ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.983.5, 517.968.7
doi: 10.18101/2304-5728-2016-3-3-14

© М. В. Фалалеев

Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах

В работе исследуются интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах специального вида с нетеровым оператором в главной части. Исследования проводятся в пространстве обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах и с носителем на положительной полуоси. В работе применяется аппарат фундаментальных оператор-функций, который позволяет восстанавливать обобщенное решение в сверточном виде и уже на этой основе получать теоремы о разрешимости исследуемых задач в классах функций конечной гладкости. Такой метод исследования позволяет автоматически решать задачу согласования входных данных для существования классических (гладких) решений, а также получать формулы для представления решений как в пространстве распределений, так и в пространствах функций конечной гладкости. Рассмотренные в работе интегро-дифференциальные уравнения позволяют в наиболее общей постановке исследовать математические модели теории колебаний в вязкоупругих средах или теории электрических цепей.

Ключевые слова: нетеров оператор, фундаментальное решение, свертка, обобщенная функция.

© M. V. Falaleev

Integro-differential Equations with Degenerating in Banach Spaces

In this paper integro-differential equations of the special type with Noetherian operator in main part in Banach spaces is investigated. All investigations conduct in space of generalized functions with value in Banach spaces and with support on positive semiaxis. In this paper instrument of fundamental operator-functions is application, this instrument make possible reconstruct of generalized solutions in convolution form and on this basis obtain theorem about solvability being investigated problems in set of function of finite smoothness. This method of investigations make possible automatically solve problem of agreement input data for existence of classical (smooth) solutions and also obtain formulas for representation of solutions both in spaces of distributions and in spaces of functions of finite smooth. Examined in this paper integro-differential equations make possible in most general form investigated mathematical models of theory of oscillations in visco-elastic medium or of theory of electric chain.

Keywords: Noetherian Operator, fundamental solution, convolution, generalized function.

Введение

Для математического моделирования физических и технологических процессов, на текущее состояние которых усредненно влияет вся предыстория наблюдений, применяется аппарат начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. В этом типе уравнений выделяется класс уравнений, неразрешенных относительно старшей по времени производной. В наиболее общей постановке такие задачи можно исследовать путем их редукции к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах. Данная работа посвящена исследованию задачи Коши для уравнения вида

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int_0^t k(t-s)u(s)ds + f(t),$$

здесь $B, A, k(t)$ – замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, причем оператор-функция $k(t)$ имеет следующий специальный вид $k(t) = \alpha(t)A + \beta(t)B$. Случай, когда оператор B фредгольмов исследован в работе [1], случаи когда $\beta(t) \equiv 0$, а оператор B фредгольмов, нетеров или операторный пучок $(B - \lambda A)$ является спектрально ограниченным исследовались в цикле работ [2, 3, 4], соответственно случаи $\alpha(t) \equiv 0$ и оператор B фредгольмов или операторный пучок $(B - \lambda A)$ спектрально ограничен исследовались в работах [5, 6]. В данной статье представлены результаты исследования случая когда $k(t) = \beta(t)B$ и B – оператор конечного индекса [7].

1. Постановка задачи, основные условия и обозначения

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int_0^t \beta(t-s)Bu(s)ds + f(t), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \ldots, u^{(N-1)} = u_{N-1}, \tag{2}$$

где B, A – замкнутые линейные операторы действующие из E_1 в E_2, здесь и далее везде E_1, E_2 – банаховы пространства, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{R(B)} = R(B)$, оператор B – нетеров [7], т.е. $\dim N(B) = n$, $\dim N(B^*) = m$, $n \neq m$.

Ведем обозначения $\phi_i, i = 1, \ldots, n$ – базис ядра $N(B) \subset E_1$ оператора B,

