Научная статья

УДК 531.01
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-2-30-41

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЕБАНИЙ КАСКАДНОЙ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА БАЛКЕ ЭЙЛЕРА — БЕРНУЛЛИ

© Баргуев Сергей Гавриилович (Ганжурович)
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал)
Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики
Россия, 670031, г. Улан-Удэ, ул. Трубачеева, 152
barguev@yandex.ru

Аннотация. В работе исследуются собственные колебания каскадной системы твердых тел, установленной на балке Эйлера — Бернулли. Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая колебания данной механической системы, выводится с использованием вариационного принципа Гамильтона. Решение этой системы понимается в обобщенном смысле. Ставится задача на собственные частоты механической системы, указывается способ получения уравнения на частоты и форм собственных колебаний. Выводится условие ортогональности и решается начально-краевая задача с выводом формул для смещений точек оси балки в зависимости от их координат и времени, а также смещений произвольного числа твердых тел, образующих каскадную систему в зависимости от времени в виде конечных рядов. При этом решение начально-краевой задачи при фиксированных физических параметрах механической системы определяется видом краевых условий на концах балки, а также выбором начальных условий.

Ключевые слова: каскадная система твердых тел, балка Эйлера — Бернулли, задача на собственные частоты, условие ортогональности, начально-краевая задача.

Благодарности
Работа выполнена в рамках государственного задания 071-03-2023-001 от 19.01.2023.

Для цитирования
Баргуев С. Г. Решение начально-краевой задачи для колебаний каскадной системы твердых тел на балке Эйлера — Бернулли // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 2. С. 30–41.

Введение

Каскадная система твердых тел представляет собой произвольное число твердых тел, скрепленных между собой и балкой упругими связями и расположенных вертикально по отношению к горизонтально расположенной балке. Твердые тела испытывают колебания в вертикальном направлении, а балка, которую считаем балкой Эйлера — Бернулли, — изгибные колебания также в этом направлении. Рассматриваемая механическая система представляет собой упруго распределенную систему в виде балки с бесконечным числом степеней свободы, динамическое поведение которой описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных относительно смещений точек оси балки, и систему с сосредоточенными параметрами в виде твердых тел с конечным числом степеней свободы, динамическое поведение которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно линейных смещений твердых тел. Совокупность линейных дифференциальных уравнений в частных производных и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, называемая гибридной, выведена с использованием вариационного принципа Гамильтона [1]. При этом точечное взаимодействие балки с прикрепленной системой твердых тел учитывается дельта-функцией Дирака. Этот факт предусматривает применение понятия обобщенного решения гибридной системы дифференциальных уравнений [2, 3, 4, 5], а также применение аппарата обобщенных функций [6, 7]. Под начально-краевой задачей понимается нахождение обобщенного решения гибридной системы дифференциальных уравнений с учетом начальных и краевых условий. Решение начально-краевой задачи в данной работе опирается на результаты исследований соответствующей краевой задачи на собственные частоты и формы колебаний [8]. Отметим, что данная математическая модель в первом приближении может моделировать колебания многоэтажных зданий и сооружений, установленных на основании, которое является в той или иной степени упругим.

Целью настоящей работы является постановка задачи на собственные частоты, вывод условия ортогональности для собственных колебаний и решение начально-краевой задачи. Следует отметить, что при решении начально-краевой задачи существенно используются собственные частоты и соответствующие им формы колебаний.

1 Задача на собственные значения

Рассмотрим гибридную систему дифференциальных уравнений движения изгибных колебаний балки длины l с каскадно закрепленной системой твердых тел [1] (рис. 1).

