Научная статья

УДК 519.63
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-4-14-21

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© **Ханхасаев Владислав Николаевич**
кандидат физико-математических наук, доцент,
Восточно-Сибирский государственный университет
технологий и управления
Россия, 670033, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, стр. 1;
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
hanhvladnick@mail.ru

© **Муняев Сергей Иннокентьевич**
аспирант,
Восточно-Сибирский государственный университет
технологий и управления
Россия, 670033, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, стр. 1
SergMoon1986@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель для смешанного нелинейного уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода. Эта ММ моделирует процесс коммутационного отключения электрической дуги в спутном потоке газа с добавлением периода устойчивого горения ее до момента перехода переменного тока через ноль, когда дуга отключается. При этом полученное по обобщенному закону Фурье строго гиперболическое уравнение теплопроводности заменяется гиперболо-параболическим. Численный расчет задачи ведется в два этапа по неявной консервативной разностной схеме с учетом переменного коэффициента теплопроводности, нелинейного источника тепла и бокового теплоотвода. На первом квазистационарном этапе рассматривается параболическое уравнение, при котором коэффициент тепловой релаксации равен нулю. Его решение используется для постановки начально-краевой задачи для гиперболического уравнения в момент отключения дуги, где указанный коэффициент становится постоянной величиной, большей нуля. Этот второй этап реализует существенно нестационарный процесс отключения электрической дуги.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейные уравнения смешанного типа, метод конечных разностей, третье краевое условие, тепловой баланс.

Для цитирования

Ханхасаев В. Н., Муняев С. И. Численное решение третьей краевой задачи для нелинейного смешанного уравнения теплопроводности // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 4. С. 14–21.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №23-21-00269, https://rscf.ru/project/23-21-00269/.

Введение

Как известно из теории переходных процессов в сетях энергосистемы, токи короткого замыкания достигают сверхкритических значений, а с учетом закона Джоуля — Ленца не сложно дать оценку теплового воздействия указанных токов, которые могут привести к катастрофическим последствиям в энергосистеме. Для защиты от данных явлений в энергосистеме предусматриваются силовые коммутационные выключатели, задача которых максимально в короткое время разорвать поврежденную цепь.

Однако, даже если контакты выключателя разомкнуты, ток короткого замыкания может восстановить электрическую дугу за счет явления плазмодугового разряда между контактами. На этот случай в выключателе, в зависимости от типа и конструктивных особенностей, имеется механизм и средства гашения упомянутой дуги, позволяющие резко сбросить температуру на оси дуги с 7000 K до примерно 2000 K и обеспечивающие надежное отключение.

Таким образом, имеется тепловое явление с очевидной нестационарностью, где классические параболические модели теплопроводности приводят к грубым искажениям температурных полей, так как обычная теория Фурье о пропорциональности плотности потока тепла вектору градиента температуры приводит к бесконечной скорости распространения возмущений, что противоречит фундаментальным законам естествознания.

Для устранения этого парадоксального явления Дж. К. Максвелл в рамках теории газодинамики, А. В. Лыков в процессах тепломассообмена, К. Каттанео и П. Вернотте при исследовании теплопроводности из молекулярно-кинетических представлений, используя гипотезу о конечности времени соударения молекул и длины свободного пробега, получили новый обобщенный закон тепломассопереноса, в котором фигурирует дополнительный элемент, так называемое время релаксации, т. е. время установления термодинамического равновесия между потоком и градиентом потенциала. При этом выводится уравнение теплопроводности гиперболического типа [1, 2].

1 Постановка начально-краевой задачи

Исследуя данное явление, сформулируем математическую модель упомянутого переходного процесса в виде гиперболо-параболического уравнения в частных производных второго порядка с нелинейным источником тепла и переменным коэффициентом теплопроводности:

$$k(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x,t)u + q(u), \qquad (1)$$

в области $G = [0, L] \times [-T_1, T_2]$ с положительными T_1 и T_2. Здесь при $t \leq 0$ $k(x,t) = 0$, а при $t > 0$ $k(x,t) > 0$, $k(x,t)$ — коэффициент тепловой релаксации; $\lambda(x,t)$ — коэффициент теплопроводности; $c(x,t)$ — коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности; $q(u)$ — нелинейный внутренний источник тепла.