$\varphi_j,\ j=1,\ldots,m$ – базис ядра $N(B^*)\subset E_2^*$ сопряженного оператора B^*, $\{\gamma_i\}\in E_1^*$ и $\{z_j\}\in E_2$ соответствующие этим базисам биортогональные системы элементов [7]. Построим проекторы $P=\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_i\rangle\phi_i$ и $Q=\sum_{j=1}^{m}\langle\cdot,\varphi_j\rangle z_j$, в этих предположениях, как показано в монографии [8], существует ограниченный оператор B^+, называемый псевдообратным к B, задаваемый однозначно следующим набором своих свойств: $D(B^+)=R(B)\oplus\{z_1,\ldots,z_m\}$, $R(B^+)=N(P)\cap D(B)$, $BB^+=I-Q$ на $D(B^+)$, $B^+B=I-P$ на $D(B)$, тогда $N(B^+)=\{z_1,\ldots,z_m\}$, $BB^+B=B$ и $B^+BB^+=B^+$. Для псевдообратного оператора B^+ существует сопряженный к нему ограниченный оператор B^{+*} такой, что $D(B^{+*})=R(B^*)\oplus\{\gamma_1,\ldots,\gamma_m\}$, $R(B^{+*})=N(Q^*)\cap D(B^*)$, $B^{+*}B^*=I-Q^*$ на $D(B^{+*})$, $B^*B^{+*}=I-P^*$ на $D(B^{+*})$, причем $N(B^{+*})=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$, $B^*B^{+*}B^*=B^*$, $B^{+*}B^*B^{+*}=B^{+*}$ и $B^{+*}=B^{*+}$, здесь $P^*=\sum_{i=1}^{n}\langle\phi_i,\cdot\rangle\gamma_i$ и $Q^*=\sum_{j=1}^{m}\langle z_j,\cdot\rangle\phi_j$.

Далее будем предполагать, что

А) оператор B имеет полный A-жорданов набор [9], т.е. существуют системы элементов $\{\phi_i^{(k)}\}\in E_1,\ i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,p_i$ и функционалов $\{\varphi_j^{(k)}\}\in E_2^*,\ j=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,p_j$ такие, что

$$B\phi_i^{(k)}=A\phi_i^{(k-1)},\ k=2,\ldots,p_i,\ \phi_i^{(1)}=\phi_i,\ i=1,\ldots,n,$$
$$B^*\varphi_j^{(k)}=A^*\varphi_j^{(k-1)},\ k=2,\ldots,p_j,\ \varphi_j^{(1)}=\varphi_j,\ j=1,\ldots,m,$$

и

$$rang\left\|\left\langle A\phi_i^{(p_i)},\varphi_j\right\rangle\right\|=rang\left\|\left\langle \phi_i,A^*\varphi_j^{(p_j)}\right\rangle\right\|=\min(n,m)=l.$$

Присоединенные элементы $\phi_i^{(k)}$ и функционалы $\varphi_j^{(k)}$ можно восстанавливать по формулам

$$\phi_i^{(k)}=B^+A\phi_i^{(k-1)}=\left(B^+A\right)^{k-1}\phi_i^{(1)},\ \varphi_j^{(k)}=B^{+*}A^*\varphi_j^{(k-1)}=\left(B^{+*}A^*\right)^{k-1}\varphi_j^{(1)}.$$

В работах [9, 10, 3] показано, что базисы $\{\phi_i\}$ и $\{\varphi_j\}$ и биортогональные системы элементов $\{\gamma_i\}$ и $\{z_j\}$ можно выбрать таким образом, чтобы

$\left\langle \phi_i^{(k)}, \gamma_j \right\rangle = 0, i, j = 1, \dots, n, k \geq 2,$ $\left\langle z_i, \varphi_j^{(k)} \right\rangle = 0, i, j = 1, \dots, m, k \geq 2,$ $z_j = A\phi_j^{(p_j)},$ $\gamma_i = A^* \varphi_i^{(p_i)}, i, j = 1, \dots, l.$

Более подробно с перестроениями базисов можно ознакомиться по работе [11] и библиографии к ней, основные формулы можно найти также в [10] и [3].

Далее в работе будем использовать обозначения: $R(t)$ – резольвента ядра $k(t) = \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * \beta(t)\theta(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}\beta(s)ds,$ $\theta(t)$ – функция Хевисайда [12];

под степенью обобщенной функции $\left(\delta(t) + R(t)\theta(t)\right)^k$ или $\left(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\right)^k$ будем понимать ее k-кратную свертку с собой [12], причем нулевая степень обобщенной функции есть $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака [12];

через $Q_j = \left\langle \cdot, \varphi_j \right\rangle z_j, j = 1, \dots, m$ обозначаются проекторы, прямая сумма которых составляет Q, а также введем проектор

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot, \varphi_i^{(j)} \right\rangle A\phi_i^{(p_i+1-j)},$$

причем если $n > m,$ то в этом «проекторе» $\varphi_i^{(1)} \equiv 0$ при $i = m+1, \dots, n,$ а $\varphi_i^{(j)} \in E_2^*, i = m+1, \dots, n; j = 2, \dots, p_i$ – произвольные функционалы;

через $U_N(t)$ обозначим оператор-функцию

$$U_N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \left(\delta(t) + R(t)\theta(t)\right)^k \left(AB^+\right)^{k-1},$$

определение свертки обобщенных функций см. [12].

