# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья

УДК 517.925
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-4-3-13

## О ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

**© Ройтенберг Владимир Шлеймович**
кандидат физико-математических наук, доцент,
Ярославский государственный технический университет
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский пр., 88
vroitenberg@mail.ru

**Аннотация**. В работе рассматриваются динамические системы на плоскости, задаваемые автономными дифференциальными уравнениями второго порядка, с правыми частями, зависящими от одного и двух параметров, разрывными на «линии нулевой скорости» $y = 0$ и гладкие вне нее. При нулевых значениях параметров предполагается, что начало координат является устойчивым положением равновесия, «сшитым» из фокусов гладких динамических систем, заданных в верхней и нижней полуплоскостях. Описаны бифуркационные диаграммы для типичных однопараметрических и двухпараметрических семейств таких систем. В частности, показано, что в однопараметрическом семействе из положения равновесия может родиться единственный (устойчивый) предельный цикл, а в двухпараметрическом семействе из положения равновесия — от одного до двух предельных циклов.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение второго порядка, фазовая плоскость, кусочно-гладкая динамическая система, положение равновесия, бифуркационная диаграмма, предельный цикл.

**Для цитирования**
*Ройтенберг В. Ш.* О локальных бифуркациях дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-гладкой правой частью // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 4. С. 3–13.

### Введение

Бифуркации положений равновесия в типичных однопараметрических и двухпараметрических семействах кусочно-гладких динамических систем на плоскости, при которых рождаются периодические траектории, в основном описаны [1–6]. Естественно исследовать такие бифуркации и в более узких классах кусочно-гладких динамических систем, представляющих интерес для приложений.

Будем рассматривать семейство дифференциальных уравнений второго порядка

$$f_\mu: \quad \ddot{x} = f(x, \dot{x}, \mu),$$

зависящих от $n$ -мерного параметра $\mu$, и соответствующее семейство динамических систем

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = f(x, y, \mu), \tag{1}$$

которые также будем обозначать $f_\mu$. Будем предполагать, что $f(x, y, \mu)$ определена в некоторой окрестности $(-l,l)^2 \times (-\overline{\mu}, \overline{\mu})^n$ нуля в пространстве $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^n$ переменных $(x, y, \mu)$, а фазовое пространство $\Phi = (-l,l)^2$ разбивается линией $S$: $y = 0$ на множества $\Phi_+ : \{(x, y) \in \Phi : y > 0\}$ и $\Phi_- : \{(x, y) \in \Phi : y < 0\}$. На множестве $\Phi_\pm \times (-\overline{\mu}, \overline{\mu})^n$ функция $f$ совпадает с $C^r$ -функцией $f_\pm$, определенной на $(-l,l)^2 \times (-\overline{\mu}, \overline{\mu})^n$ ($r \geq 2$).

В точках $(x_0, 0) \in S$, где $f_-(x_0,0,0) f_+(x_0,0,0) < 0$ траектории динамических систем $f_\mu$ «сшиваются» из дуг траекторий динамических систем $f_\mu^\pm$: $\dot{x} = y, \ \dot{y} = f_\pm(x, y, 0)$, $(x, y) \in \overline{\Phi}_\pm$, и являются $C^1$ -гладкими. В точках $(x_0, 0) \in S$, где $f_-(x_0,0,0) f_+(x_0,0,0) \geq 0$, будем использовать выпуклое доопределение на $S$ [1, с. 95]. Поскольку вектор из выпуклой оболочки векторов $(0, \ f_\pm(x_0,0,0))$, касательный к $S$, является нулевым, то точку $(x_0, 0)$ будем считать целой траекторией — положением равновесия.

Опишем бифуркации в окрестности особой точки $(0,0) \in \Phi$ в «типичных» семействах уравнений, зависящих от одного и двух параметров, при которых рождаются предельные циклы.

### 1 Предварительные сведения

Пусть $(f_\pm)'_x(0,0,0) > 0$. Тогда по теореме о неявной функции найдутся такие числа $l_* \in (0, l)$ и $\mu_* \in (0, \overline{\mu})$, что для любого $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)^n$ уравнение $f_\pm(x, 0, \mu) = 0$ имеет единственное решение $x_\pm(\mu) \in (-l_*, l_*)$, причем $x_\pm(\cdot) \in C^r$, $x_\pm(0) = 0$. Пусть также $[(f_\pm)'_y(0,0,0)]^2 - 4(f_\pm)'_x(0,0,0) < 0$. Тогда при достаточно малом $\mu_*$ для всех $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)^n$ корни характеристического уравнения в положении равновесия $O_\pm(\mu) := (x_\pm(\mu), 0)$ системы $f_\mu^\pm$ комплексные: $\alpha_\pm(\mu) \pm i\beta_\pm(\mu)$, $\alpha_\pm(\cdot), \beta_\pm(\cdot) \in C^{r-1}$. Обозначим

$$\Lambda(\mu) := \frac{\alpha_+(\mu)}{\beta_+(\mu)} + \frac{\alpha_-(\mu)}{\beta_-(\mu)}, \ \ \Delta(\mu) := x_+(\mu) - x_-(\mu).$$