Начально-краевая задача заключается в поиске решения уравнения (1) при выполнении следующих граничных условий третьего рода и заданного начального профиля температуры $u_0(x)$:

$$\left[\mp\lambda(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \alpha_{0,L}(x,t)\ u(x,t)\right]_{x=0,L} = \begin{cases} q_0(t); \\ q_L(t). \end{cases}, \qquad (2)$$

$$u(x, -T_1) = u_0(x), \qquad (3)$$

где $\alpha_{0,L}$ и $q_{0,L}$ — коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на левом и правом концах стержня [3].

Для численного расчета поставленной задачи зададим конкретные значения коэффициентов уравнения (1):

$k(x,t) = k$ при $t > 0$, $a(x,t) = a > 0$, $\lambda(x,t) = x + 2$, $c(x,t) = c < 0$, $q(u) = u(x,t)^2$,

тогда уравнение (1) принимает следующий вид:

$$k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x+2)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + cu(x,t) + u(x,t)^2. \qquad (4)$$

2 Численное решение поставленной задачи

Проведем дискретизацию по пространственной переменной $\{x_i\}_{i=1}^{N}$, $x_i = ih, h = L/N$ и по временной: $\{\tau_j\}_{j=0}^{M=M_1+M_2}$, при $t \leq 0$ $\tau_1 = T_1/M_1$, $t > 0$ $\tau_2 = T_2/M_2$.

Составим конечно-разностное уравнение для произвольного внутреннего элементарного объема ячейки $[x_{i-0.5}, x_{i+0.5}]$ на промежутке времени $[t_{j-1}, t_j]$ с использованием интегроинтерполяционного метода

[3]. В таком случае неявная разностная схема будет выглядеть следующим образом:

$$k\frac{(U_i^{j+1}-2U_i^j+U_i^{j-1})}{\tau^2}+a\frac{(U_i^{j+1}-U_i^j)}{\tau}=[W_{i+0.5}-W_{i-0.5}]+cU_i^{j+1}+(U_i^j)^2,$$

где $x_{i\pm0.5}=(x_i\pm\frac{h}{2})$, $W_{i\pm0.5}$ — потоки тепла, где основанием для расчета является обычный закон Фурье:

$$W_{i+0.5}\approx\lambda_{i+0.5}\frac{U_{i+1}^{j+1}-U_i^{j+1}}{h^2}, W_{i-0.5}\approx\lambda_{i-0.5}\frac{U_i^{j+1}-U_{i-1}^{j+1}}{h^2}.$$

Эффективные теплопроводности $\lambda_{i\pm0.5}$ определим следующим образом:

$$\lambda_{i\pm0.5}=2\frac{\lambda(x_i)\lambda(x_{i\pm1})}{\lambda(x_i)+\lambda(x_{i\pm1})}.$$

Используя тот же метод конечных объемов, составляем разностные уравнения для краевых элементарных объемов [3], учитывая при этом тепловые потоки на границе области в окружающую среду, выражения для которых вытекают из краевых условий (2):

$$-\lambda_{0.5}\frac{U_1^{j+1}-U_0^{j+1}}{h}+\alpha_0U_0^{j+1}=q_0+\frac{h}{2}\left[cU_0^{j+1}+(U_0^j)^2-a\frac{U_0^{j+1}-U_0^j}{\tau}\right],$$

$$\lambda_{N-0.5}\frac{U_N^{j+1}-U_{N-1}^{j+1}}{h}+\alpha_LU_N^{j+1}=q_L+\frac{h}{2}\left[cU_N^{j+1}+(U_N^j)^2-a\frac{U_N^{j+1}-U_N^j}{\tau}\right].$$