2. Теоремы о фундаментальных оператор-функциях

Поскольку задача Коши (1) – (2) с нетеровым оператором B разрешима в классе $C^N(t \geq 0, E_1)$ не при любых правых частях $f(t)$ и начальных условиях (2), то будем строить решение в пространстве распределений $K'_+(E_1)$ – обобщенных функций с ограниченным слева носителем. В классе $K'_+(E_1)$ задача (1) – (2) переписывается в сверточном виде

$$\left(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - B\beta(t)\theta(t)\right) * \tilde{u}(t) = g(t), \tag{3}$$

где

$$g(t) = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \dots + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t).$$

Фундаментальной оператор-функцией для интегро-дифференциального оператора $L_N\left(\delta(t)\right)=B\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)-A\delta(t)$ называется обобщенная оператор-функция $E_N(t)$ удовлетворяющая следующим двум сверточным равенствам

$$L_N\left(\delta(t)\right)*E_N(t)*\tilde{u}(t)=\tilde{u}(t),\quad \forall \tilde{u}(t)\in K'_+(E_2), \tag{4}$$

$$E_N(t)*L_N\left(\delta(t)\right)*\tilde{v}(t)=\tilde{v}(t),\quad \forall \tilde{v}(t)\in K'_+(E_1). \tag{5}$$

Из равенства (4) следует, что функция $\tilde{u}(t)=E_N(t)*g(t)$ действительно является решением уравнения (3), а равенство (5) означает, что оно единственное в классе $K'_+(E_1)$. Таким образом, построение фундаментальной оператор-функции решает задачу существования и единственности решений (в соответствующих классах).

При доказательстве теоремы 2 в работе [3] были доказаны нужные для дальнейшего операторные равенства, которые приведем здесь (без доказательства) в виде вспомогательной леммы

Лемма. Если для нетерова оператора B выполнено условие **А)** и $n<m$, то

$$AB^+\left[I-\tilde{Q}\right]B-\left[I-\tilde{Q}\right]A\equiv 0, \tag{6}$$

$$B^+\left[I-\tilde{Q}\right]B+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i+1-j)}\equiv I. \tag{7}$$

В той же работе [3] или в [10] (см. заключительный этап доказательства теоремы 1 на стр. 1399) приведено доказательство еще одного равенства

$$Q\left(AB^+\right)^k\left[I-\tilde{Q}\right]\equiv 0,\quad \forall k\geq 1, n>m. \tag{8}$$

Теорема 1. Если для нетерова оператора B выполнено условие **А)** и $n>m$, то интегро-дифференциальный оператор $L_N\left(\delta(t)\right)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$E_N(t)=B^+U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]-H(t), \tag{9}$$

где

$$H(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^k\right].$$

Доказательство. Покажем справедливость равенства (4). Действительно

$$B\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)*B^+U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]=(I-Q)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(I\delta(t)-k(t)\theta(t)\right)*\frac{t^{(k-1)N-1}}{((k-1)N-1)!}\theta(t)*\left(\delta(t)+R(t)\theta(t)\right)^k\left(AB^+\right)^{k-1}\right]\times$$

$$\times\left[I-\tilde{Q}\right]=(I-Q)\left[I-\tilde{Q}\right]\delta(t)+(I-Q)AB^{+}U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right],$$

$$A\delta(t)*B^{+}U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]=AB^{+}U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right],$$

таким образом

$$L_N\left(\delta(t)\right)*B^{+}U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]=(I-Q)\left[I-\tilde{Q}\right]\delta(t)-QAB^{+}U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]$$

и в силу равенства (8)

$$L_N\left(\delta(t)\right)*B^{+}U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]=(I-Q)\left[I-\tilde{Q}\right]\delta(t).$$

Далее, т.к. $B\phi_i^{(1)}=0,$ то

$$B\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)*H(t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\varphi_i^{(j)}\right\rangle B\phi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\left\langle\cdot,\varphi_i^{(j)}\right\rangle B\phi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right],$$

$$A\delta(t)*H(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\varphi_i^{(j)}\right\rangle A\phi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\varphi_i^{(j)}\right\rangle A\phi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k}\right]+\tilde{Q}\delta(t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\left\langle\cdot,\varphi_i^{(j)}\right\rangle A\phi_i^{(p_i-k-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]+\tilde{Q}\delta(t).$$

