{j,i}^{(1)} \right) - U_{i,j}^{(1)s}. \quad (2)$$

Для двухкомпонентной среды тензор упругой дисторсии  $u_{ij}^{(1)e}$  связан с тензором напряжений  $T_{ij}$  и силой  $N$ , действующей на вещество, заполняющее поры, обобщенным законом Гука [3, 4]

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \lambda^* u_{rr}^{(1)e} \delta_{ij} + 2\mu^* u_{ij}^{(1)e} + Q^* u_{rr}^{(2)} \delta_{ij}, \\ N &= Q^* u_{rr}^{(1)} + R^* u_{rr}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $N$  — сила, отнесенная к единице площади поперечного сечения пористой среды;  $\lambda^*$ ,  $\mu^*$  — комплексные коэффициенты Ламе; индекс 1 вверху в круглых скобках относится к упругой компоненте, 2 — к веществу, заполняющему поры;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Комплексные коэффициенты  $Q^*$ ,  $R^*$  зависят от пористости среды  $m$  ( $0 \leq m \leq 1$ ) и сжимаемости межпористого вещества  $R_0^*$ . Они определяются зависимостями

$$Q^* = (1 - m)R_0^*, \quad R^* = mR_0^*. \quad (4)$$

Выразим тензор  $T_{ij}$  среды через смещения элементов пористой среды и спонтанные упругие перемещения. Для этого подставим (2) в (3), получим

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \lambda^* U_{r,r}^{(1)} \delta_{ij} + \mu^* (U_{i,j}^{(1)} + U_{j,i}^{(1)}) + Q^* U_{r,r}^{(2)} \delta_{ij} - 2\mu^* U_{i,j}^{(1)s}, \\ N &= Q^* U_{r,r}^{(1)} + R^* U_{r,r}^{(2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

По повторяющимся индексам латинских обозначений проводится суммирование от единицы до трех, греческих — от единицы до двух.

Дифференцируем (5) по  $j$ -координате, получим

$$\begin{aligned} T_{ij,j} &= (\lambda^* + \mu^*) U_{j,ji}^{(1)} + \mu^* U_{i,jj}^{(1)} - 2\mu^* U_{i,jj}^{(1)s} + Q^* U_{j,ji}^{(2)}, \\ N_{,j} &= Q^* U_{j,ji}^{(1)} + R^* U_{j,ji}^{(2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем уравнения движения двухкомпонентной среды с учетом вязкости вещества, заполняющего поры [6, 7, 8, 9]

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (U_i^{(1)} - U_i^{(2)}) &= T_{ij,j}, \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial}{\partial t} (U_i^{(1)} - U_i^{(2)}) &= N_{,j}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$  — эффективные плотности твердой компоненты и межпористого вещества;  $\rho_{12}$  — динамический коэффициент связи компонентов пористой структуры. Постоянная  $b$  — величина, обратно пропорциональная подвижности межпористого вещества и определяемая по формуле  $b = \frac{\eta m^2}{k}$ , где  $\eta$  и  $k$  — коэффициенты вязкости и проницаемости пористого коллектора, соответственно.

С учетом (6) уравнения движения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (U_i^{(1)} - U_i^{(2)}) &= \\ = (\lambda^* + \mu^*) U_{j,ji}^{(1)} + \mu^* U_{i,jj}^{(1)} - 2\mu^* U_{i,jj}^{(1)s} + Q^* U_{j,ji}^{(2)}, & \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial}{\partial t} (U_i^{(1)} - U_i^{(2)}) &= \\ = Q^* U_{j,ji}^{(1)} + R^* U_{j,ji}^{(2)}. & \end{aligned} \quad (8)$$

После описываемая Био тематика была развита в многочисленных публикациях, в том числе и в монографиях [10, 11, 12], в которых, в частности, содержатся ссылки на библиографические обзоры, посвященные обсуждаемой проблеме.

Запишем систему (8) в безразмерной форме. Для этого уравнения (8) разделим на  $\rho H$ , где

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}, \\ H &= \lambda_1 + 2\mu_1 + R_1 + 2Q_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\lambda_1, \mu_1, R_1, Q_1$  — действительные части комплексных чисел  $\lambda^*, \mu^*, R^*, Q^*$ .

