УДК 514.7
doi: 10.18101/2304-5728-2016-2-11-16

© Б. В. Заятуев, Н. Н. Дондукова

Полуспециальные контактные 2-геодезические преобразования АС-структур

В данной работе исследованы свойства полуспециальных контактно 2-геодезических преобразований почти контактно метрических структур (*АС*-структур), введенных в работе [1]. В первой части работы найден инвариантный вид структурных тензоров (см. [2]) почти контактных метрических структур, который был использован для нахождения формул преобразования структурных тензоров почти контактных метрических структур при контактно 2-геодезических преобразованиях. Далее получен инвариант почти контактных метрических структур при контактно 2-геодезических преобразованиях первого линейного типа. Выделены так называемые полуспециальные контактно 2-геодезические преобразования, и получены формулы преобразования структурных тензоров при полуспециальных контактно 2-геодезических преобразованиях. В заключении, получено тождество, которому удовлетворяет аффинор полуспециальных 2-геодезических преобразований.

Ключевые слова: почти контактные структуры, 2-геодезические преобразования, структурные тензоры почти контактных структур.

© B. V. Zayatuyev, N. N. Dondukova

Semi special contact 2-geodesic transformations of AC-structures

In this paper we investigate the properties of semi-technical contactly 2-geodesic transformations of the almost contact metric structure (AC-structures), which was introduced in [1]. In the first part of the work we found invariant form of structural tensors (see [2].) of almost contact metric structures, which has been used to find the transformation formulas of structural tensors of almost contact metric structures when a contactly 2-geodesic transformations. Next we obtained invariant almost contact metric structures when contactly 2-geodesic transformations of the first linear type. So-called a semi-technical a contactly 2-geodesic transformations were allocated, and formulas for the transformation of structural tensor were obtained when a semi-technical 2-geodesic transformations. Finally, we obtain the identity, which affinor of semi-technical 2-geodesic transformations satisfies.

Keywords: almost contact structures, 2-geodesic transformations, structure tensors of almost contact structures.

Введение

Теория геодезических преобразований (см. [3]) и их обобщений (см. [4]) являются важным объектом изучения современной дифференциальной геометрии. Первоначальный интерес к этой теории был определен ее важным прикладным аспектом, связанным с изучением динамических траекторий механических систем с n-степенями свободы. Основополагающую роль в становлении теории геодезических преобразований и их обобщений сыграли такие известные ученные как Т. Леви-Чивита, Г. Вейль, Т. Томас, Н.С. Синюков, К. Яно и другие.

1. Постановка задачи

Приведем вначале необходимые для дальнейшего факты из теории 2-геодезических преобразований.

Пусть $(M, g =< \cdot, \cdot >)$ – риманово многообразие, ∇ – риманова связность метрики g.

Определение 1. [4] Кривая $g(t)$ на M называется 2-*геодезической* (или *почти геодезической*), если вдоль нее существует параллельное поле 2-мерных плоскостей $G_2(t) \subset T_{\gamma(t)}(M)$, содержащее касательное векторное поле этой кривой, т.е. $\dot{\gamma}(t) \in G_2(t)$.

Определение 2. [4] Диффеоморфизм $\rho(1): M \to M$ называется 2-*геодезическим преобразованием*, если оно каждую геодезическую кривую $\gamma(t)$ преобразует в 2-геодезическую кривую $\overline{\gamma}(t) = \rho(1) \circ \gamma(t)$. В частности, если $G(t) = L(\dot{\overline{\gamma}}(t), K(\dot{\overline{\gamma}}(t)))$, где L - линейная оболочка векторов; K - аффинор, то $\rho(1)$ называется 2-*геодезическим преобразованием первого линейного типа.*

Наша задача: изучить 2-геодезические преобразования почти контактных метрических структур.

2. Формулы преобразования структурных тензоров *AC*-структур при контактно 2-геодезических преобразованиях

Пусть ∇ – риманова связность метрики g, $\widetilde{\nabla}$ – риманова связность метрики $\widetilde{g} = \rho(1)^* g$, $T = \widetilde{\nabla} - \nabla$ – тензор аффинной деформации. Тогда, как известно [3], тензор 2-геодезических преобразований первого линейного типа имеют следующий вид:

$$T(X,Y) = \underset{0}{\omega}(X)Y + \underset{0}{\omega}(Y)X + \underset{1}{\omega}(X)KY + \underset{1}{\omega}(Y)KY\,. \qquad (1)$$

Определение 3. ([2]) Почти контактной метрической (короче *AC*-) структурой называется совокупность $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ тензорных полей на M, где $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика, Φ – тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, ξ – вектор, η – ковектор, называемые структурным вектором и ковектором, соответственно. При этом:

$$1)\ \eta(\xi)=1;\ \ 2)\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;\ \ 3)\ \eta\circ\Phi=0;$$
$$4)\ \Phi(\xi)=0;\ \ 5)\ g(\Phi X,\Phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y);$$

где $X,Y\in\chi(M)$. Многообразие с фиксированной AC-структурой называется *почти контактным метрическим (короче АС-) многообразием.*

Пусть M^{2n+1} – гладкое многообразие с почти контактной метрической структурой $\{\Phi,\xi,\eta,g\}$, $\chi(M)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии M.

