

Научная статья

УДК 51-7, 517.95

DOI: 10.18101/2304-5728-2024-1-37-45

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ НАГРЕВЕ ПЛАСТИНЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

© **Ханхасаев Владислав Николаевич**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
Восточно-Сибирский государственный  
университет технологий и управления  
Россия, г. Улан-Удэ, 670033, ул. Ключевская, 40В  
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова  
Россия, г. Улан-Удэ, 670000, ул. Смолина, 24а  
hanhvladnick@mail.ru

© **Баиров Сафрон Анатольевич**

аспирант кафедры «Математика им. Ц. Б. Шойнжурова»,  
Восточно-Сибирский государственный  
университет технологий и управления  
Россия, г. Улан-Удэ, 670033, ул. Ключевская, 40В  
bairov.sofron@gmail.com

**Аннотация.** В статье рассматривается математическая модель и конечно-разностная схема процесса нагрева пластины, бесконечной по двум пространственным переменным. Приводятся недостатки использования классического параболического уравнения теплопроводности для данного случая, а также обоснование использования смешанного уравнения. В разностных схемах применяется интегро-интерполяционный метод для уменьшения погрешностей. В качестве краевых задач выбраны две аналогичные задачи, но с разными коэффициентами теплопроводности. В первом случае коэффициент теплопроводности линейный, а во втором — нелинейный. Для решения уравнения с нелинейным коэффициентом теплопроводности используется метод Ньютона. Источник тепла в параболической части уравнения равен 0, а в гиперболической части уравнения начинается резкий нагрев. Поставлена и численно решена смешанная задача с краевыми условиями третьего рода.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейные уравнения, метод конечных разностей, третье краевое условие, тепловой баланс, гипербола-параболические уравнения, метод Ньютона.

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-21-00269, <https://rscf.ru/project/23-21-00269/>.

**Для цитирования**

Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Моделирование распределения температуры при нагреве пластины с применением смешанного уравнения теплопроводности // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 1. С. 37–45.

**Введение**

Расчет полей температуры с помощью обобщения закона Фурье часто применяют для процессов, которые протекают за короткий промежуток времени (при наносекундных лазерных высокоинтенсивных воздействиях), при исследовании импульсных процессов нагрева пластин (плазменная обработка материалов, импульсный нагрев плат микросхем и т. д.) [1].

При этом фронт возникающей тепловой волны описывают через гиперболическое уравнение теплопроводности. Это уравнение показывает распределение тепловых волн с конечной скоростью в отличие от параболического случая для обычного закона Фурье [2, 3].

Применение смешанного уравнения теплопроводности необходимо для включения в численный расчет процесса импульсного нагрева, описываемого гиперболическим уравнением, квазистационарного этапа пока еще холодной пластины. Это выяснит изменение полей температуры с возникновением так называемого времени релаксации теплового потока для существенно нестационарного нагрева [4].

В данной статье исследуем задачу нахождения температурного распределения в пластине, бесконечной по двум пространственным переменным, с импульсным нагревом её в промежуточный момент времени и выполнением краевых условий на потоки тепла 3-го рода. Изучим полученную математическую модель, используя как линейное, так и нелинейное смешанные уравнения теплопроводности и применяя метод теплового баланса.

**1 Линейная задача**

Рассматривается бесконечная пластина по осям  $y$  и  $z$ , с постоянной шириной по оси  $x$  размером  $X$ , с однородными физическими характеристиками. При этом в численном расчете переменные  $y$  и  $z$  не будем упоминать в списке, считая их просто параметрами. Начальное распределение температуры внутри пластины описывается функцией  $u_0(x)$  в момент времени  $T_1$ . Потоки тепла окружающей среды на боковых границах пластины обозначены как  $q_0$  на левой стороне и  $q_X$  на правой. Теплообмен между пластиной и окружающей средой подчиняется закону Ньютона (граничные условия третьего рода). Необходимо найти поле температуры внутри пластины в зависимости от координаты  $x$  в

любой момент времени от  $T_1$  до  $T_2$ . Даны теплофизические свойства материала: удельная теплоемкость при постоянном объеме  $c_v$ , удельная плотность  $\rho$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , коэффициенты теплопередачи  $\alpha_0$  и  $\alpha_X$  на боковых границах пластины, коэффициент внутреннего теплоотвода  $c$  и внутренний источник тепла  $f(x, t)$ .

