АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

УДК 517.11+517.98
doi: 10.18101/2304-5728-2016-2-3-10

© В. И. Антонов

Булевы оценки и пучки некоторых классов решеточно упорядоченных групп

В работе изучаются семантические оценивания, соответствующие каноническим пучкам, связанных с исходными алгебраическими системами. На этой основе изучаются хорновы теории разных классов *l*-групп.

Ключевые слова: булевозначный анализ, оценки, пучки, предпучки, решеточно упорядоченные группы, ортополные B-группы, ортополные проективные *l*-группы, хорновы теории.

© V. I. Antonov

Boolean evaluation and sheaves of some classes of lattice-ordered groups

The article considers semantic evaluation, corresponding canonical sheaves associated with the initial algebraic systems. Based on this study Horn theory of various classes *l*-groups.

Keywords: Boolean valued analysis, evaluations, sheaves, pre-sheaves, lattice-ordered groups, orthocomplete B-group, orthocomplete projective *l*-group, Horn theory.

Введение

Гейтинговозначный анализ и, в частности, булевозначный анализ алгебраических структур представляет собой один из путей приложения методов теории моделей в алгебре, в том числе, в теории колец и групп.

Конструкция булевозначного универсума первоначально разрабатывалась для решения сложных теоретико-множественных проблем, в частности, для доказательства независимости от аксиом теории множеств некоторых гипотез теории множеств, например, континуум-гипотезы.

Примеры таких результатов можно найти в работах П. Вопенка, Д. Скотта, Р. Соловея, Г. Такеути, В. А. Любецкого и Е. И. Гордона. Однако в дальнейшем выяснилось, что гейтинговозначный и булевозначный анализы могут применяться и для решения чисто алгебраических проблем, например, в фундаментальных работах С. С. Кутателадзе и А. Г. Кусраева [4, 5]. Для алгебраических структур метод гейтинговозначного анализа эффективен, если удаётся построить такой содержательный пучок $F(\bullet)$ на полной гейтинговой (или булевой) алгебре Ω, что $K = F(1)$ (пучок $F(\bullet)$ называется представляющим систему *K*). В этой связи важен вопрос о наличии такого пучка $F(\bullet)$. Примеры таких пучков можно найти в работах Р. Пирса, К. Каймела, Ж. Даунса, К. Гофмана, Ф. Борсо, Х. Сименса, Ван Де Боша; однако все эти пучки заданы на полных гейтинговых алгебрах-топологиях τ некоторых топологических пространств, связанных с исходной системой K. Такому пучку $F(\bullet)$ соответствует следующая оценка $[\![\bullet]\!]_\tau$, определённая на множестве всех формул $\varphi(k_1,...,k_n)$ с параметрами $k_1,...,k_n \in K$. А именно,

$$[\![k=t]\!] \rightleftharpoons \sup\left\{u \in \Omega \mid \rho_1^u(k) = \rho^1(t)\right\}$$

и аналогично для других атомарных формул; и $[\![\varphi \wedge \psi]\!] \rightleftharpoons \inf\left\{[\![\varphi]\!],[\![\psi]\!]\right\}$, $[\![\exists x\varphi]\!] \rightleftharpoons \sup\left\{[\![\varphi(k)]\!] \mid k \in K\right\}$ и аналогично для других связок, где смысл знака $\rightleftharpoons$ «равно по определению» или «эквивалентно». Эта оценка замкнута относительно только интуиционистской выводимости (это означает: если $[\![\varphi]\!]_\tau = 1$ и ψ интуиционистски выводима из φ, то $[\![\psi]\!]_\tau = 1$. Поэтому особый интерес представляют пучки $F(\bullet)$, определённые на полных булевых алгебрах B. В этом случае мы имеем: если $[\![\varphi]\!]_B = 1$ и ψ выводима из φ, то $[\![\psi]\!]_B = 1$, т.е. соответствующая пучку оценка замкнута относительно классической выводимости. Оценка $[\![\bullet]\!]$, определённая в связи с алгебраической системой K называется ещё семантическим оцениванием в алгебраической системе K. В работе изучаются семантические оценивания, соответствующие каноническим пучкам, связанных с исходными алгебраическими системами. На этой основе изучаются хорновы теории разных классов l-групп.