Определение 4. ([5]) 2-геодезическое преобразование $\rho(1):M\to M$ называется *контактно 2-геодезическим преобразованием*, если четверка $\left\{\Phi,\xi,\eta,\tilde g=\rho(1)^*g\right\}$ также AC-структура.

В работе [2] были введены в рассмотрение структурные тензоры AC-структуры, играющие ключевую роль в контактной геометрии. Можно показать, что в инвариантном виде они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
B(X,Y)&=-\frac{1}{8}\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)\Phi^2X+\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X+\\
&+\Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2X-\Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)\Phi X\},\\
C(X,Y)&=-\frac{1}{8}\{-\Phi\circ\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)\Phi^2X+\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X+\\
&+\Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2X+\Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)\Phi X\},\\
D(X)&=-\frac{1}{2}\Big\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi-\Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi-\\
&-\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\xi}(\Phi)\Phi^2X+\frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_{\xi}(\Phi)\Phi X\Big\},\\
E(X)&=-\frac{1}{2}\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi-\Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\},\\
F(X)&=\frac{1}{2}\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\xi-\Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\},\\
G(X)&=\Phi\circ\nabla_{\xi}(\Phi)\xi.
\end{aligned}\tag{3}$$

Ковариантная производная структурного эндоморфизма с учетом (1) имеет следующий вид:

$$\overline{\nabla}_X(\Phi)Y=\nabla_X(\Phi)Y+\underset{0}{\omega}(\Phi Y)\Phi X-\underset{0}{\omega}(Y)\Phi X+\underset{1}{\omega}(X)K\circ\Phi Y+$$
$$+\underset{1}{\omega}(\Phi Y)KX--\underset{1}{\omega}(Y)\Phi\circ KX-\underset{1}{\omega}(X)\Phi\circ KY. \tag{4}$$

Путем несложных, но громоздких вычислений, с учетом формул (3) и (4) были получены следующие структурные тензоры AC-структуры $\left\{\Phi,\xi,\eta,\tilde g=\rho(1)^*g\right\}$:

$$\widetilde{B}(X,Y)=B(X,Y)-\frac{1}{2}\underset{0}{\omega}(\Phi X)\Phi Y-\frac{1}{2}\underset{0}{\omega}(\Phi^2 X)\Phi^2 Y-$$

$$-\frac{1}{4}\Phi\circ K\circ(\underset{1}{\omega}(\Phi Y)\Phi^2 X+\underset{1}{\omega}(\Phi^2 X)\Phi Y-\omega(\Phi^2 Y)\Phi X-\underset{1}{\omega}(\Phi X)\Phi^2 Y)+$$

$$+\frac{1}{4}\Phi^2\circ K\circ(\underset{1}{\omega}(\Phi^2 Y)\Phi^2 X+\underset{1}{\omega}(\Phi^2 X)\Phi^2 Y+\underset{1}{\omega}(\Phi Y)\Phi X+\underset{1}{\omega}(\Phi X)\Phi Y),$$

$$\widetilde{C}(X,Y)=C(X,Y)-\frac{1}{4}\Phi\circ K\circ(\underset{1}{\omega}(\Phi Y)\Phi^2 X+\underset{1}{\omega}(\Phi^2 X)\Phi Y+\underset{1}{\omega}(\Phi^2 Y)\Phi X+$$

$$+\underset{1}{\omega}(\Phi X)\Phi^2 Y)-\frac{1}{4}\Phi^2\circ K\circ(\underset{1}{\omega}(\Phi^2 Y)\Phi^2 X+\underset{1}{\omega}(\Phi^2 X)\Phi^2 Y-\underset{1}{\omega}(\Phi Y)\Phi X-$$

$$-\underset{1}{\omega}(\Phi X)\Phi Y),$$

$$\widetilde{D}(X)=D(X), \tag{5}$$

$$\widetilde{E}(X)=E(X)-\underset{0}{\omega}(\xi)\Phi^2 X-\frac{1}{2}\Phi\circ K(\underset{1}{\omega}(\Phi X)\xi+\underset{1}{\omega}(\xi)\Phi X)+$$

$$+\frac{1}{2}\Phi^2\circ K(\underset{1}{\omega}(\Phi^2 X)\xi+\underset{1}{\omega}(\xi)\Phi^2 X),$$

$$\widetilde{F}(X)=F(X)-\frac{1}{2}\Phi\circ K(\underset{1}{\omega}(\Phi X)\xi+\underset{1}{\omega}(\xi)\Phi X)-$$

$$-\frac{1}{2}\Phi^2\circ K(\underset{1}{\omega}(\Phi^2 X)\xi+\underset{1}{\omega}(\xi)\Phi^2 X),$$

$$\widetilde{G}=G-2\underset{1}{\omega}(\xi)\Phi^2\circ K(\xi).$$

Из (5) следует

Теорема 1. Контактно 2-геодезическое преобразование первого линейного типа сохраняет структурный тензор D.

