

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

---

УДК 681.51:519.6

doi: 10.18101/2304-5728-2016-2-91-101

© *А. П. Мадыев, Д. Ш. Ширапов*

## Метод оценки предельных значений дисперсии нестационарных случайных сигналов

Предлагается метод оценки предельных значений дисперсии нестационарных случайных сигналов типа переходный режим, являющихся реакцией линейных динамических объектов (ЛДО) на включение стационарного случайного воздействия с известной дисперсией и нормированной корреляционной функцией. Метод основан на известном способе оценки предельной реакции ЛДО на ограниченное по модулю детерминированное воздействие. Получены оценки отдельно для ЛДО со знакопостоянными и знакопеременными импульсными характеристиками (ИХ). Для ЛДО со знакопостоянной ИХ искомая оценка с точностью до постоянного множителя равна квадрату переходной характеристики. Для ЛДО со знакопеременной ИХ искомая оценка содержит взвешенные суммы интегралов от ИХ на интервалах знакопостоянства. Весовые коэффициенты представляют собой сумму интегралов от модулей ИХ или интегралы модулей ИХ по интервалам знакопостоянства. Оценки имеют вид монотонно возрастающих функций, их вычисление значительно проще вычисления исходной дисперсии реакции.

**Ключевые слова:** дисперсия, линейный динамический объект, стационарное случайное воздействие, нормированная корреляционная функция, импульсная характеристика, предельные значения, оценка.

© *A. P. Madyev, D. Sh. Shirapov*

## The method of estimation of extreme values of nonstationary random signals dispersion

The method of extreme values of dispersion's estimation of nonstationary random signals, as a linear dynamic objects (LDO) reaction caused by switching on a random stationary input with definite dispersion and normalized correlation function is suggested. The method uses some features of LDO reaction caused by a determined input with limited absolute range. There are two kinds of estimations obtained – for LDO with constant sign and nonconstant sign pulse response characteristic (PRC). For LDO with constant sign PRC the extreme value estimation is proportional to the squares of unit-step response. For LDO with nonconstant sign PRC the extreme value estimation contains the sum of integrals with coefficients. Each integral is calculated on interval where PRC has

constant sign. Each coefficient is a sum of integrals of PRC's modules or integrals of PRC's modules calculated on intervals where PRC has constant sign. The obtained estimations has a form of monotonously growing functions and can be simply calculated.

**Keywords:** dispersion, linear dynamic object, random stationary input, normalized correlation function, pulse response characteristic, extreme values, estimation.

### Введение

Дисперсия нестационарных случайных сигналов типа переходный режим (НССПР) на выходе ЛДО в переходных режимах от включения стационарных случайных воздействий (ССВ) рассчитывается как интеграл двойной свертки:

$$\sigma_S^2(t) = \sigma_B^2 \int_0^t h_O(y) \int_0^y h_O(x) \rho(y-x) dx, \quad (1)$$

где  $\sigma_B^2$  – дисперсия ССВ;  $\rho$  – нормированная корреляционная функция (НКФ) ССВ;  $h_O$  – импульсная характеристика ЛДО. Для ИХ любых ЛДО и  $\rho$ , описываемых экспоненциально-косинусными функциями, (1) вычисляется с помощью табличных интегралов. Функция  $\sigma_S^2(t)$  асимптотически стремится к установившемуся значению  $\sigma_{ycm}^2 = \sigma_S^2(\infty) > 0$ , а при некоторых сочетаниях ИХ и НКФ и их параметров имеются выбросы над  $\sigma_{ycm}^2$  [1]. Предельным значением  $\sigma_{Smax}^2$  может стать  $\sigma_{ycm}^2$  (для монотонных  $\sigma_S^2(t)$ ) или наибольший выброс. Однако аналитическое определение наличия выбросов, их значений и, следовательно, нахождение предельных значений дисперсии затруднено необходимостью решения трансцендентных уравнений при поиске экстремумов функции  $\sigma_S^2(t)$ .

В работе ставится задача разработки универсального численного метода оценки предельных значений  $\sigma_{Smax}^2$ .