Мы можем также считать, что при $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)^n$ верны следующие утверждения:

$$\text{если } x_-(\mu) < x_+(\mu) \text{ и } x \in (x_-(\mu), x_+(\mu)), \text{ то } f_-(x,0,0) > 0, \ f_+(x,0,0) < 0, \tag{2}$$

$$\text{если } x_+(\mu) < x_-(\mu) \text{ и } x \in (x_+(\mu), x_-(\mu)), \text{ то } f_-(x,0,0) < 0, \ f_+(x,0,0) > 0. \tag{3}$$

Вследствие (2)–(3) дуга $S$ между точками $O_-(\mu)$ и $O_+(\mu)$ состоит из положений равновесия, устойчивых при $x_+(\mu) < x_-(\mu)$ и неустойчивых при $x_-(\mu) < x_+(\mu)$.

При достаточно малом $\rho_0' > 0$ найдется такое $\mu' \in (0, \mu_*)$, что $\forall \mu \in (-\mu', \mu')^n$ $x_\pm(\mu) \in (-\rho_0', \rho_0')$, а положительная (отрицательная) полутраектория системы $f_\mu^+$ ($f_\mu^-$), начинающаяся в точке $(\rho, 0) \in S$, $\rho \in [-\rho_0', \rho_0']$, следующий раз пересекает $S$ в точке $(g_+(\rho,\mu), 0)$ ($(g_-(\rho,\mu),0)$), где $g_\pm \in C^r$, $(g_\pm)'_\rho(\rho,\mu) < 0$, $g_\pm(x_\pm(\mu),\mu) = x_\pm(\mu)$ [7, с. 252]. Пусть $g_-^{-1}(\cdot,\mu)$ — функция, обратная к функции $g_-(\cdot,\mu)$. Введем функцию $d(\rho,\mu) := g_+(\rho,\mu) - g_-(\rho,\mu)$, $(\rho,\mu) \in (-\rho_0', \rho_0') \times (-\mu', \mu')^n$.

Мы можем выбрать $\rho_0 \in (0, \rho_0']$ и $\delta_0 \in (0, \mu']$ так, чтобы $\forall \mu \in (-\delta_0, \delta_0)^n$ $x_\pm(\mu) \in (-\rho_0, \rho_0)$, $g_+(\rho,\mu) \in (-\rho_0', \rho_0')$, если $\rho \in (-\rho_0, \rho_0)$. Тогда функция $P(\cdot,\mu) := g_-^{-1}(g_+(\cdot,\mu),\mu)$, определенная на отрезке $[-\rho_0, \underline{x}(\mu)]$, где $\underline{x}(\mu) := \min\{x_+(\mu), x_-(\mu)\}$, является функцией последования по траекториям системы $f_\mu$. Пусть $\rho_* \in (-\rho_0, \underline{x}(\mu))$ — неподвижная точка функции последования: $P(\rho_*,\mu) = \rho_*$. Тогда через точку $S$ с координатой $x = \rho_*$ проходит замкнутая траектория уравнения $f_\mu$. При $P_\rho'(\rho_*,\mu) < 1$ ($P_\rho'(\rho_*,\mu) > 1$) эта траектория является устойчивым (неустойчивым) гиперболическим предельным циклом, а при $P_\rho'(\rho_*,\mu) = 1$, $P_{\rho\rho}''(\rho_*,\mu) \neq 0$ — двойным циклом. Так как

$$P(\rho,\mu) = g_-^{-1}(g_+(\rho,\mu),\mu),\ P_u'(\rho,\mu) = \frac{(g_+)'_\rho(\rho,\mu)}{(g_-)'_\rho(P(\rho,\mu),\mu)},$$

$$P_{\rho\rho}''(\rho,\mu) = \left[\frac{(g_+)''_{\rho\rho}(\rho,\mu)}{(g_-)'_\rho(\overline{\rho},\mu)} - \frac{(g_+)'_\rho(\rho,\mu)(g_-)''_{\rho\rho}(\overline{\rho}),\mu)P_\rho'(\rho,\mu)}{[(g_-)'_\rho(\overline{\rho}),\mu)]^2}\right]_{\overline{\rho} = P(\rho,\mu)},$$