Отсюда в силу равенств $B\phi_i^{(k+1)}=A\phi_i^{(k)},$ получаем

$$L_N\left(\delta(t)\right)*H(t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\left\langle\cdot,\varphi_i^{(j)}\right\rangle\left(B\phi_i^{(p_i-k+1-j)}-A\phi_i^{(p_i-k-j)}\right)\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]-$$

$$-\tilde{Q}\delta(t)=-\tilde{Q}\delta(t).$$

Из приведенных выкладок следует

$$L_N\left(\delta(t)\right)*E_N(t)=(I-Q)\left[I-\tilde{Q}\right]\delta(t)+\tilde{Q}\delta(t)=$$

$$=\left(I-Q-\tilde{Q}+Q+\tilde{Q}\right)\delta(t)=I\delta(t),$$

т.е. равенство (4) доказано. Равенство (5) в условиях данной теоремы не выполняется, т.к. представление для фундаментальной оператор-функции $E_N(t)$ содержит свободные функционалы, а значит, говорить о единственности решения уравнения (3) не приходится.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если для нетерова оператора B выполнено условие **A)** и $n<m,$ то интегро-дифференциальный оператор $L_N\left(\delta(t)\right)$ имеет фундаментальную оператор-функцию $E_N(t)$ вида (9) на подклассе обобщенных функций из $K'_+\left(E_2\right)$, удовлетворяющих условиям

$$Q_\nu AB^+U_N(t)\theta(t)*\tilde{v}(t)=0,\quad \nu=n+1,\ldots,m.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, получим

$$L_N\left(\delta(t)\right)*E_N(t)=I\delta(t)-QAB^+U_N(t)\ \left[I-\tilde{Q}\right]=$$

$$=I\delta(t)-\sum_{\nu=m+1}^{n}Q_\nu AB^+U_N(t)\ \left[I-\tilde{Q}\right]=I\delta(t)-\sum_{\nu=m+1}^{n}Q_\nu AB^+U_N(t)\theta(t),$$

т.е. равенство (4) на указанном подклассе выполнено.

Докажем теперь равенство (5). Действительно

$$B^+U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]*B\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)=B^+\left[I-\tilde{Q}\right]B\delta(t)+$$

$$+B^+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{t^{(k-1)N-1}}{\left((k-1)N-1\right)!}\theta(t)*\left(\delta(t)+R(t)\theta(t)\right)^{k-1}\left(AB^+\right)^{k-1}\right]\left[I-\tilde{Q}\right]B=$$

$$=B^+\left[I-\tilde{Q}\right]B\delta(t)+B^+U_N(t)AB^+\left[I-\tilde{Q}\right]B,$$

$$B^+U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]*A\delta(t)=B^+U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]A,$$

отсюда на основании равенства (6) получаем

$$B^+U_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]*L_N\left(\delta(t)\right)=B^+\left[I-\tilde{Q}\right]B\delta(t)+$$

$$+B^+U_N(t)\left(AB^+\left[I-\tilde{Q}\right]B-\left[I-\tilde{Q}\right]A\right)=B^+\left[I-\tilde{Q}\right]B\delta(t).$$

Далее, т.к. $B^*\varphi_j^{(1)}=0,$ имеем

$$H(t)*B\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,B^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=2}^{p_i-k}\left\langle\cdot,B^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\left\langle\cdot,B^*\varphi_i^{(j+1)}\right\rangle\phi_i^{(p_i-k-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right],$$

$$H(t)*A\delta(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^k\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\left\langle\cdot,A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i-k-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t).$$

Отсюда в силу равенств $B^*\varphi_i^{(k+1)}=A^*\varphi_i^{(k)}$, получаем

$$H(t)*L_N(\delta(t))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\left\langle\cdot,B^*\varphi_i^{(j+1)}-A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i-k-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t).$$

Таким образом, на основании (7) имеем

$$E_N(t)*L_N(\delta(t))=$$

$$=\left[B^+\left[I-\tilde{Q}\right]B+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,A^*\varphi_i^{(j)}\right\rangle\phi_i^{(p_i+1-j)}\right]\delta(t)=I\delta(t),$$

т.е. равенство (5) доказано.