### 1. Метод аппроксимации

Интеграл (1) исходной формы может быть вычислен по одной из двух частей области интегрирования внутреннего интеграла [2] и тогда (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_S^2(t) &= \sigma_B^2 \int_0^t h_O(y) \left( \int_0^y h_O(x) \rho(y-x) dx + \int_y^t h_O(x) \rho(y-x) dx \right) dy = \\ &= 2\sigma_B^2 \int_0^t h_O(y) \int_0^y h_O(x) \rho(y-x) dx dy. \end{aligned}$$

Далее полученный двойной интеграл может быть представлен [2] интегралом произведения ИХ и функционала  $F(y)$  :

$$\sigma_S^2(t) = 2\sigma_B^2 \int_0^t h_O(y)F(y)dy, \quad (2)$$

$$F(y) = \int_0^y h_O(x)\rho(y-x)dx. \quad (3)$$

Вид функционала  $F(y)$  совпадает с реакцией ЛДО на детерминированное воздействие, описываемое функцией вида  $\rho(x)$ . Это обстоятельство дает возможность оценить сверху функционал  $F(y)$  и с помощью полученной оценки разработать численный алгоритм, который позволит вычислить оценки текущих предельных значений НССПР в виде непрерывной или кусочно-непрерывной функции, удовлетворяющей условию:

$$\sigma_{S_{\max}}^2(t) \geq 2\sigma_B^2 \int_0^t h_O(y)F(y)dy.$$

В работах [3, 4, 5] рассчитан модуль максимума максимума реакции ЛДО на ограниченное по модулю детерминированное воздействие. Так как функция  $\rho(x)$ , входящая в  $F(y)$ , также ограничена по модулю, то примененный подход пригоден также для расчета оценки  $F_{\max}(y)$ , следовательно, и для расчета  $\sigma_{S_{\max}}^2$ . Метод [3], использует форму записи реакции ЛДО, соответствующей несколько иному виду функционала  $F(y)$  :

$$\int_0^y h_O(y-x)\rho(x)dx.$$

Поэтому подробнее остановимся на формуле (3). Подынтегральное выражение в (3) представляет собой произведение двух функций  $h_O(x)$  и  $\rho(y-x)$ . Рассмотрим графики функций, входящих в (3), при этом функция  $\rho(y-x)$  аппроксимируется функцией  $\rho^*(y-x)$ , которая должна максимизировать  $F(y)$ .

В общем случае  $h_O(x)$  – знакопеременная функция (рис.1, сплошная линия). Функция  $\rho^*(y-x)$  (также, как и в [3]) для знакопеременной ИХ имеет ступенчатый вид:  $\rho^*(y-x) = \pm 1$  (рис.1, пунктирная линия). Изменения знака  $\rho^*(y-x)$  на противоположный в моменты изменения знака  $h_O(x)$  обеспечивают максимальные по модулю (максимизируют) значения  $F(y)$ . Заметим, что такой вид функции  $\rho^*(y-x)$  аппроксимирует знакопеременную НКФ.

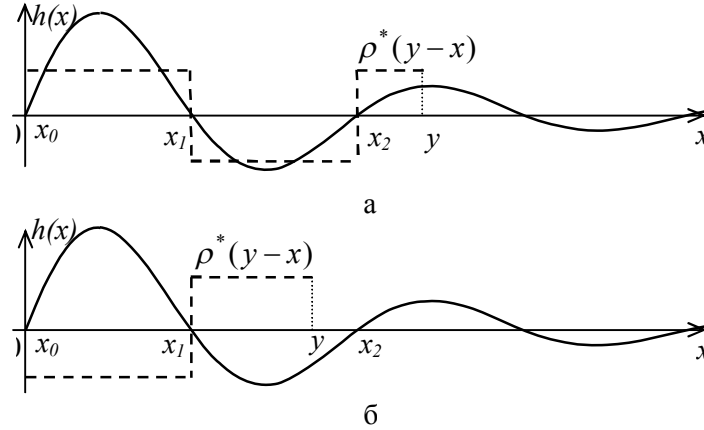


Рис. 1. К расчету оценки предельного значения  $F(y)$  для различных верхних пределов интегрирования  $y$