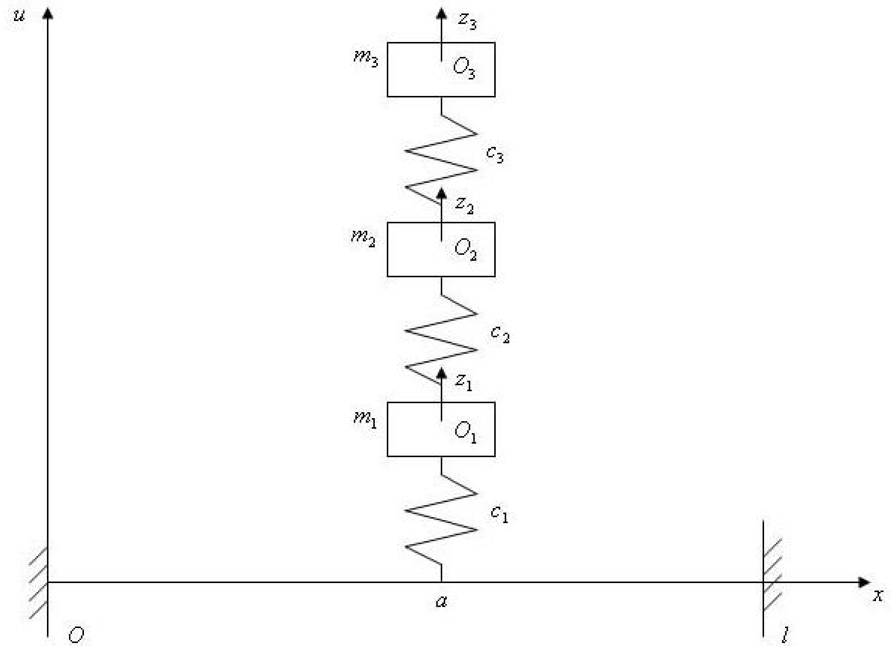

Рис.1. Пример каскадной системы с тремя твердыми телами ($n=3$)

$$\begin{cases} m_1\ddot{z}_1 + c_1\left(z_1 - u(a,t)\right) - c_2\left(z_2 - z_1\right) = 0, \\ m_i\ddot{z}_i + c_i\left(z_i - z_{i-1}\right) - c_{i+1}\left(z_{i+1} - z_i\right) = 0, \quad (i = 2,\dots,n-1), \\ \dots \\ m_n\ddot{z}_n + c_n\left(z_n - z_{n-1}\right) = 0, \\ \rho F\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1\left(z_1 - u(x,t)\right)\delta\left(x-a\right) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $z_i = z_i(t)$ — смещение i-го твердого тела, $u = u(x,t)$ — поперечные смещения точек оси балки, x — координата точек оси балки, t — время, m_i — масса i-го твердого тела, c_i — коэффициент жесткости i-й пружины, ρ — плотность стержня, F — площадь поперечного сечения балки, E — модуль упругости балки, J — момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси, перпендикулярной плоскости колебаний, a — координата точки закрепления твердого тела, $\delta(x-a)$ — функция Дирака.

Запишем приближенное решение (1) в виде конечных рядов:

$$z_i(t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) A_k^i, \; i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) V_k(x)\,, \tag{3}$$

где $\varphi_k(t)$ — скалярная функция, зависящая от переменной t, A_k^i — амплитуда i-го тела в k-й гармонике, $V_k(x)$ — амплитуда точки оси балки с координатой x в k-й гармонике.

Подставим (2) и (3) в уравнение (1).

В результате получим

$$\begin{cases} \sum_1^m \varphi_k''(t) m_1 A_k^1 + \varphi_k(t)\left[c_1\left(A_k^1 - V_k(a)\right) - c_2\left(A_k^2 - A_k^1\right)\right] = 0, \\ \sum_1^m \varphi_k''(t) m_i A_k^i + \varphi_k(t)\left[c_i\left(A_k^i - A_k^{i-1}\right) - c_{i+1}\left(A_k^{i+1} - A_k^i\right)\right] = 0, \\ \ldots \\ \sum_1^m \varphi_k''(t) m_n A_k^n + \varphi_k(t)\left[c_n\left(A_k^n - A_k^{n-1}\right)\right] = 0, \\ \sum_1^m \varphi_k''(t) V_k(x) + b\varphi_k(t) V_{kxxxx}(x) = \sum_1^m \varphi_k(t) e_1\left(A_k^1 - V_k(x)\right)\delta(x-a). \end{cases}$$

Отсюда для каждой k-й гармоники получим уравнения:

$$\begin{gathered} \varphi_k''(t) m_1 A_k^1 + \varphi_k(t)\left[c_1\left(A_k^1 - V_k(a)\right) - c_2\left(A_k^2 - A_k^1\right)\right] = 0, \\ \varphi_k''(t) m_i A_k^i + \varphi_k(t)\left[c_i\left(A_k^i - A_k^{i-1}\right) - c_{i+1}\left(A_k^{i+1} - A_k^i\right)\right] = 0, \\ \ldots \\ \varphi_k''(t) m_n A_k^n + \varphi_k(t)\left[c_n\left(A_k^n - A_k^{n-1}\right)\right] = 0, \\ \varphi_k''(t) V_k(x) + b\varphi_k(t) V_{kxxxxx}(x) = \varphi_k(t) e_1\left(A_k^1 - V_k(x)\right)\delta(x-a). \end{gathered} \tag{4}$$