то

$$P(\rho_*,\mu) = \rho_*,\ P_\rho'(\rho_*,\mu) < 1\ (>1) \Leftrightarrow d(\rho_*,\mu) = 0,\ d_\rho'(\rho_*,\mu) > 0\ (<0), \quad (4)$$

$$P_\rho'(\rho_*,\mu) = (g_+)'_\rho(\rho_*,\mu)/(g_-)'_\rho(\rho_*,\mu) = 1 \Leftrightarrow d_\rho'(\rho_*,\mu) = 0,$$

$$\begin{gathered} P(\rho_*,\mu) = \rho_*,\ P_\rho'(\rho_*,\mu) = 1,\ P_{\rho\rho}''(\rho_*,\mu) \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d(\rho_*,\mu) = d_\rho'(\rho_*,\mu) = 0,\ d_{\rho\rho}''(\rho_*,\mu) \neq 0. \end{gathered} \quad (5)$$

Обратно, если замкнутая траектория системы $f_\mu$ пересекается с дугой $(-\rho_0, \rho_0) \times \{0\} \subset S$, то она проходит через точку с координатой $x = \rho_* \in (-\rho_0, \underline{x}(\mu))$, а $P(\rho_*,\mu) = \rho_*$.

Если $d'_\rho(0,0) = ... = d^{(k-1)}_{\rho^{k-1}}(0,0) = 0$, $(-1)^k d^{(k)}_{\rho^k}(0,0) < 0, k = 1,...,r$, то все траектории уравнения $f_0$, начинающиеся в достаточно малой окрестности точки $O$, $\omega$-предельны ($\alpha$-предельны) к $O$. В этом случае точку $O$ будем называть устойчивым (неустойчивым) *фокус-фокусом* системы $f_0$ кратности $k$.

Из [7, с. 100–101] следует, что

$$(g_+)'_\rho(x_+(\mu),\mu) = -e^{\pi\alpha_+(\mu)/\beta_+(\mu)}, \ (g_-)'_\rho(x_-(\mu),\mu) = -e^{-\pi\alpha_-(\mu)/\beta_-(\mu)}. \quad (6)$$

Поэтому

$$d'_\rho(0,0) = e^{-\pi\alpha_-(0)/\beta_-(0)}(1 - e^{\pi\Lambda(0)}). \quad (7)$$

## 2 Бифуркации особой точки типа фокус-фокус в однопараметрическом семействе

Здесь будем рассматривать однопараметрическое семейство $f_\mu$, $\mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$ систем вида (1), где $f^\pm_\mu \in C^r$, $r \geq 2$.

**Теорема 1.** *Пусть точка* $O = (0,0)$ *— фокус-фокус системы* $f_0$ *и* $\Lambda(0) < 0$, $\Delta'(0) > 0$. *Тогда существуют окрестность* $U$ *точки* $O$ *с* $C^1$*-гладкой границей* $\partial U$ *и число* $\mu_0 \in (0, \bar{\mu})$ *такие, что (рис. 1)*

*для любого* $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ *траектории систем* $f_\mu$ *в точках* $\partial U$ *входят в* $U$*;*

*при* $\mu \in (-\mu_0, 0)$ $f_\mu$ *имеет в* $U$ *единственную замкнутую траекторию, являющуюся устойчивым грубым предельным циклом, к которому* $\omega$*-предельны все остальные траектории, начинающиеся в* $U$ *и отличные от положений равновесия на отрезке* $[O_-(\mu)O_+(\mu)]$*;*

*при* $\mu = 0$ *все траектории системы* $f_\mu$*, начинающиеся в* $U \setminus O$*,* $\omega$*-предельны к* $O$*;*

*при* $\mu \in (0, \mu_0)$ *все траектории системы* $f_\mu$*, начинающиеся в* $U$*, кончаются в одном из положений равновесия на отрезке* $[O_+(\mu)O_-(\mu)]$.

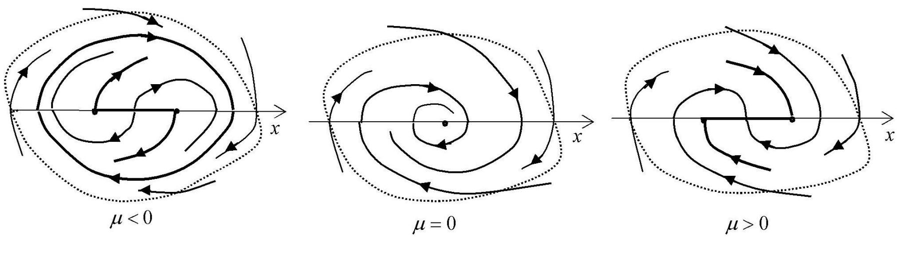


Рис. 1. Бифуркации в однопараметрическом семействе

**Доказательство**. Так как $\Lambda(0)<0$, то из (7) следует, что

$$d'_\rho(0,0)>0, \tag{8}$$

Поэтому числа $\rho_0$ и $\mu_0$ можно считать выбранными так, что

$$P(\rho,0)>\rho \quad \text{для всех } \rho\in[-\rho_0,0), \tag{9}$$

$$d'_\rho(\rho,\mu)>0 \text{ для всех } -\rho_0\le\rho\le\underline{x}(\mu),\ \mu\in(-\mu_0,\mu_0), \tag{10}$$