Необходимо учесть, что НКФ  $\rho(y-x)$  произвольной формы, в отличие от произвольного детерминированного воздействия в [3], в точке  $x = y$  всегда имеет значение, равное +1 и поэтому

$$\rho^*(y-x)|_{x=y} = +1. \tag{4}$$

Отсюда следует, что текущее значение  $F_{\max}(y)$  имеет тот же знак, что и знак  $h_0(x)|_{x=y}$  на текущем интервале знакопостоянства ИХ – на тех интервалах, где  $h_0(x)|_{x=y} > 0$  (см. рис.1а)  $F_{\max}(y) > 0$ , а на интервалах, где  $h_0(x)|_{x=y} < 0$  (см. рис.1б)  $F_{\max}(y) < 0$ , т.е.

$$F_{\max}(y) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |h_0(x)| dx + \int_{x_M}^y h_0(x) dx, & h_0(x)|_{x=y} > 0, \\ - \left( \sum_{j=0}^{M-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |h_0(x)| dx + \int_{x_M}^y h_0(x) dx \right), & h_0(x)|_{x=y} < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Границы интервалов интегрирования  $x_j$  в (5) являются нулями ИХ  $h_0(x)$ , которые находятся аналитически для знакопеременных ИХ типовых ЛДО не выше 2-го порядка или численно для знакопеременных ИХ ЛДО выше 2-го порядка;  $(M-1)$  – число полных интервалов знакопостоянства ИХ на интервале от 0 до  $x = y$ .

Таким образом, функция (5), как численный аналог интеграла (3), по модулю представляет собой максимизированный функционал (3) и позволяет получить приближенную оценку  $F_{\max}(y)$ .

Функция  $F_{\max}(y)$  непрерывно возрастает по модулю и в конце произвольного  $M$ -го текущего интервала знакопостоянства  $h_O(x)|_{x=y}$  (при  $y = x_{M+1}$ ) текущее значение модуля  $F_{\max}(y)$  достигает максимума на данном интервале:

$$F_{M \max} = \begin{cases} \sum_{j=0}^M \int_{x_j}^{x_{j+1}} |h_O(x)| dx, & h_O(x)|_{x=y} > 0, \\ - \left( \sum_{j=0}^M \int_{x_j}^{x_{j+1}} |h_O(x)| dx \right), & h_O(x)|_{x=y} < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Вычисленные таким образом  $F_{M \max}$  являются оценками сверху модуля функционала  $F(y)$  на произвольном  $M$ -м интервале знакопостоянства ИХ и по модулю совпадают с [3], при этом знак  $F_{M \max}$  совпадает со знаком  $h_O(y)$  на  $M$ -м интервале знакопостоянства ИХ.

Далее оценка сверху дисперсии (2) вычисляется отдельно для каждого интервала знакопостоянства ИХ  $h_O(y)$ , где  $F(y)$  заменяется оценками  $F_{M \max}$ , вычисленными с помощью (6). Поскольку знаки  $F_{M \max}$  и  $h_O(y)$  на любом интервале знакопостоянства ИХ совпадают, то вычисляемая оценка

$$\sigma_{S \max}^2(t) = 2\sigma_B^2 \left( \sum_{j=0}^{M-1} F_{j \max} \int_{t_j}^{t_{j+1}} h_O(y) dy + F_{M \max} \int_{t_{M-1}}^t h_O(y) dy \right) \quad (7)$$

для любого интервала будет всегда положительной и приобретает вид монотонно возрастающей функции без локальных максимумов и минимумов.

Таким образом, универсальный численный алгоритм вычисления оценки (7) позволяет достаточно просто и инвариантно к НКФ оценить сверху дисперсию для любого ЛДО.

Для вычисления оценки  $F_{\max}(y)$  в случае знакопеременной ИХ и знакопостоянной НКФ последнюю следует аппроксимировать иначе (рис. 2, пунктирная линия), исключив отрицательные значения функции  $\rho^*(y-x)$ , т.е.  $\rho^*(y-x) = +1$ .

