УДК 514.752
doi: 10.18101/2304-5728-2016-2-17-24

Кривизна сферического образа двумерной поверхности с ненулевым кручением в E^4

В статье рассматриваются двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве. Изучаются свойства сферического образа этих поверхностей. В частности, получена формула, позволяющая вычислять кривизну сферического образа рассматриваемой поверхности через геометрические характеристики исходной поверхности.

Ключевые слова: двумерная поверхность, сферическое отображение, гауссова кривизна, коэффициенты кручения.

The curvature of the spherical image of the two-dimensional surface with non-zero torsion in E^4

The article deals with two-dimensional surface in four-dimensional Euclidean space. We study the properties of the spherical image of these surfaces. In particular, the formula is obtained, which can be used to calculate the curvature of the spherical image of the surface by the geometrical characteristics of the original surface.

Keywords: two-dimensional surface, spherical mapping, Gaussian curvature, torsion coefficients.

Введение

Теория двумерных поверхностей с кручением в E^4 построена А.И. Фирсовым в работе [1]. В этой работе получены деривационные формулы для таких поверхностей.

К.Ш. Рамазанова в работе [2] изучала свойства гауссовой кривизны двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве.

В статье [3] выведена формула, позволяющая вычислять кривизну сферического образа двумерной поверхности в E^4 через геометрические характеристики исходной поверхности для поверхностей без кручения. В работе [4] результат был перенесен на многомерный случай.

В настоящей статье результат работы [3] обобщен на случай поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве, имеющей ненулевые коэффициенты кручения.

1. Основные определения и формулы

Пусть F^2 есть C^3 – регулярная поверхность в евклидовом пространстве E^4, которая задается вектор-функцией

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2). \tag{1}$$

Во всех точках этой поверхности существуют касательная и нормальная плоскости. Зададим в каждой нормальной плоскости ортонормированный базис, состоящий из векторов $\vec{n}$ и $\vec{m}$. На поверхности F^2 появятся два векторных поля $\vec{n}$ и $\vec{m}$. Пусть эти поля принадлежат классу C^2.

Определение. Поверхность F^2 вместе с полем нормалей $\vec{n}$ или $\vec{m}$ будем обозначать F_1^2 или F_2^2 соответственно и называть пространственной полосой.

Рассмотрим отображение

$$\upsilon_1 : F^2 \to S^3, \tag{2}$$

которое каждой точке M поверхности F^2 ставит в соответствие точку M' единичной гиперсферы S^3 такую, что вектор с началом в точке O и концом в точке M' равен вектору $\vec{n}(M)$, где точка O - центр гиперсферы. S^3.

Аналогично определяется отображение $\upsilon_2 : F^2 \to S^3$.

Определение. Отображения υ_1 и υ_2 называются сферическими отображениями пространственных полос $F_{\vec{n}}^2$ или $F_{\vec{m}}^2$ соответственно.

Определение. Функции $p_1 = \vec{n}_{u_1} \cdot \vec{m}$ и $p_2 = \vec{n}_{u_2} \cdot \vec{m}$ называются коэффициентами кручения поверхности F^2, вычисленными в нормалях $\vec{n}$ и $\vec{m}$ [1].

Известно, что гауссова кривизна поверхности F^2 вычисляется по формуле

$$K = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} + \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \tag{3}$$

где $B_{ij} = \vec{r}_{u_i u_y} \cdot \vec{n}$, $b_{ij} = \vec{r}_{u_i u_y} \cdot \vec{m}$, $g_{ij} = \vec{r}_{u_i} \cdot \vec{r}_{u_j}$ [2]. Значение K не зависит от базиса нормальной плоскости [1].

2. Основной результат

Теорема. Пусть F^2 – регулярная поверхность класса C^3 в четырехмерном евклидовом пространстве задается вектор-функцией $\vec{r}=\vec{r}(u_1,u_2)$, причем якобиан отображения $\upsilon_1 : F^2 \to S^3$ отличен от нуля в каждой точке поверхности. Тогда гауссова кривизна $\widetilde{K}$ поверхности $\upsilon_1(F^2)$ вычисляется по формуле:

$$\widetilde{K}=1+\frac{\det\left(\left(P_{ij}\right)\right)+D\cdot\sum\limits_{i,j,k,l=1}^{2}S_{ij}^{kl}\cdot(-1)^{i+j}\cdot P_{ij}\cdot Q_{kl}}{K_1^2 g_{22}+\sum\limits_{i,j,k,l=1}^{2}S_{ij}^{kl}\cdot(-1)^{i+j}\cdot p_i p_j L_{kl}}+$$

$$+\frac{D^2\cdot\left(K_1K_2g_{22}+\sum\limits_{i,j,k,l=1}^{2}S_{ij}^{kl}\cdot(-1)^{i+j}\cdot p_{i_{u_j}}\cdot l_{kl}+\det\left(\left(p_{i_{u_j}}\right)\right)\right)}{K_1^2 g_{22}+\sum\limits_{i,j,k,l=1}^{2}S_{ij}^{kl}\cdot(-1)^{i+j}\cdot p_i p_j L_{kl}}.$$