Положим

$$\varphi_k''(t) = -\omega_k^2 \varphi_k(t)\,. \tag{5}$$

Подставив в (4) и сократив на $\varphi_k(t)$, получим задачу на собственные частоты ω_k^2:

$$
\begin{aligned}
&-\omega_k^2 m_1 A_k^1 + \left[c_1\left(A_k^1 - V_k(a)\right) - c_2\left(A_k^2 - A_k^1\right)\right] = 0,\\
&-\omega_k^2 m_i A_k^i + \left[c_i\left(A_k^i - A_k^{i-1}\right) - c_{i+1}\left(A_k^{i+1} - A_k^i\right)\right] = 0,\\
&\ldots \\
&-\omega_k^2 m_n A_k^n + \left[c_n\left(A_k^n - A_k^{n-1}\right)\right] = 0,\\
&-\omega_k^2 V_k(x) + bV_{kxxxx}(x) = e_1\left(A_k^1 - V_k(x)\right)\delta(x-a).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Отметим, что

$$V_k(x) = \frac{e_1\overline{V}_k(x-a)}{1+e_1\overline{V}_k(0)} A_k^1, \tag{7}$$

где $\overline{V}_k(x)$ — решение краевой задачи [8]:

$$-\omega_k^2\overline{V}_k(x) + b\frac{d^4\overline{V}_k(x)}{dx^4} = \delta(x)$$

с краевыми условиями на концах балки, например, для шарнирного опирания:

$$\overline{V}_k(-a) = 0, \overline{V}_k''(-a) = 0, \overline{V}_k(l-a) = 0, \overline{V}_k''(l-a) = 0\,.$$

Подстановка $V_k(a)$ в первые n уравнений в (6) приводит к линейной однородной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд $A_k^1, A_k^2, \ldots, A_k^n$. Приравнивая нулю определитель из коэффициентов при этих амплитудах, получаем частотное уравнение относительно ω_k.

Рассматривая систему из первых $n - 1$ уравнений в (6), выражаем, например, $A_k^2, \ldots, A_k^n$ через A_k^1:

$$A_k^i = A_k^1 g_{ik}, i = 2, 3, \ldots, n\,,$$

где множитель g_{ik} зависит только от частоты ω_k и параметров механической системы.

2 Условие ортогональности

Умножим последнее уравнение в (6) на $V_j(x)$ и проинтегрируем по l

В результате получим

$$-\omega_k^2(V_k, V_j) + b(V_{kxxxx}, V_j) = e_1\left(A_k^1 - V_k(a)\right)V_j(a),$$

где в скобках указано скалярное произведение в виде интеграла по l.

Можно показать, что в силу закона сохранения полной энергии рассматриваемой механической системы выполняется соотношение:

$$(V_{kxxxx}, V_j) = (V_{kxx}, V_{jxx}) .$$

Тогда преобразованное последнее уравнение в (6) примет вид:

$$-\omega_k^2 (V_k, V_j) + b(V_{kxx}, V_{jxx}) = e_1 \left(A_k^1 - V_k(a) \right) V_j(a) . \tag{8}$$

Запишем (8) для другого порядка индексов:

$$-\omega_j^2 (V_j, V_k) + b(V_{jxx}, V_{kxx}) = e_1 \left(A_j^1 - V_j(a) \right) V_k(a) . \tag{9}$$

Умножим (8) на (-1) и прибавим к (9):

$$(\omega_k^2 - \omega_j^2)(V_k, V_j) = e_1 \left(A_j^1 V_k(a) - A_k^1 V_j(a) \right) . \tag{10}$$

Умножая первое уравнение в (6) на A_j^1, второе на A_j^2 и т. д., предпоследнее на A_j^n, получим систему:

$$\begin{aligned}
&-\omega_k^2 m_1 A_k^1 A_j^1 + \left[c_1 \left(A_k^1 - V_k(a) \right) A_j^1 - c_2 \left(A_k^2 - A_k^1 \right) A_j^1 \right] = 0, \\
&-\omega_k^2 m_i A_k^i A_j^i + \left[c_i \left(A_k^i - A_k^{i-1} \right) A_j^i - c_{i+1} \left(A_k^{i+1} - A_k^i \right) A_j^i \right] = 0, \\
&\ldots \\
&-\omega_k^2 m_n A_k^n A_j^n + \left[c_n \left(A_k^n - A_k^{n-1} \right) A_j^n \right] = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Далее для каждого уравнения составляем пары уравнений, из которых второе записывается для индексов в другом порядке, а затем в каждой паре первое умножаем на (-1) и складываем со вторым.