С учетом условий (9), систему (8) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \left[ \gamma_{11} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \gamma_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{b}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (U_i^{(1)} - U_i^{(2)}) \right] &= \\ = \frac{1}{\rho} \left[ (\sigma_{111}^* + \sigma_{112}^*) U_{j,ji}^{(1)} + \sigma_{112}^* U_{i,jj}^{(1)} - 2\sigma_{112}^* U_{i,jj}^{(1)s} + \sigma_{12}^* U_{j,ji}^{(2)} \right], & \\ \frac{1}{H} \left[ \gamma_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \gamma_{22} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{b}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (U_i^{(1)} - U_i^{(2)}) \right] &= \\ = \frac{1}{\rho} \left[ \sigma_{12}^* U_{j,ji}^{(1)} + \sigma_{22}^* U_{j,ji}^{(2)} \right]. & \end{aligned} \quad (10)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{\rho_{ij}}{\rho}, \quad (i, j = 1, 2), \\ \sigma_{111}^* &= \frac{\lambda^*}{H}, \quad \sigma_{112}^* = \frac{\mu^*}{H}, \quad \sigma_{11}^* = \sigma_{111}^* + 2\sigma_{112}^* = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{H}, \\ \sigma_{12}^* &= \frac{(1-m)R_0^*}{H} = (1-m)\sigma^*, \quad \sigma^* = \frac{R_0^*}{H}, \quad \sigma_{22}^* = m\sigma^*. \end{aligned} \quad (11)$$

Параметры пористой среды должны удовлетворять условию нормировки

$$x_{11} + 2x_{12} + x_{22} = \gamma_{11} + 2\gamma_{12} + \gamma_{22} = 1, \quad (12)$$

где  $x_{ij}$  — действительная часть комплексного числа  $\sigma_{ij}^*$ .

Умножим оба уравнения (10) на  $H$ , получим

$$\begin{aligned} & \gamma_{11} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \gamma_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{b}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left( U_i^{(1)} - U_i^{(2)} \right) = \\ & = \frac{H}{\rho} \left[ (\sigma_{111}^* + \sigma_{112}^*) U_{j,ji}^{(1)} + \sigma_{112}^* U_{i,jj}^{(1)} - 2\sigma_{112}^* U_{i,jj}^{(1)s} + \sigma_{12}^* U_{j,ji}^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \gamma_{22} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{b}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left( U_i^{(1)} - U_i^{(2)} \right) = \\ & = \frac{H}{\rho} \left[ \sigma_{12}^* U_{j,ji}^{(1)} + \sigma_{22}^* U_{j,ji}^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Решение системы (13) будем искать в виде акустических волн [13]

$$\begin{aligned} U_i^{(n)p} &= C_i^{(n)} \exp \iota \left( \Theta_p^* x_i v_i - \omega t \right), \\ U_i^{(n)s} &= C_i^{(n)} \exp \iota \left( \Theta_s^* x_i v_i - \omega t \right), \\ n &= 1, 2, \quad \iota = \sqrt{-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $C_i^{(n)}$  — амплитуда колебаний;  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота ( $f$  — циклическая частота);  $v_i$  — координаты единичного вектора в направлении распространения акустической волны в среде;  $\Theta_p^*$ ,  $\Theta_s^*$  — комплексные коэффициенты, учитывающие затухание и фазовую составляющую при распространении акустических волн в пористом коллекторе.

Подставим (14) в (13), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} & -\frac{H}{\rho} \left[ (\sigma_{111}^* + \sigma_{112}^*) \Theta_p^{*2} C_j^{(1)} v_i v_j + \sigma_{112}^* \Theta_p^{*2} C_i^{(1)} + \right. \\ & \quad \left. + \sigma_{12}^* \Theta_p^{*2} C_j^{(2)} v_i v_j - 2\sigma_{112}^* q_{sp} \Theta_s^{*2} C_i^{(1)} \right] + \\ & + \left( \gamma_{11} \omega^2 + \iota \frac{b\omega}{\rho} \right) C_i^{(1)} + \left( \gamma_{12} \omega^2 - \iota \frac{b\omega}{\rho} \right) C_i^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{H}{\rho} \left( \sigma_{12}^* \Theta_p^{*2} C_j^{(1)} v_i v_j + \sigma_{22}^* \Theta_p^{*2} C_j^{(2)} v_i v_j \right) + \\ & + \left( \gamma_{12} \omega^2 - \iota \frac{b\omega}{\rho} \right) C_i^{(1)} + \left( \gamma_{22} \omega^2 + \iota \frac{b\omega}{\rho} \right) C_i^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

где  $q_{sp} = \exp \left[ -\iota \left( \Theta_p^* - \Theta_s^* \right) x_i v_i \right]$ .

