ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья

УДК 517.95
DOI: 10.18101/2304-5728-2024-1-3-17

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

© Нахушева Фатима Мухамедовна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики и информатики,
Кабардино-Балкарский университет имени Х. М. Бербекова
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
fatima-nakhusheva@mail.ru

© Водахова Валентина Аркадьевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений,
Кабардино-Балкарский университет имени Х. М. Бербекова
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
v.a.vod@yandex.ru

© Гучаева Зера Хамидбиевна
старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений,
Кабардино-Балкарский университет имени Х. М. Бербекова
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
proporwiz@yandex.ru

© Кодзоков Азамат Хасанович
старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений,
Кабардино-Балкарский университет имени Х. М. Бербекова
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
kodzoko@mail.ru

Аннотация. В статье приводится доказательство единственности и существования решения Коши для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Исследована задача с нелокальными краевыми условиями на характеристиках уравнения для нахождения регулярного решения уравнения смешанного типа. Нелокальные условия содержат операторы дробного в смысле Римана — Лиувилля интегро-дифференцирования.

Доказано, что при выполнении определенных условий не может существовать более одного решения. Вопрос разрешимости задачи эквивалентно редуцируется к вопросу разрешимости системы интегральных уравнений, представляющей собой систему сингулярных интегральных уравнений. Найдено условие, которое гарантирует существование регулятора, приводящего систему сингулярных интегральных уравнений к уравнениям Фредгольма второго рода. Из возможности приведения задачи к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и единственности искомого решения следует существование решения задачи.

Ключевые слова: нелокальные краевые условия, регулярное решение задачи, однородная задача, производная дробного порядка, оператор дробного интегро-дифференцирования, сингулярные интегральные уравнения, регуляризатор, аффиксы точек, кривая Жордана.

Для цитирования

Задача с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения / *Ф. М. Нахушева, В. А. Водахова, З. Х. Гучаева, А. Х. Кодзоков* // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 1. С. 3–17.

Введение

Задачи с нелокальными условиями возникают во многих областях физики, биологии, теории влагопереноса. Первые работы по нелокальным задачам появились у Л. И. Камынина, А. Ф. Чудновского, В. А. Стеклова. Позже появились работы А. В. Бицадзе, А. А. Самарского, А. М. Нахушева, Е. И. Моисеева, Н. И. Ионкина и др. В 1969 г. А. М. Нахушевым были предложены нелокальные задачи нового типа, которые положили начало важному этапу в становлении и развитии теории краевых задач. Эти задачи были названы краевыми задачами со смещением, а за рубежом — задачами Нахушева. Они дают обобщение задачи Трикоми и включают в себя класс задач с самосопряженными операторами. В работах, посвященных исследованию задач со смещением для уравнений смешанного типа, краевые условия обычно содержат классические операторы. В нелокальных краевых задачах содержатся операторы более сложной структуры и операторы дробного интегро-дифференцирования.

Появились работы, посвященные численным методам решения нелокальных краевых задач.

К нелокальным задачам не применима разработанная А. А. Самарским общая теория устойчивости разностных схем, поскольку не имеет место положительность и самосопряжённость операторов, входящих в каноническую форму разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи с нелокальными условиями. Численным, в основном разностным, методам исследования нелокальных задач посвящены работы А. В. Гулина, Н. И. Ионкина, В. А. Морозова, В. Л. Макарова, М. Х. Шханукова-Лафишева и др. [7; 12]. Разностным методам решения нелокальных краевых задач для уравнений теплопроводности посвящены работы [8–12].

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$|y|^k u_{xx} + \operatorname{sgn}(xy)|x|^k u_{yy} = 0, \quad k \equiv const > 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω, ограниченной кусочно-гладкой кривой Жордана σ с концами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, расположенной в первом квадранте $x>0$, $y>0$ и характеристиками AD: $x^p+(-y)^p=1$, CD: $x+y=0$, BC: $(-x)^p+y^p=1$, $2p=k+2$. Как уже указано, обозначено через Ω_1, Ω_2 — гиперболические части смешанной области Ω, где $x>0$ и $x<0$ соответственно; Ω_3 — эллиптическая часть области Ω; $\Im_1\left(\Im_2\right)$ — интервал $0<x<1$ ($0<y<1$) прямой $y=0$ ($x=0$). Под регулярным в области Ω решением уравнения будет пониматься функция $u(x,y)$ из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)$, удовлетворяющая уравнению и такая, что $u_y(x,0)$, $u_x(0,y)$ на концах интервала $0<x<1$ ($0<y<1$) могут обращаться в бесконечность порядка ниже $1-2\beta$, β — порядок дробных производных в нелокальном условии.

Задача А. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x,y)=\varphi(x,y),\quad \forall(x,y)\in\sigma, \qquad (2)$$

$$u(x,y)\big|_{OD}=c_1(x), \qquad (3)$$

$$a_1(y)D_{0y}^{\beta}y^{2\beta-1}u[Q_0(y)]+b_1(y)D_{y1}^{\beta}(1-y)^{2\beta-1}u[Q_1(y)]=c_2(y),\quad \forall y\in\Im_2, \qquad (4)$$

$\beta=k/(2k+4)$, *где* $Q_0(y)$, $Q_1(y)$ *— аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки* $(0,y)\in\Im_2$ *с характеристиками* OC, BC; $\varphi(x,y)$, $a_1(y)$, $b_1(y)$, $c_1(x)$, $c_2(y)$ *— заданные непрерывные функции, причём* $a_1^2(y)+b_1^2(y)\neq 0, y\in\Im_2$; $\varphi(x,y)\in C^1(\sigma)$; $a_1(y), b_1(y), c_i(t)\in C^{(2,h)}(\Im_i), h>0$; $i=1,2$; $D_{0y}^l f$, $D_{y1}^l f$ *— операторы дробного в смысле Римана — Лиувилля интегро-дифференцирования* [1].