В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&(\omega_k^2 - \omega_j^2) m_1 A_k^1 A_j^1 + c_1 \left(V_k(a) A_j^1 - V_j(a) A_k^1 \right) + \\
&+ c_2 \left(A_k^2 A_j^1 - A_j^2 A_k^1 \right) = 0, \\
&(\omega_k^2 - \omega_j^2) A_k^2 A_j^2 + c_2 (A_k^1 A_j^2 - A_j^1 A_k^2) + \\
&+ c_3 (A_k^3 A_j^2 - A_j^3 A_k^2) = 0, \\
&(\omega_k^2 - \omega_j^2) A_k^3 A_j^3 + c_3 (A_k^2 A_j^3 - A_j^2 A_k^3) + \\
&+ c_4 (A_k^4 A_j^3 - A_j^4 A_k^3) = 0,
\end{aligned}$$

………………………………………..

$$(\omega_k^2-\omega_j^2)A_k^{n-2}A_j^{n-2}+c_{n-2}(A_k^{n-3}A_j^{n-2}-A_j^{n-3}A_k^{n-2})+$$
$$+c_{n-1}(A_k^{n-1}A_j^{n-2}-A_j^{n-1}A_k^{n-2})=0,$$
$$(\omega_k^2-\omega_j^2)A_k^{n-1}A_j^{n-1}+c_{n-1}(A_k^{n-2}A_j^{n-1}-A_j^{n-2}A_k^{n-1})+$$
$$+c_n(A_k^{n}A_j^{n-1}-A_j^{n}A_k^{n-1})=0,$$
$$(\omega_k^2-\omega_j^2)A_k^{n}A_j^{n}+c_n(A_k^{n-1}A_j^{n}-A_j^{n-1}A_k^{n})=0.$$

Складывая последовательно в полученной системе каждое уравнение с последующим начиная снизу и в последнюю очередь с первым, с учетом (10) получим:

$$(\omega_k^2-\omega_j^2)(m_1A_k^1A_j^1+m_2A_k^2A_j^2+\ldots+m_nA_k^nA_j^n+\rho F(V_k,V_j))=0\,.$$

Отсюда при $k\neq j$ получим условие ортогональности:

$$m_1A_k^1A_j^1+m_2A_k^2A_j^2+\ldots+m_nA_k^nA_j^n+\rho F(V_k,V_j)=0\,. \tag{12}$$

3 Решение начально-краевой задачи

Решение гибридной системы дифференциальных уравнений (1) будем искать в виде:

$$z_i(t)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)A_k^i,\, i=1,2,\ldots,n\,, \tag{13}$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)V_k(x)\,. \tag{14}$$

Начальные условия:

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(0)A_k^i=z_{i0},\, i=1,2,\ldots,n\,, \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(0)V_k(x)=\varphi(x)\,, \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi'_k(0)A_k^i=z'_{i0},\, i=1,2,\ldots,n\,, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi'_k(0)V_k(x)=\psi(x)\,. \tag{18}$$

Запишем уравнение (5) в виде:

$$\varphi''_k(t)+\omega_k^2\varphi_k(t)=0\,, \tag{19}$$

которое имеет решение

$$\varphi_k(t) = \frac{\varphi'_{k0}}{\omega_k}\sin\omega_k t + \varphi_{k0}\cos\omega_k t, \tag{20}$$

где $\varphi_{k0} = \varphi_k(0), \varphi'_{k0} = \varphi'_k(0)$.