Булевы оценки решеточно упорядоченных групп

Пусть G – ортополная B-группа и $B(G)$ – полная булева алгебра ее дополняемых l-идеалов, $F(\bullet)$ – соответствующий канонический пучок, представляющий G [7]. В этом пучке атомарная оценка равенства двух глобальных элементов l-группы G имеет вид:

$$[\![q_1 = q_2]\!] = \vee\left\{N \in B(G) \mid N(q_1) = N(q_2)\right\}, \text{ где } q_1, q_2 \in G.$$

Вычислим оценку

$$[\![q_1 \le q_2]\!] = [\![q_1 \vee q_2 = q_2]\!] = \vee\left\{N \in B(G) \mid N(q_1) \vee N(q_2) = N(q_2)\right\} =$$
$$= \vee\left\{N \in B(G) \mid N(q_1) \vee N(q_2) = N(q_2)\right\}.$$

Значит, $[\![q_1 \le q_2]\!] = \vee\left\{N \in B(G) \mid N(q_1) \le N(q_2)\right\}$.

Для вычисления оценок $[\![t_1 \le t_2]\!]$ и $[\![t_1 = t_2]\!]$, где t_1, t_2 – термы в языке l-групп, нужно заменить t_1, t_2 на их значения, вычисленные в l-группе G.

Оценка произвольной формулы φ определяется индукцией по длине построения этой формулы, а именно, $[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!] = [\![\varphi_1]\!] \cap [\![\varphi_2]\!]$,

$[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!] = [\![\varphi_1]\!] \cup [\![\varphi_2]\!]$, $[\![\neg\varphi]\!] = \neg[\![\varphi]\!]$, где в правой части $\neg$ – дополнение в булевой алгебре $B(G)$, $[\![\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2]\!] = [\![\varphi_1]\!] \to [\![\varphi_2]\!]$, где $u \to v$ по определению равно $(\neg u \cup v)$, $[\![\exists x\varphi(x)]\!] = \vee_{q\in G}[\![\varphi(q)]\!]$ и $[\![\forall x\varphi(x)]\!] = \wedge_{q\in G}[\![\varphi(q)]\!]$.

Справедлива следующая

Теорема 1. [2] а) Если B – полная булева алгебра и $ZFC \mid\!-\varphi$, то $[\![\varphi]\!] = 1_B$, где 1_B – наибольший элемент B.

б) Если B – полная булева алгебра и φ – любая формула, выводимая в обычном, классическом исчислении предикатов с равенством PI, то $[\![\varphi]\!] = 1_B$, где 1_B – наибольший элемент B.

Предложение 1. Пусть G – ортополная B-группа и φ – любая формула в языке l-групп. Тогда выполняется соотношение $[\![\exists x\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(\tilde{q})]\!]$ для некоторого $\tilde{q} \in G$.

Доказательство. По определению имеем $[\![\exists x\varphi(x)]\!] = \vee_{q\in G}[\![\varphi(q)]\!]$.

Обозначим $N = [\![\exists x\varphi(x)]\!]$ и $N(q) = [\![\varphi(q)]\!]$. Как указано в [2], существуют $N'_q \in B(G)$ такие, что $N = \vee_q N'_q, N'_q \wedge N'_h = 0$, где $q \neq h$. Имеем, $[\![N'_q(q) = q]\!] \geq N'_q$ т.к. $N'_q(N'_q(q) - q) = 0$. Значит, из теоремы 1б) имеем $[\![\varphi(N'_q(q))]\!] \geq [\![N'_q(q) = q]\!] \wedge [\![\varphi(q)]\!] \geq N'_q$.

Множество $\{N'_q(q) \mid q \in G\}$ согласовано, т.к. N'_q – дизъюнктны. Значит, из пучковости G следует, что существует $\widetilde{(q)} \in N$. $N'_q(\tilde{q}) = N'_q(q)$ для любого $q \in G$. Это означает, что $[\![\tilde{q} = N'_q(q)]\!] \geq N'_q$. Следовательно, по теореме 1б) имеем

$[\![\varphi(\tilde{q})]\!] \geq [\![\tilde{q} = N'_q(q)]\!] \wedge [\![\varphi(N'_q(q))]\!] \geq N'_q$ для всех $q \in G$. Итак, имеем $[\![\varphi(\tilde{q})]\!] \geq \vee_{q\in G} N'_q = N$. С другой стороны $[\![\varphi(\tilde{q})]\!] \leq N$, т.к. $N = \vee_{q\in G}[\![\varphi(\tilde{q})]\!]$.