Из (9) и [8, с. 100] следует, что через точку $S$ с координатой $x=P(-\rho_0,0)$ можно провести замкнутую $C^1$-кривую $\gamma$, в точках которой траектории системы $f_0$ трансверсальны $\gamma$ и направлены внутрь области $U\ni O$, ограниченной $\gamma$. При достаточно малом $\mu_0$ траектории системы $f_\mu$, $\mu\in(-\mu_0,\mu_0)$, в точках $\gamma=\partial U$ также направлены внутрь $U$, а замкнутая траектория принадлежит $U$ тогда и только тогда, когда она пересекается с дугой $S_\mu: -\rho_0\le x\le\underline{x}(\mu)$ линии переключения $S$.

Из (9) теперь следует, что все траектории системы $f_0$, начинающиеся в $U\setminus O$, $\omega$-предельны к $O$.

Из равенства $d(0,0)=0$ и (8) получаем, что $\rho_0$ и $\mu_0$ можно взять такими, что

$$d(-\rho_0,\mu)<0 \text{ для всех } \mu\in(-\mu_0,\mu_0). \tag{11}$$

Поскольку $\Delta'(0)>0$, то можно считать, что $\forall\mu\in(0,\mu_0)$ $x_+(\mu)>x_-(\mu)$ и

$$d(x_-(\mu),\mu)=g_+(x_-(\mu),\mu)-x_-(\mu)>x_+(\mu)-x_-(\mu)>0. \tag{12}$$

Из (10)–(12) следует, что при $\mu\in(0,\mu_0)$ $d(\cdot,\mu)$ имеет единственный нуль $\rho_*(\mu)$, при этом $d'_\rho(\rho_*(\mu),\mu)>0$. Ввиду (4) $P(\cdot,\mu)$ имеет единственную, причем устойчивую неподвижную точку $\rho_*(\mu)$, а система $f_\mu$ имеет единственную (устойчивую) замкнутую траекторию в $U$.

При $\mu\in(-\mu_0,0)$ $x_+(\mu)<x_-(\mu)$ и

$$d(x_+(\mu),\mu)=x_+(\mu)-g_-(x_+(\mu),\mu)<x_+(\mu)-x_-(\mu)<0. \tag{13}$$

Из (10), (11) и (13) следует, что при $\mu\in(-\mu_0,0)$ $d(\cdot,\mu)$ не имеет нулей. Соответственно, система $f_\mu$ не имеет замкнутых траекторий в $U$.

## 3 Бифуркации особой точки типа фокус-фокус в двухпараметрическом семействе

В этом разделе будем рассматривать двухпараметрическое семейство $f_\mu$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in(-\bar{\mu},\bar{\mu})^2$ динамических систем вида (1), где $f_\mu^\pm\in C^r$, $r\ge3$. Пусть точка $O=(0,0)$ — устойчивый фокус-фокус системы $f_0$ кратности два, то есть $d'_\rho(0,0)=0$, что вследствие (7) равносильно равенству $\Lambda(0)=0$, а $d''_{\rho\rho}(0,0)<0$.

Пусть выполняется и условие

$$\Lambda'_{\mu_1}(0)\Delta'_{\mu_2}(0)-\Lambda'_{\mu_2}(0)\Delta'_{\mu_1}(0)\neq 0 .$$

Тогда, сделав замену параметров $\mu_1'=\Lambda(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_2'=\Delta(\mu_1,\mu_2)$ и вернувшись к их прежним обозначениям, можно считать

$$\Lambda(\mu_1,\mu_2)\equiv\mu_1,\ \Delta(\mu_1,\mu_2)\equiv\mu_2 . \quad (14)$$