## 2 Характеристики акустических волн в двухкомпонентной среде

Характеристики акустических волн определим из системы (15), если умножим оба уравнения (15) на  $v_i$  и просуммируем по повторяющемуся индексу  $i$  с учетом  $v_i v_i = 1$ . Полагаем  $C_i^{(n)} v_i = D_n \neq 0$  и совмещаем ОЭ с началом координат  $x_i = 0$ . В результате получим систему

$$\begin{aligned} & [(\gamma_{11} + \nu\gamma) \omega^2 - (\sigma_{11}^* \Theta_p^{*2} - 2\sigma_{112}^* \Theta_s^{*2}) V^2] D_1 + \\ & + [(\gamma_{12} - \nu\gamma) \omega^2 - \sigma_{12}^* \Theta_p^{*2} V^2] D_2 = 0, \\ & [(\gamma_{12} - \nu\gamma) \omega^2 - \sigma_{12}^* \Theta_p^{*2} V^2] D_1 + \\ & + [(\gamma_{22} + \nu\gamma) \omega^2 - \sigma_{22}^* \Theta_p^{*2} V^2] D_2 = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $V = \sqrt{H/\rho}$  — скорость распространения акустических волн;  $\gamma = \frac{b}{\rho\omega}$  — параметр, характеризующий диапазон частот акустических волн. Условие  $\gamma \gg 1$  соответствует случаю низких частот [9].

Для того, чтобы однородная система (16) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных  $D_n$ , был равен нулю [14]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\gamma_{11} + \nu\gamma) \omega^2 - (\sigma_{11}^* \Theta_p^{*2} - 2\sigma_{112}^* \Theta_s^{*2}) V^2, \\ a_{12} &= a_{21} = (\gamma_{12} - \nu\gamma) \omega^2 - \sigma_{12}^* \Theta_p^{*2} V^2, \\ a_{22} &= (\gamma_{22} + \nu\gamma) \omega^2 - \sigma_{22}^* \Theta_p^{*2} V^2. \end{aligned}$$

После раскрытия определителя, получим

$$\begin{aligned} & (\sigma_{\Delta}^* \Theta_p^{*4} - 2\sigma_{112}^* \sigma_{22}^* \Theta_p^{*2} \Theta_s^{*2}) V^4 + \\ & + [(-\gamma_{11} \sigma_{22}^* + 2\gamma_{12} \sigma_{12}^* - \gamma_{22} \sigma_{11}^*) \Theta_p^{*2} + 2\gamma_{22} \sigma_{112}^* \Theta_s^{*2}] \omega^2 V^2 + \gamma_{\Delta} \omega^4 - \\ & - \nu\gamma [(\sigma_{\Sigma}^* \Theta_p^{*2} - 2\sigma_{112}^* \Theta_s^{*2}) \omega^2 V^2 - \omega^4] = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\sigma_{\Sigma}^* = \sigma_{11}^* + 2\sigma_{12}^* + \sigma_{22}^*$ ,  $\sigma_{\Delta}^* = \sigma_{11}^* \sigma_{22}^* - \sigma_{12}^{*2}$ ,  $\gamma_{\Delta} = \gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2$ .

Преобразуем выражение (17) к системе двух уравнений относительно  $\Theta_p^*$  и  $\Theta_s^*$ :

$$\begin{aligned} & \sigma_{\Delta}^* \Theta_p^{*2} V^2 - (\gamma_{11} \sigma_{22}^* - 2\gamma_{12} \sigma_{12}^* + \gamma_{22} \sigma_{11}^*) \omega^2 - \\ & - \nu\gamma \sigma_{\Sigma}^* \omega^2 = 0, \\ & -2\sigma_{112}^* \Theta_s^{*2} V^2 (\sigma_{22}^* \Theta_p^{*2} V^2 - \gamma_{22} \omega^2) + \gamma_{\Delta} \omega^4 + \\ & + \nu\gamma (2\sigma_{112}^* \Theta_s^{*2} \omega^2 V^2 + \omega^4) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим  $\Theta_p^* = \beta_p + \iota\alpha_p$ , где  $\beta_p, \alpha_p$  — фазовая постоянная распространения и коэффициент затухания акустической волны в пористой среде и  $\Theta_s^* = \beta_s + \iota\alpha_s$ , где  $\beta_s, \alpha_s$  — фазовая постоянная распространения и коэффициент затухания волны спонтанных перемещений.