3. Полуспециальные контактно 2-геодезические преобразования почти контактных метрических структур

Наложим на аффинор K дополнительные условия:

$$\begin{cases} K-\text{невырожденный аффинор}, \\ \Phi\circ K=K\circ\Phi. \end{cases} \tag{6}$$

При таких условиях ковариантная производная структурного эндоморфизма имеет следующий вид:

$$\widetilde{\nabla}_X(\Phi)Y=\nabla_X(\Phi)Y+\underset{0}{\omega}(\Phi Y)\Phi X-\underset{0}{\omega}(Y)\Phi X+$$

$$+\underset{1}{\omega}(\Phi Y)KX-\underset{1}{\omega}(Y)\Phi\circ KX. \tag{7}$$

Определение 5. ([1]) Если аффинор K удовлетворяет условиям (6), то контактно 2-геодизические преобразования первого линейного типа AC-структуры называются *полуспециальныммы*.

Подставив (7) в формулы (5), мы получим, что справедлива

Теорема 2. Для полуспециальных контактно 2-геодезических преобразований выполняются соотношения:

$$\widetilde{B}(X,Y)=B(X,Y)-\frac{1}{2}\underset{0}{\omega}(\Phi X)\Phi Y-\frac{1}{2}\underset{0}{\omega}(\Phi^2 X)\Phi^2 Y-$$

$$-\frac{1}{2}\underset{1}{\omega}(\Phi X)\Phi KY-\frac{1}{2}\underset{1}{\omega}(\Phi^2 X)\Phi^2 KY\ ,$$

$$\widetilde{C}(X,Y)=C(X,Y)\ ,$$

$$\widetilde{D}(X)=D(X)\ ,$$

$$\widetilde{E}(X)=E(X)-\underset{0}{\omega}(\xi)\Phi^2 X-\underset{0}{\omega}(\xi)\Phi^2 KX\ ,$$

$$\widetilde{F}(X)=F(X)\ ,$$

$$\widetilde{G}=G\ .$$

Теорема 3. Для полуспециальных контактно 2-геодезических преобразований выполняется тождество: $\eta(KX)=\lambda\eta(X)$, где $\lambda=\eta(K\xi)$.

Доказательство:

Для полуспециальных контактно 2-геодезических преобразований выполняется равенство:

$$\Phi^2\circ KX=K\circ\Phi^2 X\ .$$

С учетом последнего равенства и $(2)_2$, получаем:

$$\eta(KX)\xi=\eta(X)K\xi\ . \qquad (8)$$

Заменив $X\to\xi$, получаем:

$$\eta(K\xi)\xi=K\xi\ .$$

Обозначим $\eta(K\xi)=\lambda$, тогда

$$K\xi=\lambda\xi\ .$$

Таким образом, (8) примет вид:

$$\eta(KX)\xi=\lambda\eta(X)\xi\ .$$

Отсюда следует, что

$$\eta(KX)=\lambda\eta(X)\ .$$

Заключение

В работе рассматриваются полуспециальные контактно 2-геодезические преобразования. Такие преобразования интересны тем, что они являются важным частным случаем *p*-геодезических преобразований и достаточно естественным образом связаны с почти контактными метрическими структурами.

Литература

1. Дондукова Н. Н. Полуспециальные контактно 2-геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Геометрия многообразий и ее приложения. — Улан-Удэ: БГУ, 2010. — С.15 – 16.

2. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003. — 495 с.
3. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
4. Лейко С. Г. Линейные p-геодезические диффеоморфизмы многообразий с аффинной связностью // Изв. высших уч. заведений. — 1982. — №5. — С. 80–83.
5. Кириченко В. Ф., Дондукова Н. Н. Контактно-геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, №2.

References

1. Dondukova N. N. Poluspetsial'nyye kontaktno 2-geodezicheskiye preobrazovaniya pochti kontaktnykh metricheskikh struktur // Geometriya mnogoobraziy i yeye prilozheniya. — Ulan-Ude: BGU, 2010. — S. 15 – 16.
2. Kirichenko V. F. Differentsial'no-geometricheskiye struktury na mnogoobraziyakh. — M., MPGU, 2003. -495 s.
3. Sinyukov N. S. Geodezicheskiye otobrazheniya rimanovykh prostranstv. — M.: Nauka, 1979.
4. Leyko S. G. Lineynyye p-geodezicheskiye diffeomorfizmy mnogoobraziy s affinnoy svyaznost'yu // Izv. vysshikh uch. zavedeniy. — 1982. — №5. — S. 80 – 83.
5. Kirichenko V. F., Dondukova N. N. Kontaktno-geodezicheskiye preobrazovaniya pochti kontaktnykh metricheskikh struktur // Matem. zametki. — 2006. — T. 80, №2.

Заятуев Батор Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Бурятский государственный университет
e-mail: zayatuyev@yandex.ru.
Дондукова Надежда Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Бурятский государственный университет
e-mail: nadezdad@yandex.ru.

Zayatuyev Bator Vladimirovich, PhD in Physics and Mathematics, associate professor of Buryat State University.
Dondukova Nadezhda Nikolaevna, PhD in Physics and Mathematics, associate professor of Buryat State University.