Полученная система является частным случаем системы канонического вида [3] для метода прогонки:

$$A_iU_{i-1}^{j+1}+B_iU_i^{j+1}+C_iU_{i+1}^{j+1}=F_i, (i=\overline{2,N-1}).$$

Соберем в соответствии с каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} \left[\frac{\lambda_{0.5}}{h} + \alpha_0 - \frac{ch}{2} + \frac{ah}{2\tau}\right] U_0^{j+1} - \left[\frac{\lambda_{0.5}}{h}\right] U_1^{j+1} = q_0 + \frac{h}{2}(U_0^j)^2 + \frac{qh}{2\tau}U_0^j \\ -\left[\frac{\lambda_{i-0.5}}{h^2}\right] U_{i-1}^{j+1} + \left[\frac{k}{\tau^2} + \frac{a}{\tau} + \frac{\lambda_{i+0.5}}{h^2} + \frac{\lambda_{i-0.5}}{h^2} - c\right] U_i^{j+1} - \left[\frac{\lambda_{i+0.5}}{h^2}\right] U_{i+1}^{j+1} = \\ \qquad = (U_i^j)^2 + \frac{2k}{\tau^2}U_i^j - \frac{k}{\tau^2}U_i^{j-1} + \frac{a}{\tau}U_i^j \\ -\left[\frac{\lambda_{N-0.5}}{h}\right] U_{N-1}^{j+1} + \left[\frac{\lambda_{N-0.5}}{h} + \alpha_L - \frac{ch}{2} + \frac{ah}{2\tau}\right] U_N^{j+1} = q_L + \frac{h}{2}(U_N^j)^2 + \frac{ah}{2\tau}U_N^j. \end{cases}$$

3 Формирование начальных условий для гиперболического этапа

Первоначально, уравнение (4) соответствует параболическому типу, т. е. при $t \le 0 \quad k(x,t) = 0$, где начальное условие для уравнения (4) имеет вид (3). Однако при $0 < t \le T_2$ $k(x,t) > 0$ и уравнение (4) преобразуется в гиперболический вид, для которого требуется найти первое начальное условие $u(x,0)$ из предыдущего расчета для параболического этапа при $t = 0$:

$$u(x_i, 0) = U_i^{M_1}, 1 \le i \le N.$$

Далее требуется определить второе начальное условие для гиперболического уравнения. Для этого указанное условие зададим с повышением порядка аппроксимации по времени до второго, в отличие от первого порядка для формулы:

$$\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} = \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_2}.$$

Для этого запишем ряд Тейлора на точном решении $u(x,t)$ по времени в окрестности $t = 0$:

$$u(x_i, \tau_2) = u(x_i, 0) + \tau_2 \frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} + \frac{\tau_2^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,0)}{\partial t^2} + O(\tau_2^3),$$

где вторую производную выведем из уравнения (4):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+2)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \frac{a}{k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{c}{k}u(x,t) + \frac{1}{k}u^2(x,t) =$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + (x+2)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] - \frac{a}{k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{c}{k}u(x,t) + \frac{1}{k}u^2(x,t).$$

Найдем отсюда неизвестное дискретное значение:

$$U_i^{M_1+1} = U_i^{M_1} + \tau_2 \frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} + \frac{\tau_2^2}{2}\left[\frac{1}{k}\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial x} + \frac{(x_i+2)}{k}\frac{\partial^2 u(x_i,0)}{\partial x^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{k}\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} + \frac{c}{k}u(x_i,0) + \frac{1}{k}u^2(x_i,0)\right] + O(\tau_2^3)$$

т. е.:

$$U_i^{M_1+1} = U_i^{M_1} + \tau_2 \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} + \frac{\tau_2^2}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_{i-1}^{M_1}}{2hk} + \right.$$

$$+ \frac{(x_i+2)}{k}\frac{(U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1})}{h^2} -$$

$$\left. - \frac{a}{k}\frac{(U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1})}{\tau_1} + \frac{c}{k}U_i^{M_1} + \frac{1}{k}(U_i^{M_1})^2\right] + O(\tau_2^3).$$