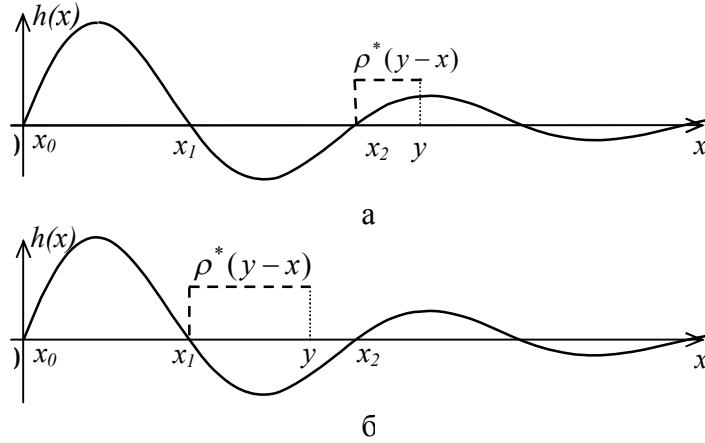


Рис. 2. К расчету оценки предельного значения  $F(y)$  для знакопостоянной НКФ

Тогда, с учетом вышеизложенного,  $F_{M \max}$  примет вид:

$$F_{M \max} = \begin{cases} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |h_O(x)| dx, & h_O(x)|_{x=y} > 0, \\ - \int_{x_j}^{x_{j+1}} |h_O(x)| dx, & h_O(x)|_{x=y} < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Оценка сверху дисперсии (2) с учетом (8) примет вид:

$$\sigma_{S \max}^2(t) = 2\sigma_B^2 \left( F_{j \max} \int_{t_j}^{t_{j+1}} h_O(y) dy + F_{M \max} \int_{t_{M-1}}^t h_O(y) dy \right). \quad (9)$$

Аналогично (7) оценка дисперсии (9) имеет вид монотонно возрастающей функции без локальных максимумов и минимумов.

Рассмотрим ЛДО со знакопостоянной ИХ. В этом случае функция  $\rho^*(y-x)$ , максимизирующая  $F(y)$ , примет вид  $\rho^*(y-x) = +1$ . Тогда  $\sigma_{S \max}^2(t)$  вычисляется непосредственно по (1) и получим:

$$\sigma_{S \max}^2(t) = \sigma_B^2 g_O^2(t), \quad (10)$$

где  $g_O(t) = \int_0^t h_O(y) dy$  – переходная характеристика ЛДО.

Следует отметить, что оценки (7) и (9) оказываются значительно завышенными и подлежат уточнению следующим образом. На первом интервале знакопостоянства  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = t_1$  ( $t_1$  – граница первого интервала

знакопостоянства ИХ);  $\rho^*(y-x) = +1$  и тогда

$$F_{1\max} = \int_0^{x_1} h_O(x) dx = g_O(x_1) = g_O(t_1), \text{ а текущие значения оценок (7) и (9)}$$

совпадают и равны:

$$\sigma_{S\max}^2(t) = 2\sigma_B^2 g(t_1)g(t).$$

В конце первого интервала знакопостоянства ИХ  $t = t_1$  и тогда

$$\sigma_{S\max}^2(t_1) = 2\sigma_B^2 g_O^2(t_1).$$

В то же время для  $\rho^*(y-x) = +1$  оценка дисперсии на первом интервале знакопостоянства ИХ ЛДО вычисляется непосредственно по (1). Тогда получим следующее значение оценки дисперсии:

$$\sigma_{S\max}^2(t_1) = \sigma_B^2 g_O^2(t_1). \quad (11)$$

Если потребовать, чтобы в точке  $t_1$  оценка дисперсии не превышала (11) тогда (7) преобразуется к виду

$$\sigma_{S\max}^2(t) = \sigma_B^2 \left( \sum_{j=1}^M F_{j\max} \int_{t_j}^{t_{j+1}} h_O(y) dy + F_{M+1\max} \int_{t_{M+1}}^t h_O(y) dy \right). \quad (12)$$