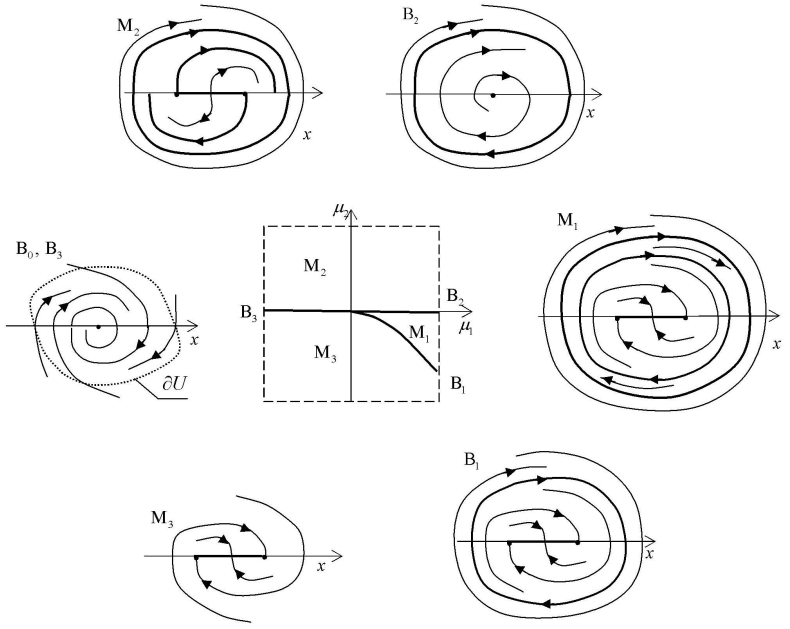


Рис. 2. Бифуркации в двухпараметрическом семействе

**Теорема 2.** *Пусть точка* $O=(0,0)$ *— устойчивый фокус-фокус уравнения* $f_0$ *кратности два, а параметры* $(\mu_1,\mu_2)$ *выбраны так, что выполняются равенства (14). Тогда существуют окрестность* $U$ *точки* $O$ *с* $C^1$*-гладкой границей* $\partial U$*, число* $\delta\in(0,\overline{\mu})$ *и разбиение области параметров* $(-\delta,\delta)^2$ *на множества*

$$\mathrm{B}_0=\{0\},\ \mathrm{B}_1=\{\mu:\mu_2=\beta(\mu_1),\ \beta\in C^1((0,\delta),(-\delta,0)),\beta(+0)=\beta'(+0)=0\},$$

$$\mathrm{B}_2=(0,\delta)\times\{0\},\ \mathrm{B}_3=(-\delta,0)\times\{0\},\ \mathrm{M}_1=\{\mu:\beta(\mu_1)<\mu_2<0\},$$

$$\mathrm{M}_2=(-\delta,\delta)\times(0,\delta),\ \mathrm{M}_3=\{\mu:-\delta<\mu_2<\beta(\mu_1)\}\cup(-\delta,0]\times(-\delta,0)$$

*со следующими свойствами (рис. 2):*

*Для любого* $\mu\in(-\delta,\delta)^2$ *траектории* $f_\mu$ *в точках* $\partial U$ *входят в* $U$.

*Система* $f_\mu$, $\mu\in(-\delta,\delta)^2$, *имеет в* $U$ *следующие особые точки: устойчивый (неустойчивый) фокус-фокус при* $\mu\in\mathrm{B}_0\cup\mathrm{B}_3$ *(*$\mu\in\mathrm{B}_2$*); отрезок* $[O_-(\mu)O_+(\mu)]$ *из устойчивых (неустойчивых) положений равновесия при* $\mu\in\mathrm{B}_1\cup\mathrm{M}_1\cup\mathrm{M}_3$ *(при* $\mu\in\mathrm{M}_2$ *);*

*Система* $f_\mu$, $\mu \in (-\delta,\delta)^2$, *имеет в* $U$ *следующие замкнутые траектории: двойной цикл при* $\mu \in \mathrm{B}_1$, *устойчивый и неустойчивый гиперболические предельные циклы при* $\mu \in \mathrm{M}_1$, *устойчивый гиперболический предельный цикл при* $\mu \in \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{M}_2$.

**Доказательство**. Представим $d(\rho,\mu)$, $(\rho,\mu) \in (-\rho_0,\rho_0)\times(-\delta_0,\delta_0)^2$ в виде $d(\rho,\mu) = x_+(\mu) + a_+(\rho,\mu)(\rho - x_+(\mu)) - x_-(\mu) - a_-(\rho,\mu)(\rho - x_-(\mu))$, где $a_\pm$ — $C^{r-1}$-функции,

$$a_\pm(x_\pm(\mu),\mu) = (g_\pm)'_\rho(x_\pm(\mu),\mu), \tag{15}$$

и сделаем замену $u = \rho - x_-(\mu)$. Функция $d(\rho,\mu)$ преобразуется в функцию

$$\tilde d(u,\mu) := d(x_-(\mu)+u,\mu) = \mu_2 + a_+(x_+(\mu)+u-\mu_2,\mu)(u-\mu_2) -$$
$$- a_-(x_-(\mu)+u,\mu)u.$$