Значит, $[\![\varphi(\tilde{q})]\!] = N$. Итак, $[\![\exists x\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(\tilde{q})]\!]$ для некоторого $q \in G$.□

Напомним, что формула A на языке l-групп первой ступени называется хорновой, если она равносильна формуле вида

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_mx_{m1})(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \tag{1}$$

где Q_i – один из кванторов $\forall, \exists$, а каждый член A_i – это формула одного из следующих видов: а) P_0; б) $(\wedge_{i=1}^n P_i) \Rightarrow P_0$; в) $\wedge_{i=1}^k(\neg P_i)$, где $P_0, P_1, ..., P_k$ – атомарные формулы языка l-групп.

Предложение 2. Пусть G – ортополная B-группа и φ – любая хорнова формула в языке l-групп. Тогда выполняется

$$[\![\varphi_G]\!] = 1_G \Rightarrow (G \models \varphi), \tag{2}$$

где 1_G – наибольший элемент булевой алгебры $B(G)$.

Доказательство. В силу теоремы 1, достаточно рассмотреть формулу вида (1). Доказательство проведём индукцией по длине построения формулы (1). Импликация (2) в случае а) очевидна. Даже в случае а) вместо импликации (2) выполняется эквивалентность. Рассмотрим случай б). Пусть $\left[\!\left[\wedge_{i=1}^{k} P_i \Rightarrow P_0 \right]\!\right] = 1_G$, $G = \wedge_{i=1}^{k} P_i$. Тогда $G = P_i$ для всех $i = 1,...,k$. Значит, по а) имеем $\left[\!\left[P_i \right]\!\right] = 1_G$ для всех $i = 1,...,k$. Следовательно, $\left[\!\left[\wedge_{i=1}^{k} P_i \right]\!\right] = 1_G$. Из $\left[\!\left[\wedge_{i=1}^{k} P_i \Rightarrow P_0 \right]\!\right] = 1_G$ следует $\left[\!\left[\wedge_{i=1}^{k} P_i \right]\!\right] \le \left[\!\left[P_0 \right]\!\right]$. Отсюда имеем $\left[\!\left[P_0 \right]\!\right] = 1_G$. Значит, по а) получим $G_k \models P_0$.

в)Пусть $\left[\!\left[\wedge_{i=1}^{k} (\neg P_i) \right]\!\right] = 1_G$ и $G \not\models \vee_{i=1}^{k} (\neg P_i)$.

Тогда $G \models \vee_{i=1}^{k} (\neg P_i)$. Следовательно, $\left[\!\left[P_i \right]\!\right] = 1_G$ для всех $i = 1,...,k$.

Из $\left[\!\left[\wedge_{i=1}^{k} (\neg P_i) \right]\!\right] = 1_G$ следует, что существует хотя бы одна формула P_{i_0} такая, что $\left[\!\left[\neg P_{i_0} \right]\!\right] \neq \{0\}$. Значит, $\left[\!\left[\neg P_{i_0} \right]\!\right] \wedge \left[\!\left[P_{i_0} \right]\!\right] \neq \{0\}$. Далее, для конъюктивности и квантора всеобщности импликация (2) очевидна. Импликация (2) для квантора существования следует из предложения 1. □

Напомним, что l-группа G называется проективной, если $G = q^{\perp} + q^{\perp\perp}$ для всех $q \in G$.

Определение 1. l-группа G называется квазирегулярной, если $G = \langle q \rangle + q^{\perp}$ и $\langle q \rangle \cap q^{\perp} = \{0\}$ для любого $q \in G$, где $\langle q \rangle$ главный l-идеал, порожденный элементом $q \in G$. Другими словами, любой главный l-идеал $\langle q \rangle$ является дополняемым l-идеалом и его дополнением будет $q^{\perp}$.□

Из определения квазирегулярной l-группы следует, что $q^{\perp}$ является l-идеалом для любого $q \in G$. Значит, $\langle q \rangle^{\perp} = q^{\perp}$ для любого $q \in G$. Отсюда по свойству поляр получаем $\langle q \rangle = q^{\perp\perp}$. Следовательно, любая квазирегулярная l-группа является проективной l-группой.