$$k(x, t)u_{tt} + c_v(x, t) \cdot \rho(x, t)u_t = (\lambda(x, t)u_x)_x + c(x, t)u + f(x, t) \quad (1)$$

$$x = 0 : -\lambda(0, t)\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha_0 u(0, t) = q_0 \quad (2)$$

$$x = X : \lambda(X, t)\frac{\partial u(X, t)}{\partial x} + \alpha_X u(X, t) = q_X \quad (3)$$

$$u(x, t)|_{t=T_1} = u_0(x). \quad (4)$$

При работе с уравнениями, содержащими переменные коэффициенты (1), и особенно с нелинейными уравнениями, замена производных конечными разностями может привести к появлению значительной погрешности или к несостоятельности схемы. В таких случаях предпочтительно использовать консервативные разностные схемы. Для обеспечения соответствия разностных схем законам сохранения энергии, массы и количества движения важно, чтобы полученные дифференциальные уравнения отражали основные законы сохранения для произвольного объема сплошной среды. Очевидно, что для получения разностного решения, которое точно описывает процесс изменения температурного поля как количественно, так и качественно, важно требовать выполнения закона сохранения энергии [4].

Для устойчивого разностного решения необходимо обеспечить выполнение закона сохранения для каждого элементарного объема, а также для любой области, составленной из этих объемов. Для этого требуется равенство значений тепловых потоков через общие границы соседних объемов для интегро-интерполяционного метода.

Следует подчеркнуть, что для достижения достоверности результатов при использовании метода теплового баланса обязательным является строгое соблюдение установленных критериев, когда максимальные габариты разбиений стремятся к нулю. Такой подход обеспечивает верифицируемость получаемых решений даже в условиях применения относительно крупных сеток, что особенно актуально для неявных разностных схем.

Эффективный коэффициент теплопроводности в линейном случае (1) будем вычислять по формуле:

$$\lambda(x_i, t_j)_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{[\lambda((i \pm 1) \cdot h, T_1 + j \cdot \tau) + \lambda(i \cdot h, T_1 + j \cdot \tau)]}{2}.$$

Консервативная неявная разностная схема выглядит так:

$$\begin{aligned} k(x_i, t_j) \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} + a(x_i, t_j) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \\ = (\lambda(x_i, t_j)_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h} - \lambda(x_i, t_j)_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}}{h}) \frac{1}{h} + \\ + c(x_i, t_j) u_{i,j+1} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t) dx dt. \quad (5) \end{aligned}$$

Рассмотрим разностную схему (5) и её численную реализацию в программной среде Mathcad-15 в области  $G = [0, X] \times [T_1, T_2]$ .  $T_1 < 0, T_2 > 0$ . Для исследуемой физической модели,  $a(x, t) = c_v \cdot \rho, \forall (x, t) \in G$ ;  $k(x, t) = 0, f(x, t) = f1(x, t) = 0, t \leq 0$ ;  $k(x, t) > 0, f(x, t) = f2(x, t) > 0, t > 0$ , т. е. при  $t \leq 0$  имеем классическое параболическое уравнение теплопроводности, а при  $t > 0$  — гиперболическое уравнение. Приведем постановку смешанной задачи (1)–(4) со следующими конкретными расчетными данными [5].

#### Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим задачу(1)–(4). Найти распределение температурного поля в указанной бесконечной пластине с  $X = \pi$  и временем расчета:  $T_1 = -5, T_2 = 20$ . Начальное условие:

$$u(x, t)|_{t=T_1} = u_0(x) = 10 \sin(x).$$

Краевые условия (2),(3):  $q_0 = 5, q_X = 10, \alpha_0 = 3.5, \alpha_X = 3.5$ ; коэффициенты:  $k = 0$  при  $t \leq 0, k = 1$  при  $t > 0, c = 0, \lambda = 3, a = 672$ .

Источник тепла:  $f1(x, t) = 0, f2(x, t) = 100000 \sin(x) \sin(t)$ .

Приведенная неявная разностная схема решается с помощью метода теплового баланса.

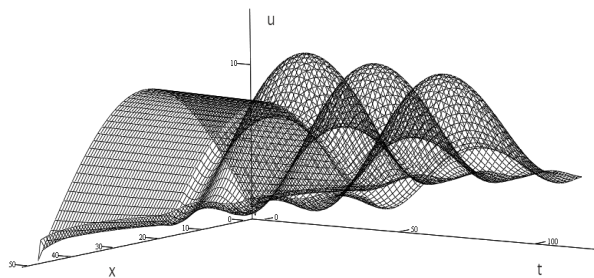


Рис. 1. График решения линейного уравнения

График численного решения этой задачи хорошо согласуется в параболической части с экспериментальными результатами [6]. Также для этих значений коэффициентов легко показать с помощью метода априорных оценок [7], что для внутреннего источника тепла  $f \in W_2^1(G)$  существует единственное поле температуры  $u(x, t)$  этой смешанной краевой задачи из пространства  $W_2^2(G)$ , причем интерполяции  $u_h^\tau$  дискретных значений разностной задачи сходятся слабо к решению  $u(x, t)$  в  $W_2^1(G)$  при стремлении  $h$  и  $\tau$  к нулю.