Существование и единственность задачи А были доказаны [2] в случае, когда краевые условия (3), (4) заменены условиями $a_i(t)D_{0t}^{1-\beta}u[Q_0(t)]+b_i(t)D_{t1}^{1-\beta}u[Q_1(t)]=c_i(t),\ \forall t\in\Im_i,\ i=1,2$.

Единственность решения задачи

Доказательство единственности решения задачи проведено в случае выполнения условий (2)–(4). Решение задачи Коши для уравнения (1) с данными на линии вырождения $y=0$ в области Ω_1 даётся формулой [4; 5]:

$$u(x,y)=-2^{3-4\beta}p\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}xy\int_{a^{1/p}}^{b^{1/p}}t^{2p-1}\left(t^{2p}-a^2\right)^{-1+\beta}\left(b^2-t^{2p}\right)^{-1+\beta}\tau_1(t)dt-$$

$$-2^{4\beta-1}p\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_{a^{1/p}}^{b^{1/p}}t^{2p-2}\left(t^{2p}-a^2\right)^{-\beta}\left(b^2-t^{2p}\right)^{-\beta}\upsilon_1(t)dt\,, \qquad (5)$$

где $a=x^p-(-y)^p$, $b=x^p+(-y)^p$. Также в области Ω_2:

$$u(x,y)=-2^{3-4\beta}p\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}xy\int_{a_1^{1/p}}^{b_1^{1/p}}t^{2p-1}\left(t^{2p}-a_1^2\right)^{-1+\beta}\left(b_1^2-t^{2p}\right)^{-1+\beta}\tau_2(t)dt-$$

$$-2^{4\beta-1}p\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_{a_1^{1/p}}^{b_1^{1/p}}t^{2p-2}\left(t^{2p}-a_1^2\right)^{-\beta}\left(b_1^2-t^{2p}\right)^{-\beta}\upsilon_2(t)dt\,, \qquad (6)$$

где $a_1=y^p-(-x)^p$, $b_1=y^p+(-x)^p$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма функция Эйлера.

Удовлетворим функцию $u(x,y)$ краевому условию (3). Так как в точке $(x,-x)$ имеем $a=0$, $b=2x^p$, то после замены переменной интегрирования по формуле $\xi=t^{2p}$, переобозначив ξ через t, затем $4x^p$ через x, получим:

$$u\big|_{OD}=2^{2-4\beta-(1/p)}\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{1/p}\;D_{0x}^{-\beta}x^{-1+\beta}\,\tilde{\tau}_1(x)-$$

$$-2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta-(1/2p)}\,\tilde{\upsilon}_1(x). \qquad (7)$$

Здесь $\tau_1(x)=\tilde{\tau}_1\left(x^{2p}\right)$, $\upsilon_1(x)=\tilde{\upsilon}_1\left(x^{2p}\right)$.

Отсюда с учётом (3) будем иметь:

$$2^{4-3\beta-(1/p)}\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{1-2\beta}\;D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\,\tilde{\tau}_1(x)-$$

$$-\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta-(1/2p)}\,\tilde{\upsilon}_1(x)=2^{2-4\beta}c_1(x). \qquad (8)$$

Вычислим теперь $u[Q_0(y)]$, $u[Q_1(y)]$, где $Q_0(y)=-(y/2)^{1/p}+i\,(y/2)^{1/p}$, $Q_1(y)=-((1-y)/2)^{1/p}+i\,((1+y)/2)^{1/p}$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(0,y)\in\Im_2$ с характеристиками OC, BC соответственно.

Так как в точке $Q_0(y)$ имеем $a_1^p=0$, $b_1^p=y^{1/p}$, то после замены переменной интегрирования $t=\xi^{1/2p}$ и переобозначения ξ через t, а затем y^2 через y, будем иметь:

$$u[Q_0(y)]=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}y^{1-2\beta}\;D_{0y}^{-\beta}y^{\beta-1}\,\tilde{\tau}_2(y)-$$

$$-2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}D_{0y}^{\beta-1}y^{-(1/2p)-\beta}\,\tilde{\upsilon}_2(y), \qquad (9)$$

где $\tau_2(y)=\tilde{\tau}_2\left(y^{2p}\right)$, $\upsilon_2(y)=\tilde{\upsilon}_2\left(y^{2p}\right)$.