Напомним, что l-группа G называется l-простой, если она не имеет собственных l-идеалов. □

Главный l-идеал $\langle q \rangle$, порожденный элементом q l-группы G, имеет вид

$$\langle q \rangle = \left\{ x \in G \mid \exists n \in N \exists q_1, q_2, ..., q_n \in G(|x| \le \sum_{i=1}^{n} -q_i + q + q_i \,|) \right\}.$$

Теорема 2. Пусть G – ортополная B-группа. Тогда выполняется следующие:

а) G – проективная l-группа тогда и только тогда, когда

$$\left[\!\left[G - \textit{линейно упорядоченная группа} \right]\!\right] = 1_G.$$

б) G – квазирегулярная l-группа тогда и только тогда, когда

$$[\![G - \textit{линейно упорядоченная } l - \textit{простая группа}]\!] = 1_G$$

Доказательство. а) Пусть G – проективная l-группа. Тогда имеем $[\![q = 0 = q^{\perp}]\!]$ для любого $q \in G$. Действительно, эквивалентны следующие соотношения $N(q) = 0$, $q \in N^{\perp}$ и $N = N^{\perp\perp} \subseteq q^{\perp}$ для любых $N \in B(G)$ и $q \in G$.

Вычислим оценку

$$[\![G - \textit{линейно упорядоченная группа}]\!] = \wedge_{x,y \in G}([\![x \le y]\!] \cup [\![x \ge y]\!])$$

$$= \wedge_{x,y \in G}([\![x - y \le 0]\!] \cup [\![x - y \ge 0]\!]) = \wedge_{q \in G}([\![q \le 0]\!] \cup [\![q \ge 0]\!]) .$$

Пусть $q \in G$.

Тогда

$$[\![q \le 0]\!] \cup [\![q \ge 0]\!] = [\![q \vee 0 = 0]\!] \cup [\![q \wedge 0 = 0]\!] = (q \vee 0)^{\perp} \cup (q \wedge 0)^{\perp} .$$

Легко показать, что $(q \vee 0) \perp (q \wedge 0)$. Значит, $q \wedge 0 \in (q \vee 0)^{\perp}$. Отсюда получаем $(q \vee 0)^{\perp\perp} \subseteq (q \wedge 0)^{\perp}$. Следовательно, для любого $q \in G$ имеем

$$[\![q \le 0]\!] \cup [\![q \ge 0]\!] \supseteq (q \vee 0)^{\perp} \cup (q \vee 0)^{\perp\perp} = (q \vee 0)^{\perp} + (q \vee 0)^{\perp\perp} = G .$$

Обратно, пусть G – ортополная B-группа и

$$[\![G - \textit{линейно упорядоченная группа}]\!] = 1_G .$$

Проверим, что G – проективная l-группа. Условие «быть проективной l-группой» записывается хорновой формулой, а именно

$$\forall q_1, q_2 \in G, \exists h_1, h_2 \in G \forall h \in G((|h_1| \wedge |q_2| = 0) \wedge$$

$$\wedge (|h| \wedge |q_2| = 0 \Rightarrow |h_2| \wedge |h| = 0) \wedge (q_1 = h_1 + h_2)).$$

Обозначим эту формулу φ. Пусть $\psi = \forall q, h((q \le h) \vee (q \ge h))$, которая выражает свойство, что l-группа есть линейно упорядоченная группа. Заметим, что любая линейно упорядоченная группа является проективной l-группой. Тогда по теореме 1 $[\![\psi \Rightarrow \varphi]\!]_G = 1$ и по условию $[\![\psi]\!]_G = 1$. Значит, $[\![\psi]\!]_G = 1$. Из предложения 2 получаем $G \models \varphi$.