Найдем $\varphi_{k0}, \varphi'_{k0}$, используя (15) и (16):

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(0) A_k^i = z_{i0}, i = 1,2,...,n,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(0) V_k(x) = \varphi(x).$$

Умножим (15) на $m_i A_j^i$ и просуммируем по i:

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(0) \sum_{i=1}^{n} m_i A_k^i A_j^i = \sum_{i=1}^{n} m_i z_{i0} A_j^i, j = 1,2,...,m. \tag{21}$$

Умножим (16) на $\rho F V_j(x)$ и проинтегрируем по x:

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(0) \rho F(V_k, V_j) = \rho F(\varphi, V_j), \tag{22}$$

где

$$(V_k, V_j) = \int_0^l V_k(x) V_j(x) dx, (\varphi, V_j) = \int_0^l \varphi(x) V_j(x) dx.$$

Сложив (21) и (22), получим:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(0)(\rho F(V_k, V_j) + \sum_{i=1}^{n} m_i A_k^i A_j^i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i z_{i0} A_j^i + \rho F(\varphi, V_j), j = 1,2,...,m. \end{aligned} \tag{23}$$

В силу условия ортогональности

$$m_1 A_k^1 A_j^1 + m_2 A_k^2 A_j^2 + ... + m_n A_k^n A_j^n + \rho F(V_k, V_j) = 0.$$

В левой части (23) останется одно слагаемое при $k = j$, то есть

$$\varphi_j(0)(\rho F(V_j, V_j) + \sum_{i=1}^{n} m_i A_j^i A_j^i) = \sum_{i=1}^{n} m_i z_{i0} A_j^i + \rho F(\varphi, V_j), \tag{24}$$

$j = 1,2,...,m.$

Отсюда

$$\varphi_j(0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_{i0} A_j^i + \rho F \int_0^l \varphi(x) V_j(x) dx}{\rho F \int_0^l V_j^2(x) dx + \sum_{i=1}^{n} m_i (A_j^i)^2}, \; j = 1, 2, ..., m. \tag{25}$$

Аналогично из (17) и (18) получим:

$$\varphi'_j(0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z'_{i0} A_j^i + \rho F \int_0^l \psi(x) V_j(x) dx}{\rho F \int_0^l V_j^2(x) dx + \sum_{i=1}^{n} m_i (A_j^i)^2}, \; j = 1, 2, ..., m. \tag{26}$$

Имея в виду, что

$$V_j(x) = \alpha_j(x) A_j^1, \text{ и } A_j^i = A_j^1 g_{ij},$$

где $\alpha_j(x) = \dfrac{e_1 \overline{V_j}(x-a)}{1 + e_1 \overline{V_j}(0)}$,

получим

$$\varphi_j(0) = \frac{1}{A_j^1} \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_{i0} g_{ij} + \rho F \int_0^l \varphi(x) \alpha_j(x) dx}{\rho F \int_0^l \alpha_j^2(x) dx + \sum_{i=1}^{n} m_i (g_{ij})^2}, \; j = 1, 2, ..., m. \tag{27}$$

$$\varphi'_j(0) = \frac{1}{A_j^1} \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z'_{i0} g_{ij} + \rho F \int_0^l \psi(x) \alpha_j(x) dx}{\rho F \int_0^l \alpha_j^2(x) dx + \sum_{i=1}^{n} m_i (g_{ij})^2}, \; j = 1, 2, ..., m. \tag{28}$$

Подставив (27) и (28) в (20), получим:

$$\varphi_k(t)=\frac{1}{\omega_k A_k^1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z'_{i0} g_{ik}+\rho F\int\limits_0^l \psi(x)\alpha_k(x)dx}{\rho F\int\limits_0^l \alpha_k^2(x)dx+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (g_{ik})^2}\sin\omega_k t+$$
$$+\frac{1}{A_k^1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_{i0} g_{ik}+\rho F\int\limits_0^l \varphi(x)\alpha_k(x)dx}{\rho F\int\limits_0^l \alpha_k^2(x)dx+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (g_{ik})^2}\cos\omega_k t. \quad (29)$$

Подставив (29) в выражения (13) и (14), получим решение начально-краевой задачи в виде:

$$z_i(t)=\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{g_{ik}}{\omega_k}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z'_{i0} g_{ik}+\rho F\int\limits_0^l \psi(x)\alpha_k(x)dx}{\rho F\int\limits_0^l \alpha_k^2(x)dx+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (g_{ik})^2}\sin\omega_k t+$$
$$+g_{ik}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_{i0} g_{ik}+\rho F\int\limits_0^l \varphi(x)\alpha_k(x)dx}{\rho F\int\limits_0^l \alpha_k^2(x)dx+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (g_{ik})^2}\cos\omega_k t\Big),$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{\alpha_k(x)}{\omega_k}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z'_{i0} g_{ik}+\rho F\int\limits_0^l \psi(x)\alpha_k(x)dx}{\rho F\int\limits_0^l \alpha_k^2(x)dx+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (g_{ik})^2}\sin\omega_k t+$$
$$+\alpha_k(x)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_{i0} g_{ik}+\rho F\int\limits_0^l \varphi(x)\alpha_k(x)dx}{\rho F\int\limits_0^l \alpha_k^2(x)dx+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (g_{ik})^2}\cos\omega_k t\Big).$$