Соответственно оценка (9) с учетом вышеизложенного примет вид:

$$\sigma_{S\max}^2(t) = \sigma_B^2 \left( F_{j\max} \int_{t_j}^{t_{j+1}} h_O(y) dy + F_{M\max} \int_{t_{M-1}}^t h_O(y) dy \right). \quad (13)$$

Полученные оценки (12) и (13) также имеет вид монотонно нарастающих функций без локальных максимумов и минимумов и содержат взвешенные суммы интегралов от ИХ на интервалах знакопостоянства. Весовые коэффициенты представляют собой сумму интегралов от модулей ИХ или интегралы от модулей ИХ по интервалам знакопостоянства.

Численный расчет оценок (12) и (13) позволяет достаточно просто и инвариантно к НКФ оценить сверху дисперсию для ЛДО любого вида и любого порядка.

На основе описанного численного метода оценки предельных значений дисперсии нестационарных случайных сигналов разработана универсальная методика приближенной оценки границ динамического диапазона НССПР и его производной, которая заключается в следующем:

- а) для знакопостоянных ИХ предельная оценка текущих значений дисперсии (дисперсии производной) рассчитывается как (10);
- б) для знакопеременных ИХ и знакопеременных НКФ:
  - определяются границы интервалов знакопостоянства ИХ;
  - для каждого интервала знакопостоянства рассчитывается предельные значения  $F_{j\max}$  согласно (6);

- для каждого интервала рассчитывается предельная оценка текущих значений дисперсии согласно (12);
- в) для знакопеременных ИХ и знакопостоянных НКФ:
  - для каждого интервала знакопостоянства ИХ рассчитывается предельные значения  $F_{j\max}$  согласно (8);
  - для каждого интервала знакопостоянства рассчитывается предельная оценка текущих значений дисперсии согласно (13).

## 2. Пример расчета оценки предельного значения дисперсии

Рассмотрим пример, который иллюстрирует применение разработанной методики приближенной оценки границ динамического диапазона НССПР для ИХ и НКФ, имеющих относительно простой вид.

На вход ЛДО, описываемой ИХ  $h_o(t) = \alpha^2 [1 - \alpha t] \exp(-\alpha t)$ , ( $\alpha = 0,1$ ) подается ССВ с корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma_B^2 \rho(\tau) = \sigma_B^2 \left( \cos \lambda \tau + \frac{\beta}{\lambda} \sin \lambda |\tau| \right) e^{-\beta |\tau|}, \quad (\lambda = 0,0995; \beta = 0,01).$$

Несмотря на относительно простой вид ИХ и НКФ точное выражения дисперсии, рассчитанное по (1), в сокращенной форме имеет весьма сложный вид:

$$\sigma_S^2(t) = D_0 \{ D_1 - [(D_2 + D_3 t) \sin(\lambda t) + (D_4 + D_5 t) \cos(\lambda t)] \times e^{-(\alpha+\beta)t} + (D_6 + D_7 t + D_8 t^2) e^{-2\alpha t} \}, \quad (14)$$

где  $D_0 \div D_8$  – коэффициенты, зависящие от параметров ИХ и НКФ  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ . Для выражения (14) определение максимально возможных значений дисперсии значительно затруднено.

Поскольку как ИХ так и НКФ знакопеременные функции, то для применения разработанной методики следует: а) определить границы интервалов знакопостоянства ИХ; б) для каждого интервала знакопостоянства рассчитать предельные значения  $F_{j\max}$  по формуле (6); в) для каждого интервала рассчитать предельные оценки текущих значений дисперсии по формуле (12).

### а) Определение границ интервалов знакопостоянства ИХ

Импульсная характеристика  $h_o(t) = \alpha^2 (1 - \alpha t) \exp(-\alpha t)$  имеет два интервала знакопостоянства, разделенных единственным нулем  $t_1 = 1/\alpha = 10$  (рис.3).