б) Пусть $G = \langle q \rangle + q^{\perp}$ и $\langle q \rangle \cap q^{\perp} = \{0\}$ для любого $q \in G$. Отсюда получим $q^{\perp\perp} = \langle q \rangle$ для любого $\tilde{q} \in G$, т.е. G – проективная l-группа. Следовательно, из предыдущего пункта следует

$$[\![G - \textit{линейно упорядоченная группа}]\!] = 1_G .$$

Условие «быть l-простой группой» имеет вид

$$\forall q \in G((q = 0) \vee \forall t \in G \ \exists n \in N \exists q_1 ... q_n \in G(|t| \le \sum_{i=1}^{n} |-q_i + q + q_i|)) .$$

Вычислим оценку

$$\forall q \in G((q=0) \vee \forall t \in G\ \exists n \in N\ \exists q_1 ... q_n \in G\ ((|t| \le \sum_{i=1}^{n} |-q_i + q + q_i|)) =$$

$$= \wedge_{q \in G} ([\![q = 0]\!] \cup (\wedge_{q \in G} \vee_{n \in N} (\vee_{\langle q_1,...,q_n \rangle \in G^n} ([\![|t| \le \sum_{i=1}^{n} |-q_i + q - q_i|]\!])).$$

Пусть $q,\ t \in G$.

Проверим, что

$$\vee_{n \in N} (\vee_{\langle q_1,...,q_n \rangle \in G^n} ([\![|t| \le \sum_{i=1}^{n} |-q_i + q - q_i|]\!])) \ge [\![q \ne 0]\!] = \langle q \rangle .$$

Действительно, по условию $G = \langle q \rangle + q^{\perp}$ для любого $q \in G$. Поэтому существуют $t_1,\ t_2 \in G$ такие, что $|t| = t_1 + t_2$, где $t_1 \in \langle q \rangle, t_2 \in q^{\perp}$.

Заметим, $t_1 \wedge t_2 = 0$. Имеем

$$|t| = t_1 + t_2 \le |t_1| + |t_2| \le \sum_{i=1}^{n} |-q_i + q - q_i| + |t_2|$$

для некоторых $q_1,...,q_m \in G$.

Отсюда получим

$$0 \le |t| - |t| \wedge (\sum_{i=1}^{m} |-q_i + q + q_i|) = |t| + (-|t|) \vee (\sum_{i=1}^{m} |-q_i + q + q_i|) = 0 \wedge$$

$$\wedge(|t| - (\sum_{i=1}^{m} |-q_i + q + q_i|)) \le 0 \vee |t_2| = |t_2| = t_2 \in q^{\perp}.$$

Следовательно, $(|t| - |t| \Big| \wedge (\sum_{i=1}^{m} |-q_i + q + q_i| \Big|))^{\perp} \supseteq q^{\perp\perp} = \langle q \rangle$.

Получим

$$\vee_{n \in N} \vee_{\langle q_1,...,q_n \rangle \in G^n} [\![|t| \le \sum_{i=1}^{n} |-q_i + q + q_i|]\!] \ge (|t| - |t| \wedge (\sum_{i=1}^{m} |-q_i + q + q_i|))^{\perp} \ge \langle q \rangle.$$

Обратно, свойство квазирегулярности записывается

$$\forall q \forall h \exists q_1 \exists q_2 \exists n \exists h_1,...,\exists h_n ((|q_2| \wedge |h| = 0) \wedge$$

$$\wedge(|q_1| \le \sum_{i=1}^{n} |-h_i + h + h_i|) \vee (q = q_1 + q_2)),$$

где n – переменная по всем натуральным числам, и строго говоря, вместо $h_1,...,h_n$ нужно написать переменную h нового сорта, пробегающую не G, а множество всех конечных последовательностей из элементов G.

По условию

$$[\![\forall q \forall t \exists n \exists q_1,...,q_n ((q=0) \vee (|t| \le \sum_{i=1}^{n} |-q_i + q + q_i|))]\!] = 1_G$$

и G – ортополная B-группа.

Пусть $q, t \in G$. Обозначим $\overline{q} = \langle q_1, ..., q_n \rangle$ и дл.$(\overline{q})$ длину кортежа $\overline{q}$. Тогда

$$\left[\!\!\left[\exists n \in N \exists \overline{q}((дл.\ (\overline{q}) = n) \wedge ((q = 0) \vee (|t| \leq \sum_{i=1}^{n} |-q_i + q + q_i|))) \right]\!\!\right] = 1_G .$$

Согласно предложения 1, существует кортеж $\overline{q}$ длины n_0 из элементов G такой, что $[\![q = 0]\!] \vee \left[\!\!\left[|t| \leq \sum_{i=0}^{n_0} |-q_i + q + q_i| \right]\!\!\right] = 1_G$.