## 2 Нелинейная задача

Необходимость решения нелинейных задач появляется при исследовании процессов, в которых наблюдается широкий диапазон температур. Скажем, теплопроводность сталей, применяемых в конструкциях криогенных систем, изменяется от 1 до 15 Вт/(м·К) на отрезке возрастания температуры от 5К до 300К.

При аналитическом решении нелинейных задач встречаются математические трудности, требующие специальных методов. Точная формула решения и метод её нахождения зависят от функционального описания нелинейностей в дифференциальных уравнениях и граничных условиях. Численное же решение нелинейных задач в этом плане гораздо проще. Алгоритмы их численного решения можно относительно легко построить, опираясь на конечно-разностные схемы, использованные как для линейных задач, так и для нелинейных [8]. Применим эти методы на примере следующего нелинейного уравнения:

$$k(x, t)u_{tt} + c_v(x, t) \cdot \rho(x, t)u_t = (\lambda(u, x, t)u_x)_x + c(x, t)u + f(x, t), \quad (6)$$

где  $\lambda(u, x, t)$  — нелинейная функция температуры, описывающая эффективный коэффициент теплопроводности по формуле:

$$\lambda(u_{i,j+1}, x_i, t_{j+1})_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{[\lambda(u_{i \pm 1, j+1}, x_{i \pm 1}, t_{j+1}) + \lambda(u_{i, j+1}, x_i, t_{j+1})]}{2}.$$

Разностное уравнение для (6) с учетом теплового баланса теперь будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} k(x_i, t_{j+1}) \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} + a(x_i, t_{j+1}) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \\ = (\lambda(u_{i,j+1}, x_i, t_{j+1}))_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h} - \\ - \lambda(u_{i,j+1}, x_i, t_{j+1})_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}}{h} \frac{1}{h} + \\ + c(x_i, t_{j+1}) u_{i,j+1} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t) dx dt. \quad (7) \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу (6),(2),(3),(4) с нелинейной теплопроводностью, но с аналогичными начальными и краевыми условиями по консервативной разностной схеме(7), где  $\lambda(u, x, t) = 0,5 \cdot u^2 + 2$ . Метод Ньютона используется для линеаризации разностной схемы в случае, когда коэффициенты зависят от температуры по степенным функциям и могут быть дифференцированы. Величина  $u$  на этой итерации  $u_i^s$  выглядит так:

$$u_i^s = u_i^{s-1} + \Delta u_i^s, \quad (8)$$

где  $s$  — номер итерации,  $\Delta u_i^s$  — приращение температуры на  $s$ -й итерации. Заменяем функцию  $\lambda$  уравнением, найденным через разложение в ряд Тейлора в точке  $u_i^s - 1$ :

$$\lambda_i^s = \lambda_i^{s-1} + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^{s-1} \Delta u_i^s. \quad (9)$$

Производная в уравнении (9) рассчитывается на основе значений  $u$  на прошлой итерации. Следовательно, в правой части уравнения (9) неизвестным остаётся только  $\Delta u_i^s$ . Подставляя уравнения (9) и (8) в систему нелинейных разностных уравнений и пренебрегая членами, содержащими  $(\Delta u_i^s)^2$ , мы получаем систему линейных уравнений для приращений  $\Delta u_i^s$ . Данная система характеризуется трехдиагональной матрицей и может быть решена с использованием прогоночных методов.

При использовании метода Ньютона для линеаризации на каждом шаге решается задача относительно изменений  $\Delta u_i^s$ . Следующими определяются значения  $u_i^s$  в соответствии с уравнением (8). Итерации прекращаем при достижении заданной точности. Данный метод демонстрирует более высокую скорость сходимости в сравнении с методом простых итераций, однако он требует больших усилий при программной реализации, а также подразумевает вычисление производных от функции теплопроводности  $\lambda$  [9].

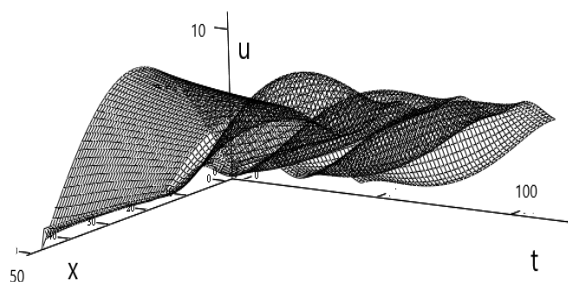


Рис. 2. График решения нелинейного уравнения

График численного решения этой задачи в программном пакете Mathcad 15 в нелинейном случае приводится на рис. 2, который отображает важные особенности решения в линейном случае.