Из этого равенства, учитывая (15), (6) и (14), получаем

$$\tilde d(u,\mu) = \mu_2(1 - a_+(0,0) + q(u,\mu)) + b(\mu)u + r_2(u,\mu), \tag{16}$$

$$\tilde d'_u(u,\mu) = b(\mu) + (r_2)'_u(u,\mu), \tag{17}$$

где $q \in C^{r-1}$ и $r_2 \in C^r$,

$$q(0,0) = 0,\ r_2(0,\mu) = (r_2)'_u(0,\mu) = 0,\ (r_2)''_{uu}(0,0) = d''_{\rho\rho}(0,0) < 0, \tag{18}$$

а

$$b(\mu) = e^{\pi\alpha_-(\mu)/\beta_-(\mu)} - e^{\pi\alpha_+(\mu)/\beta_+(\mu)} = e^{\pi\alpha_-(\mu)/\beta_-(\mu)}(1 - e^{\pi\Lambda(\mu)}).$$

Так как $\Lambda(\mu) \equiv \mu_1$, то

$$b(\mu) = \mu_1 b_1(\mu),\ \text{где } b_1(\cdot) \in C^1,\quad b_1(0) < 0. \tag{19}$$

Поскольку $a_+(0,0) = (g_+)'_\rho(0,0) < 0$, то $1 - a_+(0,0) > 0$, из (16) и (18) следует, что числа $\rho_0$ и $\delta_0$ можно считать выбранными так, что

$$\tilde d'_{\mu_2}(u,\mu) > 0 \ \text{ при всех } \ \mu \in (-\delta_0,\delta_0)^2,\ -\rho_0 - x_-(\mu) \le u \le \min\{0,\ \mu_2\}. \tag{20}$$

Так как $\tilde d(0,0) = \tilde d'_u(0,0) = 0$, а из (16)–(20) имеем

$$\begin{vmatrix} \tilde d''_{u\mu_1}(0,0) & \tilde d''_{u\mu_2}(0,0) \\ \tilde d'_{\mu_1}(0,0) & \tilde d'_{\mu_2}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1(0) & q'_u(0,0) \\ 0 & \tilde d'_{\mu_2}(0,0) \end{vmatrix} \ne 0,$$

то по теореме о неявной функции существуют такие числа $\delta_1 \in (0,\delta_0)$ и $0 < \bar u < \rho_0 - \max\limits_{\mu\in(-\delta_1,\delta_1)^2} |x_-(\mu)|$, что для $u \in [-\bar u,\ \bar u]$ система уравнений

$$\tilde d(u,\mu) = \tilde d'_u(u,\mu) = 0$$

имеет относительно $\mu = (\mu_1,\mu_2) \in (-\delta_1,\delta_1)^2$ единственное решение $\mu_1 = m_1(u)$, $\mu_2 = m_2(u)$; при этом $m_1(\cdot), m_2(\cdot) \in C^2$,

$$m_1(u) = -[(r_2)''_{uu}(0,0)/b_1(0)]u + o(u)\,, \tag{21}$$

$$m_2(u) = [0,5(r_2)''_{uu}(0,0)/(1-a_+(0,0))]u^2 + o(u^2)\,. \tag{22}$$

Чтобы $\rho = x_-(\mu)+u$ было неподвижной точкой функции последования $P(\cdot,\mu)$ при $\mu_1 = m_1(u)$, $\mu_2 = m_2(u)$, должно выполняться неравенство $u < \min\{m_2(u),0\}$. Поскольку $b_1(0)<0$, $(r_2)''_{uu}(0,0)<0$, $1-a_+(0,0)>0$, то из (21) и (22) следует, что $\overline{u}$ можно считать столь малым, что при всех $u\in[-\overline{u},\,0]$ $m_1'(u)<0$, а при $u\in[-\overline{u},\,0)$ $m_1(u)>0$, $u<m_2(u)<0$.

Функция $m_1(u)$, $u\in[-\overline{u},\,0]$, имеет обратную $m_1^{-1}(\mu_1)$, $\mu_1\in[0,\delta_2]$, где $\delta_2 = m_1(-\overline{u})$. Обозначим $\beta(\mu_1) := m_2(m_1^{-1}(\mu_1))$. Считая $\overline{u}$ достаточно малым, из (21) и (22) будем иметь $-\mu_1 < \beta(\mu_1) < 0$ для всех $\mu_1\in(0,\delta_2]$ и $\beta(0)=\beta'(0)=0$.