3. Доказательство основного результата

Не ограничивая общности, введем на поверхности F^2 полугеодезическую систему координат. Тогда первая квадратичная форма этой поверхности будет иметь вид [5]

$$ds^2=du_1^2+G(u_1,u_2)du_2^2. \tag{4}$$

В соответствии с формулой (3) гауссова кривизна поверхности F^2 вычисляется следующим образом

$$K=\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{G}+\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{G}. \tag{5}$$

Введем обозначения

$$K_1=\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{G} \text{ и } K_2=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{G}. \tag{6}$$

Учитывая, что в полугеодезической системе координат

$\Gamma_{11}^1=0, \Gamma_{11}^2=0, \Gamma_{12}^1=0, \Gamma_{12}^1=0, \Gamma_{12}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{G_{u_1}}{G}, \Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2}\cdot G_{u_1}, \Gamma_{22}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{G_{u_2}}{G}$ [5],

выпишем деривационные формулы для поверхности F^2 [1]:

$$
\begin{aligned}
&\vec{r}_{u_1u_1} = B_{11}\vec{n} + b_{11}\vec{m},\\
&\vec{r}_{u_1u_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{G_{u_1}}{G}\vec{r}_{u_2} + B_{12}\vec{n} + b_{12}\vec{m},\\
&\vec{r}_{u_2u_2} = -\frac{1}{2}\cdot G_{u_1}\vec{r}_{u_1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{G_{u_2}}{G}\vec{r}_{u_2} + B_{22}\vec{n} + b_{22}\vec{m},\\
&\vec{n}_{u_1} = -B_{11}\vec{r}_{u_1} - \frac{B_{12}}{G}\vec{r}_{u_2} + p_1\vec{m},\\
&\vec{m}_{u_1} = -b_{11}\vec{r}_{u_1} - \frac{b_{12}}{G}\vec{r}_{u_2} - p_1\vec{n},\\
&\vec{n}_{u_2} = -B_{12}\vec{r}_{u_1} - \frac{B_{22}}{G}\vec{r}_{u_2} + p_2\vec{m},\\
&\vec{m}_{u_2} = -b_{12}\vec{r}_{u_1} - \frac{b_{22}}{G}\vec{r}_{u_2} - p_2\vec{n}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Перейдем к поверхности $\upsilon_1(F^2)$. Она расположена на единичной гиперсфере S^3 и задается вектор-функцией

$$\vec{n} = \vec{n}(u_1, u_2). \tag{8}$$

Базис касательной плоскости поверхности (8) образован векторами $\vec{n}_{u_1}$ и $\vec{n}_{u_2}$. Один из базисов нормальной плоскости этой поверхности будут образовывать векторы $\vec{n}$ и $\vec{m}_1 = \dfrac{[\vec{n}, \vec{n}_{u_1}, \vec{n}_{u_2}]}{\left|[\vec{n}, \vec{n}_{u_1}, \vec{n}_{u_2}]\right|}$.

Разложим вектор $\vec{m}_1$ по базису $\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}, \vec{n}, \vec{m}$:

$$\vec{m}_1 = A\cdot\vec{r}_{u_1} + B\cdot\vec{r}_{u_2} + C\cdot\vec{n} + D\cdot\vec{m}. \tag{9}$$

Умножая скалярно равенство (9) поочередно на векторы $\vec{n}_{u_1}, \vec{n}_{u_2}, \vec{n}$ и учитывая, что $\vec{n}_{u_1}\cdot\vec{m}_1 = 0$, $\vec{n}_{u_2}\cdot\vec{m}_1 = 0$ и $|\vec{m}| = 1$, получим систему уравнений

$$
\begin{cases}
-AB_{11} - BB_{12} + Dp_1 = 0\\
-AB_{12} - BB_{22} + Dp_2 = 0\\
C = 0\\
A^2 + B^2G + D^2 = 1.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Найдем решения последней системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
&A=\frac{B_{22}p_1-B_{12}p_2}{MG},\\
&B=\frac{B_{11}p_2-B_{12}p_1}{MG},\\
&C=0, \qquad\qquad (11)\\
&D=\frac{K_1}{M},\\
&M=\sqrt{\frac{B_{12}^2p_2^2}{G^2}-2\frac{B_{12}B_{22}p_1p_2}{G^2}+\frac{B_{22}^2p_1^2}{G^2}+\frac{B_{11}^2p_2^2}{G}-2\frac{B_{11}B_{12}p_1p_2}{G}+\frac{B_{12}^2p_1^2}{G}+K_1^2}.
\end{aligned}
$$