### Заключение

Численное решение поставленных корректно краевых задач для предложенного гипербола-параболического уравнения как в линейном, так и в нелинейном случае с помощью консервативной схемы позволяет довольно точно описать процессы, связанные с нагревом указанной пластины. При этом расчет проводится в широко распространённой сейчас, достаточно доступной и наглядной в инженерных расчетах программной среде Mathcad-15. В дальнейшем будет разработана программа для многослойных ограниченных пластин из композиционных материалов и использована эта математическая модель для решения широкого спектра физических задач с двумя и тремя пространственными переменными в анизотропном случае с общими краевыми условиями третьего рода по всем координатам.

### Литература

1. Петрова Л. С. Математическое моделирование процессов нагрева кусочно-однородных тел с учетом релаксации теплового потока // НАУКОВЕДЕНИЕ. 2017. Т. 9, № 1. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/38TVN117.pdf> (дата обращения: 20.01.2024).
2. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. 2-е изд., доп. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 298 с.
3. Gunter Scharf. Approach to steady state in the heat equation and the hyperbolic heat transfer equation // arXiv:1612.08527 [math-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/1612.08527> (дата обращения: 15.01.2024).

4. Ханхасаев В. Н., Дармахаев Э. В. О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения // Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 1. С. 98–109.
5. Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Численное решение по явной разностной схеме смешанного уравнения теплопроводности со вторыми краевыми условиями // МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ: материалы научной конференции с международным участием, посвященной 90-летию БГПИ-БГУ. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2022. С. 132–136.
6. Решение инженерных задач в пакете MathCAD: учебное пособие / Ю. Е. Воскобойников [и др.]; под редакцией Ю. Е. Воскобойникова; Новосибир. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2013. 120 с.
7. Терехов А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: сборник статей. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1979. С. 128–136.
8. Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Решение нелинейного по коэффициенту теплопроводности смешанного уравнения интегро-интерполяционным методом с третьим краевым условием // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО23): материалы VIII Международной конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2023. С. 224–227. DOI 10.53980/9785907599970-224.
9. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена: учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. вузов. Москва: Высшая школа, 1990. 207 с.

*Статья поступила в редакцию 25.02.2024; одобрена после рецензирования 28.03.2024; принята к публикации 29.03.2024.*

#### SIMULATION OF TEMPERATURE DISTRIBUTION WHEN HEATING A PLATE USING A MIXED HEAT CONDUCTIVITY EQUATION

*Vladislav N. Khankhasaev*

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,  
Math Department named after Ts.B. Shoynzhurov  
East Siberia State University of Technology and Management  
Klyuchevskaya St. 40B, Ulan-Ude 670033, Russia  
Banzarov Buryat State University  
Smolina St. 24a, Ulan-Ude 670000, Russia  
hanhvladnick@mail.ru



*Safron A. Bairov*

Graduate student (Phys. and Math.),  
Math Department named after Ts.B. Shoynzhurov  
East Siberia State University of Technology and Management  
Klyuchevskaya St. 40B, Ulan-Ude 670033, Russia  
bairov.sofron@gmail.com

*Abstract.* The paper discusses a mathematical model and a finite-difference scheme for the heating process of a plate that is infinite in two spatial variables. The disadvantages of using the classical parabolic heat equation for this case and the rationale for using a mixed equation are given. Difference schemes use an integro-interpolation method to reduce errors. Two similar problems, but with different thermal conductivity coefficients, were chosen as boundary value problems. In the first case, the thermal conductivity coefficient is linear, and in the second, it is nonlinear. To solve the equation with a nonlinear thermal conductivity coefficient, Newton's method is used. The heat source in the parabolic part of the equation is equal to 0, and in the hyperbolic part of the equation sharp heating begins. The mixed problem with boundary conditions of the third kind is formulated and numerically solved.

*Keywords:* hyperbolic heat equation, nonlinear equations, finite difference method, third boundary condition, heat balance, hyperbolic-parabolic equations, Newton's method.

*For citation*

*Khankhasaev V. N., Bairov S. A. Simulation of Temperature Distribution When Heating a Plate Using a Mixed Heat Conductivity Equation // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 1. P. 37–45.*

*The article was submitted 25.02.2024; approved after reviewing 28.03.2024; accepted for publication 29.03.2024.*