Пусть $[\![q = 0]\!] = N$ и $\left[\!\!\left[|t| \leq \sum_{i=1}^{n_0} |-q_i + q + q_i| \right]\!\!\right] = N_1$. Тогда $N + N_1 = G$ отсюда имеем $N(q) = 0$ и $(|t|) \leq \sum_{i=1}^{n_0} N_1(|-q_i + q + q_i|)$. Из $N + N_1 = G$ имеем $N^{\perp} \subseteq N_1$.

Следовательно, $N^{\perp}(|t|) \leq \sum_{i=1}^{n_0} (-N^{\perp}(q_i) + N^{\perp}(|q|) + N^{\perp}(q_i))$. По свойству главного l-идеала получим $N^{\perp}(|t|) \in \langle N^{\perp}(q) \rangle$. Значит, $N^{\perp}(|t|) \in \langle q \rangle$.

Из $N(q) = 0$ получим $q \in N^{\perp}$. Поэтому $N \subseteq q^{\perp}$. Отсюда имеем $N(|t|) \in q^{\perp}$. В силу разложения $|t| = N(|t|) + N^{\perp}(|t|)$ имеем $|t| \in q^{\perp} + \langle q \rangle$. Значит, $G = q^{\perp} + \langle q \rangle$. Из предыдущего пункта а) имеем $G = q^{\perp} + q^{\perp\perp}$.

Отсюда следует, $q^{\perp\perp}$ является l-идеалом и по свойству поляр имеем $\langle q \rangle \subseteq q^{\perp\perp}$.

Значит, $\langle q \rangle \cap q^{\perp} = \{0\}$, так как $q^{\perp} \cap q^{\perp\perp} = \{0\}$.

Следствие. Хорновы теории в языке l-групп следующих пар классов l-групп совпадают:

а) ортополных проективных l-групп и линейно упорядоченных групп;

б) ортополных квазирегулярных l-групп и линейно упорядоченных l-простых групп.

Доказательство. Непосредственно следует из теорем 1, 2 и предложения 2.

Заключение

Все сказанное без изменений переносится на случай, если язык l-групп расширить новыми предикатными и функциональными символами.

Литература

1. Антонов В. И. Ортогональные B-группы и булевы оценки // Труды V школы молодых математиков Сибири и Дальнего Востока. — Новосибирск, 1990. — С. 3 – 5.

2. Любецкий В. А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // УМН. — 1989. — Т. 44, вып.4. — С. 99 – 153.
3. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.
4. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ. — Новосибирск: Изд-во Института математики им С. Л. Соболева, 2003. — 386 с.
5. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа. — Новосибирск: Наука, 1990. — 344 с.
6. Антонов В. И. Гейнтинговозначный анализ и пучковые ассоциативные кольца // Вестник Бурятского государственного университета. — 2014. — Вып. 9(1).— С. 3 – 7.
7. Антонов В. И. Структурный пучок и булевы оценки решеточно упорядоченных групп // Вестник Бурятского государственного университета. — 2012. — Вып. 2.— С. 75 – 82.

References

1. Antonov V. I. Ortogonal'nye V-gruppy i bulevy ocenki // Trudy V shkoly molodyh matematikov Sibiri i Dal'nego Vostoka. — Novosibirsk, 1990. — S. 3 – 5.
2. Ljubeckij V. A. Ocenki i puchki. O nekotoryh voprosah nestandartnogo analiza // UMN. — 1989. — T. 44, vyp.4. — S. 99 – 153.
3. Kopytov V. M. Reshetochno uporjadochennye gruppy. — M.: Nauka, 1984.
4. Kusraev A. G., Kutateladze S. S., Bulevoznachnyj analiz. — Novosibirsk: Izd-vo Instituta matematiki im S. L. Soboleva, 2003. — 386 s.
5. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Nestandartnye metody analiza. — Novosibirsk: Nauka, 1990. — 344 s.
6. Antonov V. I. Gejntingovoznachnyj analiz i puchkovye associativnye kol'ca // Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. — 2014. — Vyp.9(1). — S. 3 – 7.
7. Antonov V. I. Strukturnyj puchok i bulevy ocenki reshetochno uporjadochennyh grupp // Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. — 2012. — Vyp. 2. — S. 75 – 82.

Антонов Вячеслав Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии Бурятского государственного университета, e-mail: zhem49@gmail.com.

Antonov Vyacheslav Iosifovich, PhD in Physics and Mathematics, A/Professor, algebra and geometry department, Buryat State University.