Аналогично вычислим $u[Q_1(y)]$. Так как в точке $Q_1(y)$ имеем $a_1^{1/p}=y^{1/p}$, $b_1^{1/p}=1$, то, производя замену переменной интегрирования по формуле $\xi=t^{2p}$, переобозначив ξ через t, затем y^2 через y, получим:

$$u[Q_1(y)]=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}(1-y)^{1-2\beta}\ D_{y1}^{-\beta}(1-y)^{1-\beta}\,\tilde{\tau}_2(y)-$$
$$-2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}D_{y1}^{\beta-1}y^{-(1/2p)}(1-y)^{-\beta}\tilde{\upsilon}_2(y). \qquad (10)$$

Удовлетворяя (9), (10) краевому условию (4), будем иметь:

$$\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\left[y^{\beta-1}\ a_1(y)+(1-y)^{\beta-1}b_1(y)\right]\tilde{\tau}_2(y)-2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left[a_1(y)D_{0y}^{\beta}y^{2\beta-1}\right.$$
$$\left.D_{0y}^{\beta-1}y^{-(1/2p)-\beta}\tilde{\upsilon}_2(y)+b_1(y)D_{y1}^{\beta}(1-y)^{2\beta-1}D_{y1}^{\beta-1}y^{-(1/2p)}(1-y)^{-\beta}\tilde{\upsilon}_2(y)\right]=c_2(y). \qquad (11)$$

После преобразования интегралов, входящих в полученное равенство, оно примет вид:

$$\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\left[(1-y)^{1-\beta}\ a_1(y)+y^{1-\beta}b_1(y)\right]\tilde{\tau}_2(y)-$$
$$-2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left[(1-y)^{1-\beta}a_1(y)\cdot D_{0y}^{2\beta-1}y^{-(1/2p)}\tilde{\upsilon}_2(y)+\right.$$
$$\left.+y^{1-\beta}b_1(y)D_{y1}^{2\beta-1}y^{-(1/2p)}\tilde{\upsilon}_2(y)\right]=y^{1-\beta}(1-y)^{1-\beta}c_2(y). \qquad (12)$$

Имеет место теорема единственности решения задачи.

Теорема. *В области* Ω *не может существовать более одного регулярного решения задачи А, если выполнены условия*

$$k\le\left(\sqrt{5}-1\right)/2,\quad (1-y)^{1-\beta}\ a_1(y)+y^{1-\beta}b_1(y)\ne 0,$$
$$a_1(y)\ne 0,\quad \left[\frac{1}{y^{(1/2p)+k}}\left(1+\left(\frac{y}{1-y}\right)^{1-\beta}\frac{b_1(y)}{a_1(y)}\right)\right]'\ge 0,\ \forall y\in\Im_2.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи А. Тогда в области эллиптичности уравнения (1) имеет место равенство [2]:

$$\iint\limits_{\Omega_3}\left(y^k u_x^2+x^k u_y^2\right)dxdy=\int_0^1 x^k\tau_1(x)\upsilon_1(x)dx+\int_0^1 y^k\tau_2(y)\upsilon_2(y)dy. \qquad (13)$$

Полагая $c_i(t)\equiv 0,\ i=1,2$, нетрудно установить справедливость следующих неравенств:

$$\int_0^1 t^k \tau_i(t) \upsilon_i(t) dt \geq 0,\ i = 1,2,\ t = x, y. \tag{14}$$

При $c_1(x) \equiv 0$ (8) примет вид:

$$D_{0x}^{-\beta} x^{\beta-1} \widetilde{\tau}_1(x) = k_1 x^{2\beta-1} D_{0x}^{\beta-1} x^{-\beta-(1/2p)} \widetilde{\upsilon}_1(x),$$

где $k_1 = \dfrac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} 2^{6\beta-3}$.

Подействуем на обе части последнего уравнения оператором D_{0x}^{β}:

$$x^{\beta-1} \widetilde{\tau}_1(x) = k_1 D_{0x}^{\beta} x^{2\beta-1} D_{0x}^{\beta-1} x^{-\beta-(1/2p)} \widetilde{\upsilon}_1(x). \tag{8*}$$

После преобразования двойного интеграла (8*) можно переписать:

$$\widetilde{\tau}_1(x) = k_1 D_{0x}^{2\beta-1} x^{2\beta-(1/2p)} \widetilde{\upsilon}_1(x).$$

Тогда $\dfrac{\Gamma(1-2\beta)}{k_1} \displaystyle\int_0^1 x^k \widetilde{\upsilon}_1(x) \widetilde{\tau}_1(x) dx = \int_0^1 x^k \widetilde{\upsilon}_1(x) dx \int_0^x \frac{\xi^{2\beta-(1/2p)} \widetilde{\upsilon}_1(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{2\beta}}$. Далее воспользуемся известной формулой для функции $\Gamma(\mu)$ [6]

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} \cos kt\, dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu} \cos\frac{\pi\mu}{2}, \quad k > 0,\ 0 < \mu < 1.$$

Полагая $k = |x-\xi|,\ \mu = 2\beta$, получим:

$$\frac{1}{|x-\xi|^{2\beta}} = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta} \int_0^\infty t^{2\beta-1} \cos t|x-\xi| dt. \tag{15}$$

С учётом (15) и формулы $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$, поменяв порядок интегрирования, будем иметь:

$$\frac{\pi}{2k_1 \sin\pi\beta} \int_0^1 x^k \widetilde{\upsilon}_1(x) \widetilde{\tau}_1(x) dx = \int_0^1 \gamma_1(x) \widetilde{\upsilon}_1^*(x)\, dx \int_0^x \widetilde{\upsilon}_1^*(x) \cos t|x-\xi|\, d\xi \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt,$$

где $\widetilde{\upsilon}_1^*(\xi) = \xi^{2\beta-(1/2p)} \widetilde{\upsilon}_1(\xi),\ \gamma_1(x) = x^{k-2\beta+(1/2p)}$.