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Если в условиях теорем 1 и 2 $m=n$, т.е. оператор B окажется фредгольмовым, то представление (9) для фундаментальной оператор-функции $E_N(t)$ сохранит свой вид с заменой псевдообратного оператора B^+ на оператор Треногина-Шмидта Γ [7], при этом никаких свободных функционалов в представлении функции $H(t)$ не будет. Таким образом, во фредгольмовском случае ($m=n$) результат теорем 1 и 2 этой заметки трансформируется в основное утверждение работы [5].

Замечание 2. Очевидно, наиболее простой вид представление (9) для фундаментальной оператор-функции примет при $m=n$ и $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$, а именно,

$$\tilde{E}_N(t)=\Gamma\tilde{U}_N(t)\left[I-\tilde{Q}\right]-\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\varphi_i\rangle\phi_i\delta(t),$$

здесь

$$\tilde{U}_N(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\left(\delta(t)+R(t)\theta(t)\right)^k(A\Gamma)^{k-1}.$$

Соответственно в этом случае единственным решением задачи Коши (1) – (2) в классе $K'_{+}(E_1)$ (или единственным решением уравнения (3)) является регулярная обобщенная функция $\tilde{u}(t) = \tilde{E}(t) * g(t)$. Непосредственно вычисляя (см. [5]), находим

$$\tilde{u}^{(j)}(0) = u_j - \sum_{i=1}^{n} \left\langle Au_j + f^{(j)}(0), \varphi_i \right\rangle \phi_i, \quad j = 0,1,\ldots,(N-1)$$

и в силу линейной независимости элементов базиса $\{\phi_i\}$ получаем следующее утверждение [5].

Теорема 3. Если для фредгольмова оператора B ($m = n$) в условиях **А)** длины всех A-жордановых цепочек равны 1, то исходная задача Коши (1) – (2) имеет единственное решение класса $C^N(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\left\langle Au_j + f^{(j)}(0), \varphi_i \right\rangle = 0, \quad j = 0,1,\ldots,(N-1), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

3. Приложения

Проиллюстрируем доказанные теоремы на следующем примере. Рассмотрим начально-краевую задачу из теории вязкоупругих процессов [13]

$$(\lambda - \Delta)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - \int_0^t g(t-\tau)(\lambda - \Delta)u(\tau, x)\,d\tau = f(t,x), \tag{10}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x); \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ t \geq 0, \tag{11}$$

здесь Δ – оператор Лапласа, $x \in \Omega \subset R^m$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, решение $u(t,x)$ ищется в цилиндре $R_+ \times \Omega$. Задачу Коши-Дирихле (10) – (11) можно редуцировать к задаче Коши (1) – (2) если положить

$$E_1 \equiv \left\{ v(x) \in W_2^2(\Omega);\ v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad E_2 \equiv W_2(\Omega), \tag{12}$$

$B = \lambda - \Delta,\ \ A = \Delta,\ \ \lambda \in \sigma(\Delta),\ \ W_p^k(\Omega)$ – пространство Соболева. В этом случае оператор B фредгольмов, ядро которого состоит из семейства (конечного) линейно независимых решений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $\Delta\phi = \lambda\phi, \phi\big|_{\partial\Omega} = 0$, тогда длины всех Δ-жордановых цепочек равны 1. В соответствии с теоремой 3 справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть для задачи Коши-Дирихле (10) – (11) пространства E_1 и E_2, операторы B и A выбраны как в (12), тогда существует единственное решение $u(t,x) \in C^2(t \geq 0, E_1)$ задачи (10) – (11) если начально-краевые условия (11) удовлетворяют соотношениям

$$\left(\lambda u_0\left(x\right)+f\left(0,x\right),\phi_i\left(x\right)\right)=0,\left(\lambda u_1\left(x\right)+\frac{\partial f\left(0,x\right)}{\partial t},\phi_i\left(x\right)\right)=0,\, i=1,\ldots,n.$$

Заключение

Теоремы 1 и 2 данной заметки обобщают результаты работы [5] и дополняют результаты статьи [6], тем самым задача Коши (1) – (2) в данной постановке исследована во всех основных случаях сингулярности операторного пучка $(B-\lambda A)$, а именно, фредгольмовости, нетеровости, спектральной, секториальной и радиальной ограниченности.

Литература

1. Фалалеев М. В. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2013. — Т. 6, № 4. — С. 128 – 137.

2. Falaleev M. V., Orlov S. S. Degenerate Integro-Differential Operators in Banach Spaces end Their Applications // Russian Mathematics. — 2011. — Vol. 55, № 10. — С. 59 – 69.

3. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 4. — С. 286 – 297.

4. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». — 2011. — Вып. 7, № 4(221). — С. 100 – 110.

5. Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 90 – 102.

6. Фалалеев М. В. Линейные модели теории вязкоупругости соболевского типа // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». — 2013. — Т. 6, № 4. — С. 101 – 107.

7. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

8. Nashed M. Z. Generalized inverses and applications. — New York-San Francisco-London: Academic Press, 1976. — 1055 p.

9. Сидоров Н. А., Романова О. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т.19, № 9. — С. 1516 – 1526.

10. Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 6. —

С. 1393 – 1406.

11. Сидоров Н. А., Романова О. А., Благодатская Е. Б. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части // Дифференц. уравнения — 1994. — Т.30, № 4. — С. 729 – 731.

12. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

13. Cavalcanti M. M., Domingos V. N. Cavalcanti, Ferreira J. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equations with Strong Damping // Math. Meth. Appl. Sci. — 2001. — Vol. 24. — P. 1043 – 1053.

References

1. Falaleev M. V. Singuljarnye integro-differencial'nye uravnenija special'nogo vida v banahovyh prostranstvah i ih prilozhenija // Izv. Irkut. gos. un-ta. Ser. Matematika. — 2013. — T. 6, № 4. — S. 128 –137.

2. Falaleev M. V., Orlov S. S. Degenerate Integro-Differential Operators in Banach Spaces end Their Applications // Russian Mathematics. — 2011. — Vol. 55, № 10. — S. 59 – 69.

3. Falaleev M. V., Orlov S. S. Obobshhennye reshenija vyrozhdennyh integro-differencial'nyh uravnenij v banahovyh prostranstvah i ih prilozhenija // Trudy in-ta matematiki i mehaniki UrO RAN. — 2012. — T. 18, № 4. — S. 286 – 297.

4. Falaleev M. V., Orlov S. S. Vyrozhdennye integro-differencial'nye uravnenija special'nogo vida v banahovyh prostranstvah i ih prilozhenija // Vestnik JuUrGU. Ser. «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie». — 2011. — Vyp. 7, № 4(221). — S. 100 – 110.

5. Falaleev M. V. Integro-differencial'nye uravnenija s fredgol'movym operatorom pri starshej proizvodnoj v banahovyh prostranstvah i ih prilozhenija // Izv. Irkut. gos. un-ta. Ser. Matematika. — 2012. — T. 5, № 2. — S. 90 – 102.

6. Falaleev M. V. Linejnye modeli teorii vjazkouprugosti sobolevskogo tipa // Vestnik JuUrGU. Ser. «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie». — 2013. — T. 6, № 4. — S. 101 – 107.

7. Vajnberg M. M., Trenogin V. A. Teorija vetvlenija reshenij nelinejnyh uravnenij. — M.: Nauka, 1969. — 528 s.

8. Nashed M. Z. Generalized inverses and applications. — New York-San Francisco-London: Academic Press, 1976. — 1055 p.

9. Sidorov N. A., Romanova O. A. O primenenii nekotoryh rezul'tatov teorii vetvlenija pri reshenii differencial'nyh uravnenij s vyrozhdeniem // Differenc. uravnenija. — 1983. — T.19, № 9. — S. 1516 – 1526.

10. Falaleev M. V., Grazhdanceva E. Ju. Fundamental'nye operator-funkcii vyrozhdennyh differencial'nyh i differencial'no-raznostnyh operatorov s neterovym operatorom v glavnoj chasti v banahovyh prostranstvah // Sib. mat. zhurn. — 2005. — T. 46, № 6. — S. 1393 – 1406.

11. Sidorov N. A., Romanova O. A., Blagodatskaja E. B. Uravnenija s chastnymi proizvodnymi s operatorom konechnogo indeksa pri glavnoj chasti // Differenc. uravnenija. — 1994. — T.30, № 4. — S. 729 – 731.

12. Vladimirov V. S. Obobshhennye funkcii v matematicheskoj fizike. — M.: Nauka, 1979. — 320 s.

13. Cavalcanti M. M., Domingos V. N. Cavalcanti, Ferreira J. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equations with Strong Damping // Math. Meth. Appl. Sci. — 2001. — Vol. 24. — P. 1043 – 1053.

Фалалеев Михаил Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Иркутского государственного университета,
e-mail: mvfalaleev@gmail.com.

Falaleev Mikhail Valentinovich, DSc, Professor of Institute of Mathematics, Economics and Information Science of Irkutsk State University.