Так как $d''_{\rho\rho}(0,0)<0$, то $\overline{u}$ и $\delta\in(0,\delta_2)$ можно выбрать так, что

$$\tilde{d}''_{uu}(u,\mu)<0 \text{ для } -\overline{u}\le u\le 0\,,\ \mu\in(-\delta,\delta)^2\,. \tag{23}$$

Отсюда и из равенств $\tilde{d}(0,0)=\tilde{d}'_u(0,0)=0$ следует, что $\tilde{d}(\overline{u},0)<0$. Поэтому при фиксированном $\overline{u}$ число $\delta$ можно выбрать столь малым, что

$$\tilde{d}(\overline{u},\mu)<0 \text{ при всех } \mu\in(-\delta,\delta)^2\,. \tag{24}$$

Из (16) и (18) следует, что $\delta$ можно считать таким, что

$$\tilde{d}(0,\mu)>0\ (=0) \text{ при } \mu\in(-\delta,\delta)\times(0,\delta) \text{ (при } \mu\in(-\delta,\delta)\times\{0\}\text{)}\,. \tag{25}$$

Для $u=\mu_2$ из (16) получаем

$$\tilde{d}(\mu_2,\mu) = \mu_2(1-a_+(0,0)+q(\mu_2,\mu)+b_1(\mu)\mu_1)+r_2(\mu_2,\mu)\,.$$

Ввиду (18) $r_2(\mu_2,\mu)=o(\mu_2)$ равномерно относительно $\mu_1$. Следовательно, $\delta$ можно считать выбранным столь малым, что

$$\tilde{d}(\mu_2,\mu)<0 \text{ при всех } \mu=(\mu_1,\mu_2)\in(0,\delta)\times(-\delta,0)\,. \tag{26}$$

Через точку $S$ с координатой $x=P(-\overline{u},0)$ проведем $C^1$-гладкую замкнутую кривую $\gamma$, трансверсальную траекториям уравнения $f_0$ и ограничивающую окрестность $U$ точки $O$. Если $\delta$ достаточно мало, то $\gamma$ — трансверсаль и для траекторий уравнения $f_\mu$, $\mu =\in(-\delta,\delta)^2$, а замкнутая траектория принадлежит $U$ тогда и только тогда, когда пересекает дугу $S_\mu : -\overline{u}+x_-(\mu)<x<\min\{0,\mu_2\}+x_-(\mu)$ линии $S$.

Определим множества $\mathrm{B}_i$, $\mathrm{M}_j$ так, как это описано в формулировке теоремы 2. Учитывая (23) и (5), получаем, что при $\mu\in\mathrm{B}_1$ дугу $S_\mu$ пересекает двойной цикл, а при остальных $\mu\in(-\delta,\delta)^2$ эту дугу могут пересекать только гиперболические замкнутые траектории.

Так как при $\mu \in \mathrm{B}_1$ $\tilde{d}(m_1^{-1}(\mu_1),\mu) = \tilde{d}'_u(m_1^{-1}(\mu_1),\mu) = 0$, а $\tilde{d}''_{uu}(u,\mu) < 0$ при всех $u \in [-\overline{u},\, 0]$, то $\tilde{d}(u,\mu) < 0$, если $u \neq m_1^{-1}(\mu_1)$. Тем самым при $\mu \in \mathrm{B}_1$ двойной цикл — единственная замкнутая траектория, пересекающая дугу $S_\mu$.

Вследствие (20)

$$\tilde{d}(m_1^{-1}(\mu_1),\mu) > 0 \text{ при } \mu \in \mathrm{M}_1 \cup \mathrm{B}_2. \tag{27}$$

Из (24), (26), (27) и (23) получаем, что при любом $\mu \in \mathrm{M}_1$ существует точка $\hat{u} \in (-\overline{u},\mu_2)$ такая, что $\tilde{d}(\hat{u},\mu) > 0$, $\tilde{d}'_u(u,\mu) > 0$ при $u \in (-\overline{u},\hat{u})$ и $\tilde{d}'_u(u,\mu) < 0$ при $u \in (\hat{u},\mu_2)$. Поэтому $\tilde{d}(\cdot,\mu)$ имеет один нуль на $(-\overline{u},\hat{u})$ и один нуль на $(\hat{u},\mu_2)$. Вследствие (4) дугу $S_\mu$ пересекают два гиперболических предельных цикла, устойчивый и неустойчивый.

Если $\mu$ принадлежит $\mathrm{B}_2$ или $\mathrm{M}_2$, то из (24) – (27) и (23) получаем, что $\tilde{d}(\cdot,\mu)$ имеет на $(-\overline{u},0)$ единственный нуль $u_*$, причем $\tilde{d}'_u(u_*,\mu) > 0$. Вследствие (4) дугу $S_-$ пересекает единственная замкнутая траектория — устойчивый гиперболический предельный цикл.