Принимая во внимание равенства

$$\left[\left(\int_0^x \widetilde{\upsilon}_1^*(\xi) \cos t\xi\, d\xi\right)^2\right]' = 2\widetilde{\upsilon}_1^*(x) \cos tx \int_0^x \widetilde{\upsilon}_1^*(\xi) \cos t\xi\, d\xi,$$

$$\left[\left(\int_0^x \widetilde{\upsilon}_1^*(\xi) \sin t\xi\, d\xi\right)^2\right]' = 2\widetilde{\upsilon}_1^*(x) \sin tx \int_0^x \widetilde{\upsilon}_1^*(\xi) \sin t\xi\, d\xi,$$

после интегрирования по частям с учётом того, что $\gamma_1(x) = 1$, получим:

$$\frac{\pi}{2k_1 \sin\pi\beta}\int_0^1 x^k \widetilde{\upsilon}_1(x)\widetilde{\tau}_1(x)dx =$$

$$= \int_0^\infty t^{2\beta-1}dt \left\{ \left[\left(\int_0^1 \widetilde{\upsilon}_1^{\,*}(\xi)\cos t\xi \, d\xi \right)^2 + \left(\int_0^1 \widetilde{\upsilon}_1^{\,*}(\xi)\sin t\xi \, d\xi \right)^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \gamma_1'(x)dx \left[\left(\int_0^x \widetilde{\upsilon}_1^{\,*}(\xi)\cos t\xi \, d\xi \right)^2 + \left(\int_0^x \widetilde{\upsilon}_1^{\,*}(\xi)\sin t\xi \, d\xi \right)^2 \right] \right\}.$$

Очевидно, правая часть равенства будет положительной при выполнении условия $\gamma_1'(x) \le 0$, где $\gamma_1'(x) = (k - 2\beta + (1/2p))x^{k-2\beta-1+(1/2p)}$. Или равносильное неравенство $k \le (\sqrt{5}-1)/2$.

Положим теперь, что $c_2(y) \equiv 0$. Тогда уравнение (12) примет вид:

$$\frac{1}{k_2}\widetilde{\tau}_2(y) = m_1(y) D_{0y}^{2\beta-1} y^{-(1/2p)}\widetilde{\upsilon}_2(y) + n_1(y) D_{y1}^{2\beta-1} y^{-(1/2p)}\widetilde{\upsilon}_2(y),$$

где $m_1(y) = \dfrac{(1-y)^{1-\beta} a_1(y)}{(1-y)^{1-\beta} a_1(y) + y^{1-\beta} b_1(y)}$, $n_1(y) = \dfrac{(1-y)^{1-\beta} b_1(y)}{(1-y)^{1-\beta} a_1(y) + y^{1-\beta} b_1(y)}$,

$k_2 = \dfrac{2^{4\beta-2}\Gamma(2-2\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}$.

Из последнего уравнения запишем:

$$\frac{\Gamma(1-2\beta)}{k_2}\int_0^1 y^k \widetilde{\tau}_2(y)\widetilde{\upsilon}_2(y)dy = \int_0^1 y^k \widetilde{\upsilon}_2(y) m_1(y)dy \int_0^y \frac{\xi^{-1/2p}\widetilde{\upsilon}_2(\xi)\, d\xi}{(y-\xi)^{2\beta}} +$$

$$+ \int_0^1 y^k \widetilde{\upsilon}_2(y) n_1(y)dy \int_y^1 \frac{\xi^{-1/2p}\widetilde{\upsilon}_2(\xi)\, d\xi}{(\xi-y)^{2\beta}}.$$

С учётом формулы (15) и того, что $\pi/\sin 2\pi\beta = \Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)$, поменяв порядок интегрирования, будем иметь:

$$\frac{\pi}{2k_2 \sin\pi\beta}\int_0^1 y^k \widetilde{\tau}_2(y)\widetilde{\upsilon}_2(y)dy = \int_0^\infty t^{2\beta-1}\, dt \int_0^1 \overline{m}_1(y)\widetilde{\upsilon}_2^*(y)dy \int_0^y \widetilde{\upsilon}_2^*(\xi)\cos t|y-\xi|d\xi +$$

$$+ \int_0^\infty t^{2\beta-1}\, dt \int_0^1 \overline{n}_1(y)\widetilde{\upsilon}_2^*(y)dy \int_y^1 \widetilde{\upsilon}_2^*(\xi)\cos t|\xi - y|d\xi ,$$

где $\widetilde{\upsilon}_2^*(y) = \xi^{-(1/2p)}\widetilde{\upsilon}_2(\xi)$, $\overline{m}_1(y) = y^{k+(1/2p)} m_1(y)$, $\overline{n}_1(y) = y^{k+(1/2p)} n_1(y)$.

После преобразований и интегрирования по частям с учётом того, что $\overline{m}_1(1) = 0$, $\overline{n}_1(0) = 0$, получим:

$$\frac{\pi}{k_2 \sin \pi\beta} \int_0^1 y^k \widetilde{\tau}_2(y) \widetilde{\upsilon}_2(y) dy =$$

$$= -\int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \left\{ \int_0^1 \overline{m}_1'(y)\, dy \left[\left(\int_0^y \widetilde{\upsilon}_2^*(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^y \widetilde{\upsilon}_2^*(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \overline{n}_1'(y)\, dy \left[\left(\int_y^1 \widetilde{\upsilon}_2^*(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_y^1 \widetilde{\upsilon}_2^*(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right] \right\}.$$