Легко видеть, что коэффициенты первой и второй квадратичной формы в направлении $\vec{n}$ поверхности $\upsilon_1(F^2)$ равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки, т.е.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{g}_{11}=-\tilde{B}_{11}=\vec{n}_{u_1}\cdot\vec{n}_{u_1}=B_{11}^2+\frac{B_{12}^2}{G}+p_1^2,\\
&\tilde{g}_{12}=-\tilde{B}_{12}=\vec{n}_{u_1}\cdot\vec{n}_{u_2}=B_{11}B_{12}+\frac{B_{12}B_{22}}{G}+p_1p_2, \qquad (12)\\
&\tilde{g}_{22}=-\tilde{B}_{22}=\vec{n}_{u_2}\cdot\vec{n}_{u_2}=B_{12}^2+\frac{B_{22}^2}{G}+p_2^2.
\end{aligned}
$$

Из (12) и (6) следует, что $\tilde{K}_1=1$.

Выразим гауссову кривизну поверхности $\upsilon_1(F^2)$ через коэффициенты первой и вторых квадратичных форм поверхности F^2, а также через ее коэффициенты кручения.

Гауссова кривизна поверхности (8) вычисляется по формуле

$$\tilde{K}=\tilde{K}_1+\tilde{K}_2.$$

Так как $\tilde{K}_1=1$, то необходимо вычислить

$$\tilde{K}_2=\frac{\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{22}-\tilde{b}_{12}^2}{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22}-\tilde{g}_{12}^2} \qquad (13)$$

Коэффициенты $\tilde{b}_{ij}$ второй квадратичной формы поверхности $\upsilon_1(F^2)$ в направлении $\vec{m}_1$ будут равны

$$\widetilde{b}_{ij} = \vec{n}_{u_i u_j} \cdot \vec{m}_1 = A\left(-B_{1i_{u_j}} - \frac{B_{2i} g_{jj_{u_1}}}{g_{jj}} - p_i b_{1j}\right) + \\ + B\left(-B_{1i}\frac{g_{jj_{u_1}}}{2} - \frac{2B_{2i_{u_j}} g_{22} - b_{2i} g_{22_{u_j}}}{2g_{22}} - p_i b_{2j}\right) + \\ + D\left(-B_{1i} b_{1j} - \frac{B_{2i} b_{2j}}{g_{22}} + p_{i_{u_j}}\right) = P_{ij} + D\left(-B_{1i} b_{1j} - \frac{B_{2i} b_{2j}}{g_{22}} + p_{i_{u_j}}\right), \tag{14}$$

где $g_{11} = 0,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = G.$

Введем обозначения:

$$-B_{1i} b_{1j} - \frac{B_{2i} b_{2j}}{g_{22}} + p_{i_{u_j}} = Q_{ij}, \tag{15}$$

$$-B_{1i} b_{1j} - \frac{B_{2i} b_{2j}}{g_{22}} = l_{ij}, \tag{16}$$

$$B_{1i} b_{1j} + \frac{B_{2i} b_{2j}}{g_{22}} = L_{ij}. \tag{17}$$

Вычислим $\widetilde{b}_{11}\widetilde{b}_{22} - \widetilde{b}_{12}^2$ и $\widetilde{g}_{11}\widetilde{g}_{22} - \widetilde{g}_{12}^2$. С учетом обозначений (15)–(17) будем иметь

$$\widetilde{b}_{11}\widetilde{b}_{22} - \widetilde{b}_{12}^2 = \det\left(\left(P_{ij}\right)\right) + D \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{2} S_{ij}^{kl} \cdot (-1)^{i+j} \cdot P_{ij} \cdot Q_{kl} + \\ + D^2 \cdot \left(\left(B_{11}B_{22} - B_{12}^2\right)K_2 + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} S_{ij}^{kl} \cdot (-1)^{i+j} \cdot p_{i_{u_j}} \cdot l_{kl} + \det\left(\left(p_{i_{u_j}}\right)\right)\right), \tag{18}$$

$$\widetilde{g}_{11}\widetilde{g}_{22} - \widetilde{g}_{12}^2 = \frac{\left(B_{11}B_{22} - B_{12}^2\right)^2}{G} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} S_{ij}^{kl} \cdot (-1)^{i+j} \cdot p_i p_j L_{kl}, \tag{19}$$