Если $\mu_1 \in (0,\delta)$, $-\delta < \mu_2 < \beta_1(\mu_1)$, то ввиду (20) для любого $u \in [-\overline{u},\, 0]$ $\tilde{d}(u,(\mu_1,\mu_2)) < \tilde{d}(u,\mu_1,\beta_1(\mu_1)) \leq 0$. Вследствие (24), (25) и простоты нулей $\tilde{d}(\cdot,\mu)$ число нулей $\tilde{d}(\cdot,\mu)$ на $(-\overline{u},0)$ — локально постоянная функция на $\mathrm{M}_3$. В силу связности $\mathrm{M}_3$ число нулей $\tilde{d}(\cdot,\mu)$ на $(-\overline{u},0)$ постоянно при всех $\mu \in \mathrm{M}_3$. Поскольку $\tilde{d}(\cdot,\mu)$ не имеет нулей при $\mu_1 \in (0,\delta)$, $-\delta < \mu_2 < \beta_1(\mu_1)$, то их нет и при всех $\mu \in \mathrm{M}_3$. Соответственно, замкнутые траектории не пересекаются с дугой $S_\mu$.

Покажем, что при $\mu \in \mathrm{B}_3$ замкнутые траектории также не пересекаются с дугой $S_\mu$. Предположим, что это не так. Тогда $\tilde{d}(\cdot,\mu)$ имеет на $(-\overline{u},0)$ простой нуль. Но тогда при $\hat{\mu} \in \mathrm{M}_3$ и достаточно близких к $\mu$, $\tilde{d}(\cdot,\hat{\mu})$ тоже имеет на $(-\overline{u},0)$ нуль, что невозможно. Поэтому сделанное предположение неверно и замкнутые траектории не пересекаются с $S_\mu$.

## Заключение

В работе рассмотрены семейства динамических систем на фазовой плоскости, задаваемые дифференциальными уравнениями второго порядка $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \mu)$ с правыми частями, разрывными на линии $\dot{x} = 0$ и зависящими от одномерного или двумерного параметра $\mu$. В случае «общего положения» описаны бифуркационные диаграммы таких семейств, что при нулевом значении параметра система имеет устойчивое положение равновесия типа фокус-фокус. В частности, указаны области значений параметра, при которых из положения равновесия рождается устойчивый предельный цикл. Полученные результаты могут быть использованы для описания возникновения автоколебаний в реальных релейных системах управления.

## Литература

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука, 1985. 224 с.
2. Kuznetsov Yu. A., Rinaldi S., Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems // Intern. J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2003. Vol. 13, No. 8. P. 2157–2188.
3. Han M., Zhang W. On Hopf bifurcation in nonsmooth planar systems // J. Differential Equations. 2010. V. 248. P. 2399–2416.
4. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems // J. Differential Equations. 2011. Vol. 250, No. 4. P. 1967–2023.
5. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус» // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2(42). С. 18–31.
6. Simpson D. J. W. A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems. arXiv: 1 894.1 109v1 [math DS]. 30 Apr. 2018. 11 p.
7. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с.
8. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Москва: Наука, 1967. 488 с.

*Статья поступила в редакцию 02.10.2023; одобрена после рецензирования 25.10.2023; принята к публикации 01.12.2023.*

ON LOCAL BIFURCATIONS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A PIECE-SMOOTH RIGHT-HAND SIDE

*Vladimir Sh. Roitenberg*
Cand. Sci. (Phys. and Math.), Associate Professor
Yaroslavl State Technical University
88 Moskovskij prospekt, Yaroslavl , 150023, Russia
vroitenberg@mail.ru

*Abstract.* The paper considers dynamical systems on the plane, given by second-order autonomous differential equations, with right-hand sides depending on one and two parameters, discontinuous on the “zero velocity line” $y = 0$ and smooth outside it. At zero values of the parameters, it is assumed that the origin of coordinates is a stable equilibrium "linked" from the foci of smooth dynamical systems specified in the half-planes $y < 0$ and $y > 0$. Bifurcation diagrams are described for generic one-parameter and two-parameter families of such systems. In particular, it is shown that in a one-parameter family, a single (stable) limit cycle can be born from the equilibrium, and in a two-parameter family, from one to two limit cycles can be born from an the equilibrium.

*Keywords:* second-order differential equation, phase plane, piecewise-smooth dynamical system, equilibrium, bifurcation diagram, limit cycle.

*For citation*
*Roitenberg V. Sh.* On Local Bifurcations of Second Order Differential Equations With a Piece-Smooth Right-Hand Side // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 4. P. 3–13.

*The article was submitted 02.10.2023; approved after reviewing 25.10.2023; accepted for publication 01.12.2023.*