Правая часть равенства будет положительна при выполнении условий $\overline{m}_1'(y) \le 0$, $\overline{n}_1'(y) \ge 0$. Вследствие введённых обозначений будем иметь:

$$\overline{m}(y) + \overline{n}(y) = \frac{1}{y^{k+1/2p}},$$

откуда $\overline{n}_1'(y) = (1/2p+k) y^{1/2p+k-1} - \overline{m}_1'(y)$. Отсюда ввиду того, что $(1/2p+k) y^{-1+k+1/2p} \ge 0$, то требование $\overline{m}_1'(y) \le 0$ автоматически повлечёт за собой условие $\overline{n}_1'(y) \ge 0$. Запишем $\overline{m}_1'(y)$ в виде $\overline{m}_1'(y) = \left[\frac{1}{y^{1/2p+k}} \left(1 + \left(\frac{y}{1-y} \right)^\beta \frac{b_1(y)}{a_1(y)} \right) \right]^{-1}$ и требуем, чтобы $\overline{m}_1'(y) \le 0$. Это требование вполне будет обеспечиваться требованием теоремы

$$\left[\frac{1}{y^{(1/2p)+k}} \left(1 + \left(\frac{y}{1-y} \right)^{1-\beta} \frac{b_1(y)}{a_1(y)} \right) \right] \ge 0, \ \forall y \in \Im_2.$$

Отсюда заключаем справедливость неравенства (14). Из соотношений (13), (14) сразу следует единственность решения задачи А.

Существование решения задачи

Для простоты будем считать, что $\varphi(x,y) \equiv 0$ и кривая σ совпадает с нормальным контуром $\sigma_0 : x^{2p} + y^{2p} = 1$. *Основные соотношения между* $\widetilde{\tau}_1(x)$, $\widetilde{\upsilon}_1(x)$, принесённые на $\Im_1$ из эллиптической Ω_3 [2] и гиперболической Ω_1 частей смешанной области Ω соответственно, имеют вид:

$$\widetilde{\tau}_1(x) = -\frac{\gamma}{2p} \int_0^1 \xi^{\beta-1/2} \left[\frac{1}{|\xi - x|^{2\beta}} - \frac{1}{|1 - \xi x|^{2\beta}} \right] \widetilde{\upsilon}_1(\xi) d\xi -$$

$$- \frac{\gamma}{2p} \int_0^1 \xi^{\beta-1/2} \left[\frac{1}{(\xi + x)^{2\beta}} - \frac{1}{(1 + \xi x)^{2\beta}} \right] \widetilde{\upsilon}_1(\xi) d\xi, \qquad (16)$$

$$2^{4-8\beta-(1/p)}\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\widetilde{\tau}_1(x)-$$
$$-\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta-(1/2p)}\widetilde{\upsilon}_1(x)=2^{2-4\beta}c_1(x). \tag{17}$$

Исключая $\widetilde{\tau}_1(x)$ из (16) и (17) и разделив обе части уравнения на $-\frac{\gamma}{2p}2^{4-8\beta-(1/p)}\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{1-2\beta}$, получим:

$$D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{|\xi-x|^{2\beta}}-\frac{1}{|1-\xi x|^{2\beta}}\right]\widetilde{\upsilon}_1(\xi)d\xi+$$
$$+D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{(\xi+x)^{2\beta}}-\frac{1}{(1+\xi x)^{2\beta}}\right]\widetilde{\upsilon}_1(\xi)d\xi+$$
$$+B_1(x)D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta-(1/2p)}\widetilde{\upsilon}_1(x)=g_1(x). \tag{18}$$

Здесь $B_1(x)=\frac{2p}{\gamma}2^{4-8\beta-(1/p)}x^{-1+\beta}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}$,

$g_1(x)=-\frac{2p}{\gamma}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}x^{2\beta-1}2^{-2+4\beta+(1/p)}c_1(x)$, $\gamma=\frac{\Gamma^2(\beta)}{\pi 2^{2-4\beta}\Gamma(2\beta)}$.

Подействуем на обе части (18) оператором $D_{0x}^{1-\beta}$. В результате, учитывая, что $D_{0x}^{\alpha}D_{0x}^{\beta}f=D_{0x}^{\alpha+\beta}f$, будем иметь:

$$D_{0x}^{1-2\beta}x^{\beta-1}\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{|\xi-x|^{2\beta}}-\frac{1}{|1-\xi x|^{2\beta}}\right]\widetilde{\upsilon}_1(\xi)d\xi+$$
$$+D_{0x}^{1-2\beta}x^{\beta-1}\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{(\xi+x)^{2\beta}}-\frac{1}{(1+\xi x)^{2\beta}}\right]\widetilde{\upsilon}_1(\xi)d\xi-$$
$$+D_{0x}^{1-\beta}B_1(x)D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta-(1/2p)}\widetilde{\upsilon}_1(x)=D_{0x}^{1-\beta}g_1(x). \tag{19}$$

После ряда преобразований интегралов в уравнении интегральное уравнение (19) примет вид:

$$c\widetilde{\upsilon}_1(x)+\int_0^1 k(x,t)\widetilde{\upsilon}_1(t)dt=g(x), \tag{20}$$