Из первого уравнения (18) получаем

$$\alpha_p = \frac{\omega}{V} \sqrt{\frac{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} - \xi_x}{2(c_x^2 + c_y^2)}}, \quad \beta_p = \frac{\omega}{V} \sqrt{\frac{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} + \xi_x}{2(c_x^2 + c_y^2)}}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_x &= -(c_x y_\Sigma - c_y) \gamma + a_x c_x + a_y c_y, & \xi_y &= (c_x + c_y y_\Sigma) \gamma - a_x c_y + a_y c_x, \\ a_x &= \gamma_{11} x_{22} - 2\gamma_{12} x_{12} + \gamma_{22} x_{11}, & a_y &= \gamma_{11} y_{22} - 2\gamma_{12} y_{12} + \gamma_{22} y_{11}, \\ c_x &= x_{11} x_{22} - x_{12}^2 - y_{11} y_{22} + y_{12}^2, & c_y &= x_{11} y_{22} - 2x_{12} y_{12} + x_{22} y_{11}, \\ & & y_\Sigma &= y_{11} + 2y_{12} + y_{22} \end{aligned}$$

и определяем скорость распространения акустической волны в пористой среде

$$c_p = \frac{\omega}{\beta_p} = V \sqrt{\frac{2(c_x^2 + c_y^2)}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} + \xi_x}}. \quad (20)$$

Используем для подстановки во второе уравнение (18)  $\Theta_p^{*2} = A_p + \iota B_p$ , где

$$A_p = \frac{\omega^2}{V^2} \frac{\xi_x}{c_x^2 + c_y^2}, \quad B_p = \frac{\omega^2}{V^2} \frac{\xi_y}{c_x^2 + c_y^2}, \quad (21)$$

определим коэффициент затухания и фазовую постоянную распространения волны спонтанных перемещений

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{\omega}{V} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_x^2 + d_y^2)(\gamma^2 + \gamma_\Delta^2)} - d_x \gamma_\Delta - d_y \gamma}{2(d_x^2 + d_y^2)}}, \\ \beta_s &= \frac{\omega}{V} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_x^2 + d_y^2)(\gamma^2 + \gamma_\Delta^2)} + d_x \gamma_\Delta + d_y \gamma}{2(d_x^2 + d_y^2)}}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} d_x &= -2x_{112}(\gamma_{22} - x_{22}A_p + y_{22}B_p) + 2y_{112}(\gamma - x_{22}B_p - y_{22}A_p), \\ d_y &= -2x_{112}(\gamma - x_{22}B_p - y_{22}A_p) - 2y_{112}(\gamma_{22} - x_{22}A_p + y_{22}B_p). \end{aligned}$$

Из выражения  $c_s = \frac{\omega}{\beta_s}$  получим формулу для определения скорости распространения волны спонтанной дилатации в ОЭ

$$c_s = V \sqrt{\frac{2(d_x^2 + d_y^2)}{\sqrt{(d_x^2 + d_y^2)(\gamma^2 + \gamma_\Delta^2) + d_x \gamma_\Delta + d_y \gamma}}}. \quad (23)$$

Скорость акустических волн в пористом коллекторе можно найти как сумму

$$c = c_p + c_s. \quad (24)$$

Таким образом, зная комплексные коэффициенты пористого коллектора, по формулам (19), (20), (21), (22), (23) и (24) можно определить характеристики акустических волн в пористом коллекторе и в ОЭ коллектора.

### 3 Примеры

При выполнении расчетов полагаем:  $\rho = H/V^2 = 10$ ;  $b = m^2$  при допущении  $k = \eta$ . Решаем  $(\nu - 1)q\chi = (2\nu^2 + \nu - 1)(2 - m)$  относительно  $\nu$ , находим коэффициент Пуассона

$$\nu_{1,2} = \frac{2 - q\chi - m \mp \sqrt{q\chi[q\chi + 10(m - 2)] + 9(m - 2)^2}}{4(m - 2)}, \quad (25)$$

где  $q = E/\text{Re}[R_0^*] > 1$  ( $E$  — модуль Юнга),  $\chi = \frac{2x_{12} + x_{22}}{x_{11}}$ . Коэффициент Пуассона необходим для связи  $\sigma_{112}^* = \frac{2\nu - 1}{2\nu - 2} \sigma_{11}^*$ .