В результате получаем:

$$\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} = \frac{U_i^{M_1+1} - U_i^{M_1}}{\tau_2} = \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_{i-1}^{M_1}}{2hk} + \right.$$

$$+ \frac{(x_i+2)}{k}\frac{(U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1})}{h^2} -$$

$$\left. - \frac{a}{k}\frac{(U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1})}{\tau_1} + \frac{c}{k}U_i^{M_1} + \frac{1}{k}(U_i^{M_1})^2\right] + O(\tau_2^2).$$

Отсюда получаем второе начальное условие для расчета гиперболического этапа со вторым порядком аппроксимации:

$$\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} = \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_{i-1}^{M_1}}{2hk} + \right.$$

$$\left. + \frac{(x_i+2)}{k}\frac{(U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1})}{h^2} - \frac{a}{k}\frac{(U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1})}{\tau_1} + \frac{c}{k}U_i^{M_1} + \frac{1}{k}(U_i^{M_1})^2\right].$$

Заключение

После определения всех требуемых компонентов поиск решения уравнения (4) с начально-краевыми условиями (2-3) производится методом прогонки по неявной консервативной разностной схеме с учетом переменного коэффициента теплопроводности, нелинейного источника тепла и бокового теплоотвода. Полученные температурные поля хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Приведенный выше алгоритм может быть легко реализован на различных языках программирования, в частности, с использованием инженерно-программных средств пакетов Mathcad и Comsol Multyphysics. В дальнейшем планируется применить метод итераций для завершения данной нелинейной схемы и распространить ее для двухмерного пространственного случая.

Литература

1. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. Изд. 2. Москва: Изд-во УРСС, 2004. 296 с.
2. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // УФН. 1997. Т. 167, № 10. С. 1096–1106. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199710f.1095.
3. Дульнев Г. Н., Парфёнов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. Москва: Высшая школа, 1990. 112 с.
4. Ханхасаев В. Н., Муняев С. И. Решение смешанного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла методом теплового баланса с третьим краевым условием // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО23): материалы VIII Международной конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2023. С. 237–241. DOI: 10.53980/9785907599970_237.

Статья поступила в редакцию 02.11.2023; одобрена после рецензирования 20.11.2023; принята к публикации 01.12.2023.

NUMERICAL SOLUTION OF THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NONLINEAR MIXED HEAT CONDUCTION EQUATION

Vladislav N. Khankhasaev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
East Siberia State University of Technology and Management
Klyuchevskaya St. 40B, Ulan-Ude 670033, Russia
Buryat State University
Smolina St. 24a, Ulan-Ude 670000, Russia
hanhvladnick@mail.ru

Sergey I. Munyaev
graduate student,
East Siberia State University of Technology and Management
Klyuchevskaya St. 40B, Ulan-Ude 670033, Russia
sergmoon1986@mail.ru

Abstract. The paper considers a mathematical model for a mixed nonlinear heat equation with boundary conditions of the third kind. This MM models the process of switching off an electric arc in a co-current gas flow with the addition of a period of stable combustion until the alternating current crosses zero, when the arc is turned off. In this case, the strictly hyperbolic heat equation obtained by the generalized Fourier law is replaced by a hyperbolic-parabolic one. The numerical calculation of the problem is carried out in two stages using an implicit conservative difference scheme, taking into account a variable thermal conductivity coefficient, a nonlinear heat source and a lateral heat sink. At the first quasi-stationary stage, a parabolic equation is considered, in which the thermal relaxation coefficient is equal to zero. Its solution is used to formulate an initial boundary value problem for a hyperbolic equation at the moment the arc is turned off, where the specified coefficient becomes a constant value greater than zero. This second stage implements a significantly non-stationary process of turning off the electric arc.

Keywords: hyperbolic heat equation, nonlinear mixed type equations, finite difference method, third boundary condition, heat balance.

For citation

Khankhasaev V. N., Munyaev S. I. Numerical Solution of the Third Boundary Value Problem for the Nonlinear Mixed Heat Conduction Equation // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 4. P. 14–21.

The article was submitted 02.11.2023; approved after reviewing 20.11.2023; accepted for publication 01.12.2023.