где $c=const$, $g(x)=c_3x^{1+1/(2p)-\beta}D_{0x}^{1-\beta}x^{2\beta-1}c_1(x)$, $c_3=-\frac{2p}{\gamma}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}2^{6\beta-3}$,

$$k(x,t)=\begin{cases}x^{1+1/2p-\beta}\left[k_1(x,t)+k_2(x,t)+k_3(x,t)\right],\ x\ge t,\\ x^{1+1/2p-\beta}\left[k_4(x,t)-k_5(x,t)-k_6(x,t)+k_7(x,t)\right],\ x\le t,\end{cases}$$

$$k_1(x,t)=\frac{\sin\pi\beta}{\pi}t^{-\beta-(1/2p)}\frac{d}{dx}\int_t^x\frac{B_1(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\beta}(\xi-t)^{\beta}},$$

$$k_2(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}t^{\beta-1/2}\int_t^x\frac{\xi^{\beta-1}d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}(\xi-t)^{2\beta}},$$

$$k_3(x)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^t\frac{\xi^{\beta-1}d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}},$$

$$k_4(x)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\xi^{\beta-1}d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}},$$

$$k_5(x,t)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\xi^{\beta-1}d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}(1-t\xi)^{2\beta}},$$

$$k_6(x,t)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\xi^{\beta-1}d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}(1+t\xi)^{2\beta}},$$

$$k_7(x,t)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\xi^{\beta-1}d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}(t+\xi)^{2\beta}}.$$

Далее рассмотрим о*сновные соотношения между* $\widetilde{\tau}_2(y)$, $\widetilde{\upsilon}_2(y)$, принесённые на $\Im_2$ из эллиптической Ω_3 [2] и гиперболической Ω_2 частей смешанной области Ω соответственно:

$$\widetilde{\tau}_2(y)=-\frac{\gamma}{2p}\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{|\xi-y|^{2\beta}}-\frac{1}{|1-\xi y|^{2\beta}}\right]\widetilde{\upsilon}_2(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{\gamma}{2p}\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{(\xi+y)^{2\beta}}-\frac{1}{(1+\xi y)^{2\beta}}\right]\widetilde{\upsilon}_2(\xi)d\xi, \qquad (21)$$

$$\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\left[(1-y)^{1-\beta}a_1(y)+y^{1-\beta}b_1(y)\right]\widetilde{\tau}_2(y)=2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left[(1-y)^{1-\beta}a_1(y)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot D_{0y}^{2\beta-1}y^{-1/(2p)}\widetilde{\upsilon}_2(y)+y^{1-\beta}b_1(y)D_{y1}^{2\beta-1}y^{-1/(2p)}\widetilde{\upsilon}_2(y)\right]+y^{1-\beta}(1-y)^{1-\beta}c_2(y). \qquad (22)$$

Исключая $\widetilde{\tau}_2(y)$ из (21) и (22) при $a_1(y)\neq 0$, разделив обе части уравнения на $2^{4\beta-2}\dfrac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}(1-y)^{1-\beta}a_1(y)$, получим:

$$A_1(y)\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{|\xi-y|^{2\beta}}-\frac{1}{(1-\xi y)^{2\beta}}\right]\widetilde{\upsilon}_2(\xi)d\xi+A_2(y)\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{(\xi+y)^{2\beta}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(1+\xi y)^{2\beta}}\right]\widetilde{\upsilon}_2(\xi)d\xi+D_{0y}^{2\beta-1}y^{-(1/2p)}\widetilde{\upsilon}_2(y)+$$

$$+A_2(y)D_{y1}^{2\beta-1}y^{-(1/2p)}\tilde{\upsilon}_2(y)=f_1(x), \tag{23}$$

где $A_1(y)=\dfrac{\gamma}{2p}\dfrac{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)2^{4\beta-2}}\dfrac{(1-y)^{1-\beta}a_1(y)+y^{1-\beta}b_1(y)}{(1-y)^{1-\beta}a_1(y)}$,

$$A_2(y)=\left(\frac{y}{1-y}\right)^{1-\beta}\frac{b_1(y)}{a_1(y)},\ f_1(y)=-y^{1-\beta}(1-y)^{1-\beta}c_2(y).$$

Подействуем на обе части (23) оператором $D_{0y}^{1-2\beta}$. В результате получим:

$$D_{0y}^{1-2\beta}A_1(y)\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{|\xi-y|^{2\beta}}-\frac{1}{|1-\xi y|^{2\beta}}\right]\tilde{\upsilon}_2(\xi)d\xi+$$
$$+D_{0y}^{1-2\beta}A_1(y)\int_0^1\xi^{\beta-1/2}\left[\frac{1}{(\xi+y)^{2\beta}}-\frac{1}{(1+\xi y)^{2\beta}}\right]\tilde{\upsilon}_2(\xi)d\xi+$$
$$+y^{-(1/2p)}\tilde{\upsilon}_2(y)+D_{0y}^{1-2\beta}A_2(y)D_{y1}^{2\beta-1}y^{-(1/2p)}\tilde{\upsilon}_2(y)=D_{0y}^{1-2\beta}f_1(y). \tag{24}$$

После ряда преобразований уравнение (24) принимает вид:

$$A(y)\tilde{\upsilon}_2(y)+\int_0^1 k^*(y,t)\tilde{\upsilon}_2(t)dt=f(y), \tag{25}$$