Исходные данные для расчетов, определенные с учетом (4), (11), (12) и (25), сведены в таблицу 1.

Таблица 1: Исходные данные для расчета ( $\nu > 0$ )

$m$	$\nu$	$x_{11}$	$y_{11}$	$x_{112}$	$y_{112}$	$x_{12}$	$y_{12}$	$x_{22}$	$y_{22}$
0.2	0.363	0.64	0.16	0.14	0.007	0.16	0.009	0.04	0.002
0.5	0.33	0.65	0.162	0.17	0.008	0.12	0.006	0.12	0.006
0.8	0.246	0.68	0.166	0.19	0.012	0.05	0.004	0.22	0.015
$\gamma_{11} = 0.7$ ; $\gamma_{12} = -0.01$ ; $\gamma_{22} = 0.32$									

Изменение знака перед коэффициентом Пуассона соответствует наделению материала свойством ауксетика. Этим свойством обладают многие металлы, анизотропные кристаллы, полимеры. При этом пересчету подлежит только  $\sigma_{112}^*$ . Ее действительная и мнимая части представлены в таблице 2 как дополнительные исходные данные.



Таблица 2: Дополнительные исходные данные ( $\nu < 0$ )

$m$	$\nu$	$x_{112}$	$y_{112}$
0.2	-0.363	0.4052	0.1058
0.5	-0.33	0.4049	0.1073
0.8	-0.246	0.4169	0.1092

На рисунке 1 как функции от  $\gamma$  представлены зависимости  $\frac{c(\gamma-\gamma_0)}{V}$ , где  $\gamma_0 = -0.05$ . Смещением функций вдоль оси абсцисс реализован режим «логарифмического микроскопа» в области малых отрицательных значений  $\gamma$ . Сплошной линией показаны зависимости при  $\nu > 0$ , пунктирной – при  $\nu < 0$ . Для повышения наглядности нормированные функции скорости отображаются в логарифмическом масштабе.

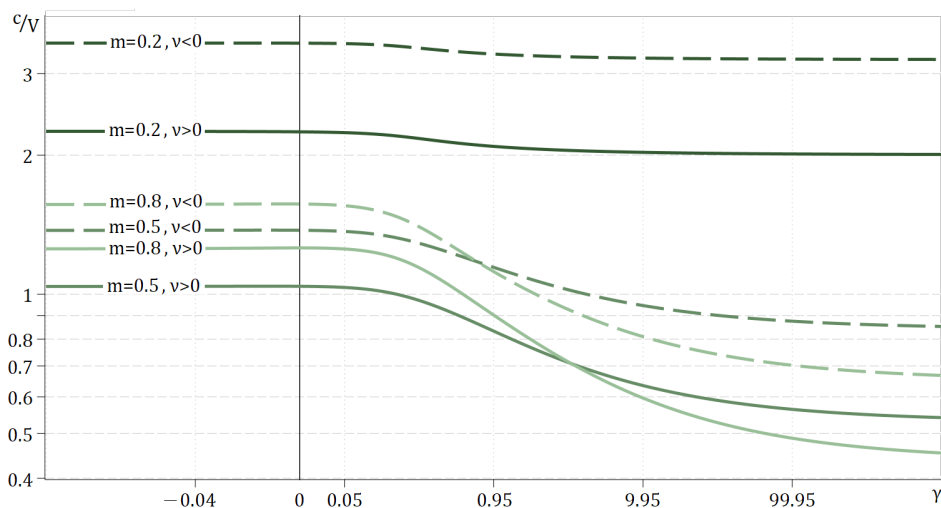


Рис. 1: Скорости распространения волн в пористом коллекторе

Как видно из графиков рисунка 1, функции скорости монотонны и проявляют характер фильтра высоких частот. Для  $\nu < 0$  нормированная скорость спонтанной дисторсии больше, чем для  $\nu > 0$ , следовательно, выше и нормированные скорости распространения волн в пористом коллекторе. При пористости  $m = 0.2$  скорости спонтанных дисторсий проявляют слабую зависимость от частоты.

### Заключение

1. Комплексные коэффициенты пористого коллектора позволяют определить характеристики акустических волн в самом коллекторе и в очаге эмиссии коллектора.

2. Пористый коллектор обладает дифференцирующими свойствами по отношению к скорости распространения внутренних волн.

3. Скорость спонтанной дисторсии в ауксетиках при прочих равных условиях выше, чем в материалах с положительным значением коэффициента Пуассона.