### б) Расчет предельных значений $F_{j\max}$

Функционал (6) на 1-м и 2-м интервалах знакопостоянства ИХ примет значение соответственно

$$F_{1\max} = \int_0^{1/\alpha} \alpha^2 (1 - \alpha x) \exp(-\alpha x) dx = \frac{\alpha}{e}$$



и

$$F_{2\max} = F_{1\max} + \int_{1/\alpha}^{\infty} \alpha^2 (1 - \alpha x) \exp(-\alpha x) dx = \frac{2\alpha}{e}.$$

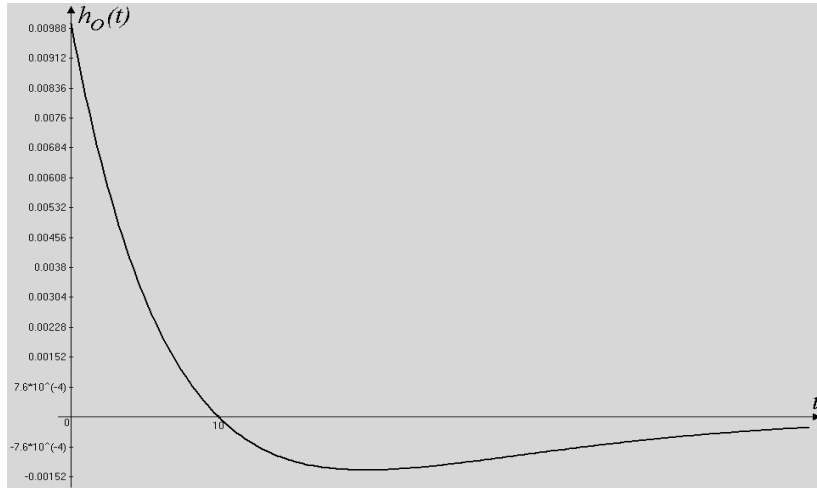


Рис. 3.

в) Расчет предельной оценки текущих значений дисперсии

Оценка дисперсии по двум интервалам знакопостоянства, согласно (12) примет вид:

$$\sigma_{S\max}^2(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^3}{e} \int_0^t (1 - \alpha x) \exp(-\alpha x) dx = \frac{\alpha^3}{e} t \exp(-\alpha t), & 0 < t < 1/\alpha; \\ \frac{\alpha^2}{e^2}, & t = 1/\alpha; \\ \frac{\alpha^2}{e^2} + \left(\frac{2\alpha}{e}\right) \alpha^2 \int_{1/\alpha}^t |(1 - \alpha x) \exp(-\alpha x)| dx = \\ = \frac{\alpha}{e} \left[ \frac{\alpha}{e} + 2 \left( \frac{\alpha}{e} - \alpha^2 t \exp(-\alpha t) \right) \right], & t > 1/\alpha; \\ \frac{3\alpha^2}{e^2}, & t \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (15)$$

На рис.4 показаны: (а) график дисперсии  $\sigma_S^2(t)$ , рассчитанной по (14); (б) график оценки предельного значения дисперсии  $\sigma_{S\max}^2(t)$ , вычисленной по приближенной формуле (15).

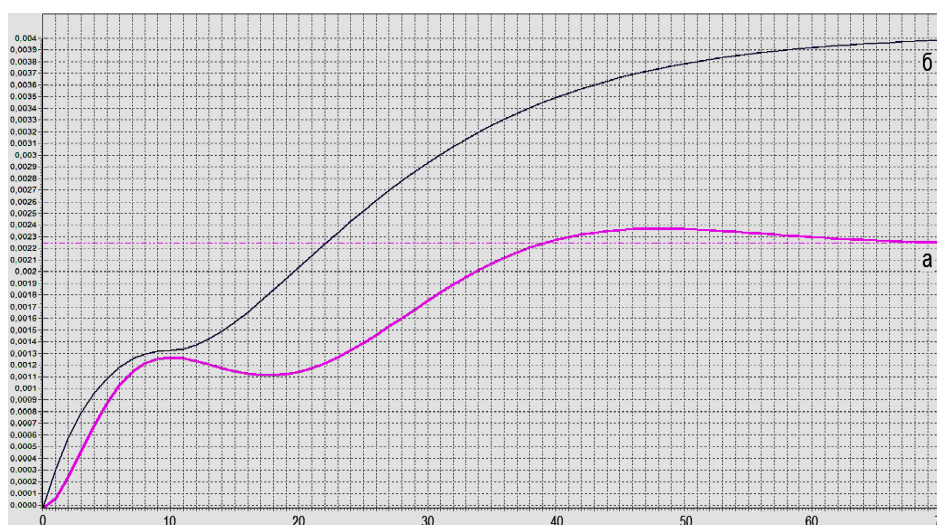


Рис. 4.