где $f(y)=-y^{1/2-\beta}(1-y)^{1-\beta}D_{0y}^{1-2\beta}y^{1-\beta}(1-y)^{1-\beta}c_2(y)$,

$$A(y)=(1-y)^{1-\beta}+\cos 2\pi\beta\frac{b_1(y)}{a_1(y)}y^{1-\beta}+c_4\frac{(1-y)^{1-\beta}a_1(y)+y^{1-\beta}b_1(y)}{a_1(y)},$$

$$c_4=\frac{\pi}{2p}2^{2-4\beta}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}[1+\pi\, ctg 2\pi\beta],$$

$$k^*(y,t)=\begin{cases} y^{1/2-\beta}(1-y)^{1-\beta}\left[k_4^*(y,t)+k_6^*(y,t)+k_8^*(y,t)\right],\ t\le y,\\ y^{1/2-\beta}(1-y)^{1-\beta}\begin{bmatrix}-k_1^*(y,t)-k_2^*(y,t)+k_3^*(y,t)+\\ +k_5^*(y,t)+k_7^*(y,t)\end{bmatrix},\ t\ge y,\end{cases}$$

$$k_1^*(y,t)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{A_1(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(1-t\xi)^{2\beta}},$$

$$k_2^*(y,t)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{A_1(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(1+t\xi)^{2\beta}}$$

$$k_3^*(y,t)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{A_1(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(t+\xi)^{2\beta}}.$$

$$k_4^*(y,t)=\frac{t^{-1/(2p)}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dy}\int_0^t\frac{A_2(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}},$$

$$k_5^*(y,t)=\frac{t^{-1/(2p)}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{A_2(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}},$$

$$k_6^*(y,t)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dy}\int_0^t\frac{A_1(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}},$$

$$k_7^*(y,t)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{A_1(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}},$$

$$k_8^*(y,t)=\frac{t^{\beta-1/2}}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dy}\int_t^y\frac{A_1(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(\xi-t)^{2\beta}}.$$

Таким образом, вопрос разрешимости задачи А эквивалентно редуцируется к вопросу разрешимости интегральных уравнений (20) и (25) относительно неизвестных функций $\widetilde{\upsilon}_1(x)$, $\widetilde{\upsilon}_2(y)$. Исследуем гладкость ядер $k(x,t)$, $k^*(y,t)$ и правых частей $g(x)$, $f(y)$ полученных уравнений. Из представления ядер $k(x,t)$, $k^*(y,t)$ видно, что поведение их в смысле гладкости будет аналогично поведению ядер $k_3(x,t)$, $k_4(x,t)$ и $k_4^*(y,t)$, $k_5^*(y,t)$ соответственно.

Поэтому ограничимся исследованием свойств только этих ядер. Очевидно, гладкость ядра $k(x,t)$ будет определяться гладкостью интегралов:

$$I_1(x,t)=t^{\beta-1}\frac{d}{dx}\int_0^t\frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}},\quad I_2(x,t)=t^{\beta-1}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}}.$$

После замены переменной интегрирования $\xi=tz$ и применения формулы [6]

$$\frac{d}{dz}z^{\alpha}F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\alpha z^{\alpha-1}F(\alpha+1,\beta,\gamma,z),\ |\arg(1-z)|<\pi$$

и формулы автотрансформации

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,z),\ |\arg(1-z)|<\pi$$

получим:

$$I_1(x,t)=t^{\beta-1}(t/x)^{-2\beta}(1-t/x)^{-1},\ I_2(x,t)=t^{\beta-1}(x/t)^{2\beta-1}(1-x/t)^{-1}.$$

С учётом $I_1(x,t)$, $I_2(x,t)$ можно переписать ядра $k_3(x,t)=\frac{x}{\Gamma(2\beta)}(x/t)^{3/2}\frac{1}{x-t}$, $k_4(x,t)=\frac{t}{\Gamma(2\beta)}(x/t)^{1/2}\frac{1}{t-x}$. Точно так же гладкость ядра $k^*(x,t)$ будет определяться гладкостью интегралов:

$$I_3(y,t)=t^{-1/(2p)}\frac{d}{dy}\int_0^t\frac{A_2(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}},$$

$$I_4(y,t)=t^{-1/(2p)}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{A_2(\xi)d\xi}{(y-\xi)^{1-2\beta}(t-\xi)^{2\beta}}.$$

После аналогичных вычислений имеем:

$$I_3(y,t)=(y/t)^{2\beta+1}\frac{A_2(t)}{t^{1/(2p)+1}}\frac{1}{y-t},\quad I_4(y,t)=(y/t)^{2\beta-1}\frac{A_2(y)}{t^{1/(2p)-1}}\frac{1}{t-y}.$$

С учётом последних рассуждений можем записать:

$$k_4^*(y,t)=\frac{A_2(t)}{\Gamma(2\beta)t^{1/(2p)+1}}(y/t)^{2\beta+1}\frac{1}{y-t},\quad k_5^*(y,t)=\frac{A_2(y)}{\Gamma(2\beta)t^{1/(2p)-1}}(y/t)^{2\beta-1}\frac{1}{t-y}.$$

Таким образом, ядра $k(x,t)$ и $k^*(y,t)$ непрерывно дифференцируемы в квадрате $\Im_1\times\Im_2$ при $x\neq t$, $y\neq t$ и допускают оценки $k(x,t)=o(1)|x-t|^{-1}$, $k^*(y,t)=o(1)|y-t|^{-1}$, где $o(1)$ означает ограниченную в $\Im_1\times\Im_2$ величину.

Несложно также установить гладкость правой части в (20), (25). С учётом свойств дробных интегралов можно заключить, что $g(x)\in C(\overline{\Im}_1)\cap C^1(\Im_1)$, $f(y)\in C(\overline{\Im}_2)\cap C^1(\Im_2)$. Причём при $x=0$, $y=0$ могут обращаться в бесконечность порядка $1/2$, а при $x=1$, $y=1$ они ограничены. Следовательно, при $c\neq 0$, $A(y)\neq 0$ система уравнений (20), (25) есть система сингулярных интегральных уравнений.