### Литература

1. Математическое моделирование акустической эмиссии на основе теории Марковских процессов / В. М. Баранов, А. П. Грязев [и др.] // Акустическая эмиссия материалов и конструкций. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1989. С. 132–137.
2. Бойко В. С., Нацик В. Д. Элементарные дислокационные механизмы акустической эмиссии // Элементарные процессы пластической деформации металлов. Киев, 1978. С. 159–189.
3. Нацик В. Д., Чишко К. А. Теория элементарных механизмов акустической эмиссии // Акустическая эмиссия материалов и конструкций. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1989. С. 10–18.
4. Поленов В. С., Ницак Д. А. Математическое моделирование акустической эмиссии в насыщенных жидкостью двухкомпонентных средах // Наука России: цели и задачи: сборник научных трудов по материалам XI Международной научной конференции. Екатеринбург, 2018. Ч. 2. С. 52–58.
5. Поленов В. С., Кожанов А. А. О математическом моделировании акустической эмиссии в пористых средах // Тенденции развития науки и образования: сборник научных трудов по материалам XXXI Международной научной конференции. Самара: Л-Журнал, 2017. № 31, ч. 1. С. 5–13.
6. Biot M. A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-Frequency Range. *J. Acoust. Soc. America*, 1956. Vol. 28, No. 2. P. 168–178.
7. Biot M. A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher Frequency Range. *J. Acoust. Soc. America*, 1956. Vol. 28, No. 2. P. 179–191.
8. Поленов В. С. Распространение упругих волн в насыщенной вязкой жидкостью пористой среде // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 4. С. 501–507.
9. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // Прикладная математика и механика, 1959. Т. 23, вып. 6. С. 1115–1123.
10. Mavko G. et al. *The Rock Physics Handbook*. 2nd ed., Cambridge University Press, 2009. 329 p.
11. Carcione J. M. *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic and Porous Media*. Pergamon (Handbook of Geophysical Exploration, vol. 31, Seismic Exploration), 2011. 424 p.

12. Allard J. F., Atalla N. Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials. 2nd ed. Wiley, 2009. 376 p.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Москва: Наука, 1965. 202 с.
14. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. Москва: Наука, 1984. 204 с.
15. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Москва: Наука, 1973. 832 с.

*Статья поступила в редакцию 26.11.2022; одобрена после рецензирования 16.12.2022; принята к публикации 16.12.2022.*

## TWO-COMPONENT MEDIA MATHEMATIC SIMULATION IN CASE OF A HARMONIC ACOUSTIC INFLUENCE

*Victor S. Polenov*

Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,  
Senior Researcher  
Air Force Educational and Scientific Center  
54A Starykh Bolshevikiv St., 394064, Voronezh, Russia

*Lyubov A. Kukarskikh*

Cand. Sci. (Phys. and Math.),  
Senior Researcher  
Air Force Educational and Scientific Center  
54A Starykh Bolshevikiv St., 394064, Voronezh, Russia

*Dmitry A. Nitsak*

Cand. Sci. (Engineering),  
Senior Researcher  
Air Force Educational and Scientific Center  
54A Starykh Bolshevikiv St., 394064, Voronezh, Russia

*Abstract.* Expressions for a damping factor and an acoustic wave velocity in a porous reservoir are obtained by acoustic emission method in case of the harmonic excitation. The solution is obtained assuming that the pore sizes are small in comparison with the distance at which motion and response characteristics of the movement changes significantly. This allows us to suppose that both media are continuous there will be two vector distances at each point of space that are elastic component vector distance and interporous medium one. A comparative frequency functional connection of the relative acoustic wave velocity in a porous reservoir are graphed in case of a positive and negative Poisson's constant. Results of work may be used when revealing informative signal shapes of the acoustic emission in two-component porous media.

*В. С. Поленов, Л. А. Кукарских, Д. А. Ницак. Математическое моделирование двухкомпонентной среды ...*

---

*Keywords:* damping factor, elastic distortion, emission focus, phase propagation constant, porous reservoir, spontaneous distortion.

*For citation*

*Polenov V. S., Kukarskikh L. A., Nitsak D. A. Two-Component Media Mathematic Simulation in Case of a Harmonic Acoustic Influence. Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 4. P. 48–59.*

*The article was submitted 26.11.2022; approved after reviewing 16.12.2022; accepted for publication 16.12.2022.*