где $S_{ij}^{kl} = \begin{cases} 0, i = k \text{ или } j = l \\ 1, i \neq k \text{ и } j \neq l. \end{cases}$

Подставив выражения (18) и (19) в формулу (13) и вычислив гауссову кривизну поверхности $\upsilon_1(F^2)$, получим

$$\widetilde{K} = 1 + \frac{\det\left(\left(P_{ij}\right)\right) + D \cdot \sum\limits_{i,j,k,l=1}^{2} S_{ij}^{kl} \cdot (-1)^{i+j} \cdot P_{ij} \cdot Q_{kl}}{K_1^2 g_{22} + \sum\limits_{i,j,k,l=1}^{2} S_{ij}^{kl} \cdot (-1)^{i+j} \cdot p_i p_j L_{kl}} + \frac{D^2 \cdot \left(K_1 K_2 g_{22} + \sum\limits_{i,j,k,l=1}^{2} S_{ij}^{kl} \cdot (-1)^{i+j} \cdot p_{i_{u_j}} \cdot l_{kl} + \det\left(\left(p_{i_{u_j}}\right)\right) \right)}{K_1^2 g_{22} + \sum\limits_{i,j,k,l=1}^{2} S_{ij}^{kl} \cdot (-1)^{i+j} \cdot p_i p_j L_{kl}}.$$

Следствие. Если $p_1 = p_2 = 0$, то гауссова кривизна $\widetilde{K}$ поверхности $\upsilon_1(F^2)$ равна

$$\widetilde{K} = 1 + \frac{K_2}{K_1}.$$

Для поверхностей с нулевыми коэффициентами кручения этот результат получен в работе [3].

Заключение

Таким образом, доказана формула, позволяющая вычислять кривизну сферического образа двумерной поверхности с произвольными коэффициентами кручения в четырехмерном евклидовом пространстве через геометрические характеристики исходной поверхности.

Литература

1. Фирсов А. И. Канонические нормали поверхности большой коразмерности // Вестник МГУ. Механика. Математика. — 1976. — № 2. — С. 37 – 42.
2. Рамазанова К. Ш. Теория кривизны X_2 в E_4 // Известия вузов. Математика. — 1966. — № 6. — С. 137 – 143.
3. Шармин В. Г. Сферическое отображение пространственной полосы // Исследования по теории поверхностей постоянной кривизны. — Л.: Изд-во ЛГПИ им. А. И. Герцена. — 1987. — С. 98 – 100.
4. Шармина Т. Н., Шармин В. Г. Связь гауссовой кривизны двумерной поверхности в (n+2)-мерном евклидовом пространстве с гауссовой кривизной ее сферического образа // Альманах современной науки и образования. — Тамбов: Изд-во «Грамота», 2010. — №1(32). — Ч. 1.— С. 33 – 36.
5. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974. — 176 с.

References

1. Firsov A. I. Kanonicheskie normali poverhnosti bol'shoj korazmernosti // Vestnik MGU. Mehanika. Matematika. — 1976. — № 2. — S. 37 – 42.

2. Ramazanova K. Sh. Teorija krivizny X_2 v E_4 // Izvestija Vuzov. Matematika. — 1966. — № 6. — S. 137 – 143.

3. Sharmin V. G. Sfericheskoe otobrazhenie prostranstvennoj polosy // Issledovanija po teorii poverhnostej postojannoj krivizny. — L.: Izd-vo LGPI im. A. I. Gercena. — 1987. — S. 98 – 100.

4. Sharmina T. N., Sharmin V. G. Svjaz' gaussovoj krivizny dvumernoj poverhnosti v (n+2)-mernom evklidovom prostranstve s gaussovoj kriviznoj ee sfericheskogo obraza // Al'manah sovremennoj nauki i obrazovanija. — Tambov: Izd-vo «Gramota», 2010. — №1(32). — Ch. 1. — S. 33 – 36.

5. Pogorelov A.V. Differencial'naja geometrija. — M.: Nauka, 1974. — 176 s.

Шармин Валентин Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Тюменского государственного университета, e-mail: sharmin@utmn.ru.

Шармина Тамара Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Тюменского государственного университета, e-mail: tnsharmina@bk.ru.

Sharmin Valentin Gennadyevich, PhD in Physics and Mathematics, A/Professor of the Department of algebra and mathematical logic of Tyumen State University.

Sharmina Tamara Nikolaevna, PhD in Physics and Mathematics, A/Professor of the Department of mathematics and computer science of Tyumen State University.