Условия $c^2+\pi^2k_1^2(x,x)\neq 0$, $A^2(y)+\pi^2\left[k_1^*(y,y)\right]^2\neq 0$, где $k_1(x,t)=k(x,t)|x-t|$, $k_1^*(y,t)=k^*(y,t)|y-t|$, гарантируют существование регуляризаторов, приводящих сингулярные интегральные уравнения (20), (25) к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых будет следовать из единственности решения задачи А.

По найденным $\tilde{\upsilon}_i(t)$ можно найти $\tilde{\tau}_i(t)$, $i=1,2$; $t\in\Im_1,\Im_2$. Следовательно, искомое решение задачи А в областях Ω_1, Ω_2 ищется как решение задачи Коши.

Заключение

В работе рассмотрено уравнение смешанного типа в конечной односвязной области Ω, ограниченной кусочно-гладкой кривой Жордана σ с концами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, расположенной в первом квадранте $x>0$, $y>0$, и характеристиками AD, BC, CD уравнения. Существование и единственность решения уравнения с нелокальными условиями в случае производных дробного порядка $1-\beta$ были доказаны в [2]. Отметим, что рассмотренная в работе задача относится к классу краевых задач со смещением, сформулированных А. М. Нахушевым [3].

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. Салахитдинов М. С., Менгзияев Б. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 133–139.
3. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. Москва: Наука, 2006. 287 с.
4. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, 2005. 224 с.
5. Репин О. А., Кумыкова С. К. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 755–763.
6. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Санкт-Петербург: Лань, 2010. 368 с.
7. Шхануков М. Х., Митропольский Ю. А., Березовский А. А. Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения // Украинский математический журнал. 1995. Т. 47, № 6. С. 790.
8. Алиханов А. А. Нелокальные краевые задачи в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 7. С. 924–931.
9. Разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоёмкостью / Ф. М. Нахушева, Ф. Х. Кудаева, А. А. Кайгермазов, М. М. Кармоков // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. С. 839.
10. Нахушева Ф. М., Джанкулаева М. А., Нахушева Д. А. Уравнение теплопроводности с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоёмкостью // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. Ч. 1, № 8. С. 22–27.
11. Численное решение уравнения диффузии с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоёмкостью / Ф. М. Нахушева, В. А. Водахова, М. А. Джанкулаева, З. Х. Гучаева // Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов международной научной конференции. Нальчик, 2019. С. 104–110.
12. Керефов М. А., Нахушева Ф. М., Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова с сосредоточенной теплоёмкостью // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24, № 3. С. 23–29.

Статья поступила в редакцию 06.12.2023; одобрена после рецензирования 15.03.2024; принята к публикации 29.03.2024.

A PROBLEM WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS
ON CHARACTERISTICS FOR A MIXED-TYPE EQUATION
WITH TWO LINES OF BIRTH

Nahusheva Fatima Muhamedovna
Ph.D. (Phys. & Math. Sci.), Associate Professor,
Kabardino-Balkarian State University
173 Chernyshevsky St, Nalchik, 360004, Russia
fatima-nakhusheva@mail.ru

Vodakhova Valentina Arkadevna
Ph.D. (Phys. & Math. Sci.), Associate Professor,
Kabardino-Balkarian State University
173 Chernyshevsky St, Nalchik, 360004, Russia
v.a.vod@yandex.ru

Guchaeva Zera Hamidbievna
Senior Lecturer,
Kabardino-Balkarian State University
173 Chernyshevsky St, Nalchik, 360004, Russia
proporwiz@yandex.ru

Kodzokov Azamat Khasanovich
Senior Lecturer,
Kabardino-Balkarian State University
173 Chernyshevsky St, Nalchik, 360004, Russia
kodzoko@mail.ru

Abstract. In this scientific article "A problem with non-local boundary conditions on characteristics for a mixed-type equation with two lines of degeneracy", a proof of the uniqueness and existence of a Cauchy solution for a mixed-type equation with two lines of degeneracy is given. A problem with non-local boundary conditions on the characteristics of the equation is investigated to find a regular solution for a mixed-type equation. Non-local conditions contain fractional operators in the sense of Riem-na-Liouville integro-differentiation.

It is proved that when certain conditions are met, there cannot be more than one solution. The question of the solvability of the problem is equivalently reduced to the question of the solvability of a system of integral equations, which is a system of singular integral equations. A condition is found that guarantees the existence of a regulator that leads a system of singular integral equations to Fredholm equations of the second kind. The possibility of reducing the problem to equivalent Fredholm integral equations of the second kind and the uniqueness of the desired solution implies the existence of a solution to the problem.

Keywords: non-local boundary conditions, regular solution of the problem, homogeneous problem, fractional order derivative, fractional integro-differentiation operator, singular integral equations, regularizer, point affixes, the Jordan curve.

For citation

A Problem With Non-Local Boundary Conditions on Characteristics for a Mixed-Type Equation With Two Lines of Birth / *F. M. Nahusheva, V. A. Vodakhova, Z. H. Guchaeva, A. Kh. Kodzokov* // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 1. P. 3–17.

The article was submitted 06.12.2023; approved after reviewing 15.03.2024; accepted for publication 29.03.2024.