Заключение

В работе поставлена задача на собственные частоты для рассматриваемой механической системы, указан способ получения уравнения на частоты и форм собственных колебаний. Впервые выведено условие ортогональности и решена начально-краевая задача, то есть выведены явные формулы для смещений точек оси балки в зависимости от их координат и времени, а также смещений произвольного числа твердых тел, образующих каскадную систему в зависимости от времени в виде конечных рядов. При фиксированных физических параметрах механической системы, решение начально-краевой задачи будет зависеть от краевых условий на концах балки, а также задаваемых начальных условий. В дальнейшем планируется создание программного комплекса для численного определения частот и форм собственных колебаний, а также на основе этого, решение начально-краевой задачи.

Планируется доказательство единственности обобщенного решения поставленной начально-краевой задачи и на основе выведенного условия ортогональности путем введения гильбертовых пространств доказательство сходимости обобщенного решения.

Литература

1. Мижидон А. Д., Баргуев С. Г. Краевая задача для одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. 2013. Вып. 9. С. 130–137. Текст: непосредственный.

2. Мижидон А. Д., Ошоров Б. Б., Баргуев С. Г. Обобщенное решение одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Кубатурные формулы и дифференциальные уравнения: материалы международной конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ. 2009. С. 251–258. Текст: непосредственный.

3. Киричек В. А., Пулькина Л. С. Задача с динамическими граничными условиями для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная сер. 2017. Вып. 1. С. 21–27. Текст: непосредственный.

4. Бейлин А. Б., Пулькина Л. С. Задача с динамическим краевым условием для одномерного гиперболического уравнения // Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. № 3. С. 407–423. Текст: непосредственный.

5. Пулькина Л. С., Киричек В. А. Разрешимость нелокальной задачи для гиперболического уравнения с вырождающимися интегральными условиями // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. № 2. С. 229–245. Текст: непосредственный.

6. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. Москва: Наука, 1979. 280 с. Текст: непосредственный.

7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Москва: Физматгиз, 1959. 470 с. Текст: непосредственный.

8. Мижидон А. Д., Баргуев С. Г. О собственных колебаниях механической системы каскадного типа на упругом стержне // Вестник ВСГТУ. 2010. № 1. С. 26–33. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 08.06.2023; одобрена после рецензирования 23.06.2023; принята к публикации 26.06.2023.

SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR OSCILLATIONS OF THE CASCADE RIGID BODY SYSTEMS ON AN EULER-BERNOULLI BEAM

Sergey G. Barguev
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Buryat Institute of Infocommunications and Informatics (branch)
Siberian State University of Telecommunications and Informatics,
Russia, 670031, Ulan-Ude, st. Trubacheev, 152
barguev@yandex.ru

Abstract. The paper investigates the natural vibrations of a cascade system of solids mounted on an Euler-Bernoulli beam. A hybrid system of differential equations describing the vibrations of a given mechanical system is derived using Hamilton's variational principle. The solution of this system is understood in a generalized sense. The problem is set for the natural frequencies of the mechanical system, the method for obtaining the equation for the frequencies and forms of natural vibrations is indicated. The orthogonality condition is derived and the initial-boundary value problem is solved with the derivation of formulas for the displacements of the points of the beam axis depending on their coordinates and time, as well as the displacements of an arbitrary number of solid bodies that form a cascade system depending on time in the form of finite series. In this case, the solution of the initial-boundary value problem for fixed physical parameters of the mechanical system is determined by the type of boundary conditions at the ends of the beam, as well as by the choice of initial conditions.

Keywords: cascade system of rigid bodies, Euler-Bernoulli beam, eigenfrequency problem, orthogonality condition, initial-boundary value proble

For citation
Barguev S. G. Solution of the Initial-Boundary Value Problem for Oscillations of the Cascade Rigid Body Systems on an Euler-Bernoulli Beam // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 2. P. 30–41.

The article was submitted 08.06.2023; approved after reviewing 23.06.2023; accepted for publication 26.06.2023.