Оценка (15) имеет вид монотонно возрастающей функции несложного вида, которая асимптотически стремится к установившемуся значению  $3\alpha^2/e^2$  без локальных максимумов и минимумов. Процедура вычисления оценки (15) значительно проще, чем расчет точного выражения дисперсии (14) и поиск по нему точного максимального значения дисперсии.

Поскольку при расчете численной оценки функционала (3) аппроксимирующая функция  $\rho^*(y-x)$  не учитывает затухающий характер НКФ, оценка  $\sigma_{S_{\max}}^2(t)$  предельного значения дисперсии с течением времени возрастает быстрее, чем дисперсия  $\sigma_S^2(t)$ .

### Заключение

Разработан численный метод оценки предельных значений дисперсии нестационарных случайных сигналов типа переходный режим. На основе разработанного численного метода создана универсальная методика, которая позволяет получить в простой форме, с невысокими вычислительными затратами оценки предельных значений дисперсии нестационарных случайных сигналов типа переходный режим, инвариантные к виду корреляционной функции воздействия.

### Литература

1. Мадыев А. П. Дисперсия выходной реакции и ее производной линейных динамических систем в сложных переходных режимах // Сборник научных трудов ВСГТУ. — Улан-Удэ, 1996. — С. 62 – 65.
2. Первачев С. В., Валуев А. А., Чиликин В. М. Статистическая динамика радиотехнических следящих систем. — М.: «Сов. радио», 1973. — 488 с.

3. Рыбаков И. Н. К вопросу об обобщении понятия резонанса для линейных систем с постоянными параметрами // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. — 1968. — Т. XI, №8.

4. Борзых В. Е., Милов Л. Т. Анализ погрешностей интерполяции выходных сигналов линейных динамических систем // Измерительная техника. — 1969. — №11.

5. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. — М.: Машиностроение, 1967. — 682 с.

### References

1. Madyev A. P. Dispersia vyhodnoi reakcii i ee proizvodnoi lineinyh dinamicheskikh sistem v slozhnyh perehodnyh rezhimah // Sbornik nauchnykh trudov VSGTU. — Ulan-Ude, 1996. — S. 62 – 65.

2. Pervachev S. V., Valuev A. A., Chilikin V. M. Statisticheskaja dinamika radiotekhnicheskikh sledjashhih sistem. — М.: «Sov. radio», 1973. — 488 s.

3. Rybakov I. N., K voprosu ob obobshhenii ponjatija rezonansa dlja linejnyh sistem s postojannymi parametrami // Izvestija VUZov. Radiojelektronika. — Vol. XI, No. 8. — 1968.

4. Borzyh V. E., Milov L. T. Analiz pogreshnostej interpoljicii vyhodnyh signalov linejnyh dinamicheskikh sistem // Izmeritel'naja tehnika. — 1969. — No. 11.

5. Tehnicheskaja kibernetika. Teorija avtomaticheskogo regulirovanija. Kniga 2. Analiz i sintez linejnyh nepreryvnyh i diskretnyh sistem avtomaticheskogo regulirovanija / Pod red. V. V. Solodovnikova. — М.: Mashinostroenie, 1967. — 682 s.

*Мадыев Алексей Петрович*, старший преподаватель кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: mapost3@gmail.com.

*Ширапов Дашадондок Шагдарович*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: shir48@mail.ru.

*Madyev Aleksey Petrovich*, Senior lecturer of department of Electronic computing systems of East Siberian State University of Technologies and Management.

*Shirapov Dashadondok Shagdarovich*, DSc in Physics and Mathematics, Professor of department of Electronic computing systems of East Siberian State University of Technologies and Management.