УДК 519.64
doi: 10.18101/2304-5728-2016-3-51-56

© *Т. Г. Дармаев, Б. Д. Цыдыпов*

Метод расчета стационарного обтекания произвольного профиля

В данной работе для численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно величины стационарной скорости предложен метод замены интегрального уравнения системой алгебраических уравнений, основанный на замене профиля вписанным N-угольником с длиной стороны порядка величины N^{-1} и внутренним углом, близким к π. На основе предложенного метода созданы алгоритм решения и программа на ФОРТРАН. Проведены тестовые численные расчеты для эллипсов разных толщин и серии профилей «B» ЦАГИ.

Ключевые слова: произвольный профиль, стационарное обтекание, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

© *T. G. Darmaev, B. D. Tsydypov*

Method of calculation of a stationary flow of any profile

In this work for the numerical solution of the integrated equation of Fredholm of the second sort concerning the size of stationary speed the method of replacement of the integrated equation with system of the algebraic equations based on replacement of a profile with the entered N-square with a length of the party of an order of size and the internal corner close to π is offered. On the basis of the offered method the algorithm of the decision and the program on the FORTRAN are created. Test numerical calculations for ellipses of different thickness and a series of profiles "B" of TsAGI are carried out.

Keywords: any profile, stationary flow, integrated equation of Fredholm of the second sort.

Введение

Задача нестационарного обтекания произвольного профиля, колеблющегося в потоке идеальной несжимаемой жидкости в работе [1] приведена к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно величины стационарной скорости $v_0(s)$ и амплитудного значения нестационарной части относительной скорости *v(s)*. Решение полученных интегральных уравнений позволяет свести к квадратурам определение нестационарных характеристик потока и гидродинамических реакций на профиле. Для решения этих уравнений можно использовать метод итераций, примененный в работах [2-3]. Этим методом может быть получен результат с наперед заданной точностью для широкого класса профилей. Но, как указывается в работе [4], для некоторых несимметричных профилей с большой величиной прогиба средней линии, а также для профилей с точкой возврата (профиль Жуковского с очень тонкой хвостовой частью, например) итерационный процесс расходится. Итерационный процесс также расходится в случае расчета тонких симметричных профилей (тонкая пластина) с профилированной головной и хвостовой частями.

В данной работе для вычисления стационарной скорости $v_0(s)$ применяется метод замены интегрального уравнения системой алгебраических уравнений, предложенный в работах [5-6].

1. Численный метод

Метод основан на замене профиля вписанным N-угольником с длиной стороны порядка величины N^{-1} и внутренним углом, близким к π. Контур профиля L разбивается на N участков l_k длины dl_k, $(k = 1, 2, ..., N)$. Обозначим l_k^0 и dl_k^0 соответственно хорду, стягивающую дужку l_k и длину хорды l_k^0, далее s^0, σ^0 – дуговые координаты точек на ломаной $L^0 = \bigcup l_k^0$ отсчитываемые в положительном направлении обхода контура L. Разбиение контура выбирается так, чтобы выходная кромка являлась общей дужек l_1 *и* l_N. Целесообразность такого разбиения оправдывается характером течения в окрестности выходной кромки, который используется далее для устранения особенностей ядер данных уравнений. Заменяя интегралы в уравнениях конечными суммами, получим системы из N алгебраических уравнений относительно искомых величин, которые решаются с применением ЭВМ.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода ([1]) относительно величины стационарной скорости $v_0(s)$:

$$\frac{1}{2}v_0(s) - \frac{1}{2\pi}\int_L v_0(\sigma)K(s,\sigma)d\sigma = \cos(\alpha(s)-\theta) \qquad (1)$$

$$K(s,\sigma) = -\mathrm{Re}_i\left[\frac{ie^{i\alpha(\sigma)}}{z(s)-\zeta(\sigma)}\right] = \frac{(x(s)-\zeta(\sigma))\sin\alpha(s) - (y(s)-\eta(\sigma))\cos\alpha(s)}{(x(s)-\zeta(\sigma))^2 + (y(s)-\eta(\sigma))^2},$$

где i – мнимая единица, $\alpha(s)$ – угол наклона касательной к контуру к оси OX, θ – геометрический угол атаки, образуемый вектором скорости потока на бесконечности $\overline{V}_\infty$ и осью OX. Интегрирование по контуру ведется в положительном направлении (против часовой стрелки). Все линейные размеры нормированы к длине хорды профиля b, а величины, имеющие размерность скорости, к скорости набегающего потока V_∞.

Имеют место следующие равенства:

$$\lim_{\sigma\to s} K(s,\sigma) = \lim_{\sigma\to s}\frac{(x(s)-\zeta(\sigma))\sin\alpha(s) - (y(s)-\eta(\sigma))\cos\alpha(s)}{(x(s)-\zeta(\sigma))^2 + (y(s)-\eta(\sigma))^2} = \frac{1}{2r(s)}, \qquad (2)$$

где $r(s)$ – кривизна контура L в точке s,

$$\int_L \cos(\alpha(s)-\theta)ds = 0 . \qquad (3)$$

Отсюда следует, что для гладких контуров ядро интегрального уравнения (1) может быть доопределено до непрерывного всюду на контуре L по обеим переменным s и σ.

Пусть s=0 фиксированная выходная кромка профиля. Из общей теории уравнений Фредгольма второго рода, равенств (2) – (3) и теорем 1 и 2 [5] заключаем, что интегральное уравнение (1) при дополнительном условии

$$v_0(s_0) = 0 \qquad (4)$$

имеет единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых функций. При этом решение удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{1}{2}v_0(s) - \frac{1}{2\pi}\int_L v_0(\sigma)\left[K(s,\sigma)-K(s_0,\sigma)\right]d\sigma = \cos(\alpha(s)-\theta)-\cos(\alpha(s_0)-\theta) . \qquad (5)$$

Решение этого уравнения совпадает с решением уравнения (1) ([5]).

Для искомого решения $v_0(s)$ в любой окрестности точки s_0 существуют точки $s_1^{'}$ *и* $s_N^{'}$ для которых выполняется равенство:

$$v_0(s_0) = \frac{v_0(s_1^{'}) - v_0(s_N^{'})}{2} = 0 .$$

При достаточно большом числе разбиений N на дужки (малых dl_1 и dl_N) можно считать приближенно $l_1^{'} = l_1$ и $l_N^{'} = l_N$.

Тогда уравнение (5) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} &\frac{v_0(s)}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_L v_0(\sigma)\left[K(s,\sigma) - \frac{K(s_1,\sigma)+K(s_N,\sigma)}{2}\right]d\sigma = \\ &= \cos(\alpha(s)-\theta) - \frac{\cos(\alpha(s_1)-\theta)+\cos(\alpha(s_N)-\theta)}{2}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Заменяя далее интегралы в (6) конечной суммой, получим систему из N алгебраических уравнений относительно величин $v_{0m}, (m = 1,2,...,N)$:

$$v_{0m} - \sum_{k=1}^{N} v_{0k}\left(a_{mk} - \frac{a_{1k}+a_{Nk}}{2}\right) = 2\cos(\alpha(s)-\theta) - \left[\cos(\alpha(s_1)-\theta)+\cos(\alpha(s_N)-\theta)\right],$$

$$\begin{aligned} &a_{mk} = \frac{1}{\pi}\int_{l_k^0} K(s_m^0,\sigma)d\sigma^0 = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{ie^{i(\alpha_m-\alpha_k)}\left[\ln\left|z_m-\zeta_k\right| + i\arg(z_m-\zeta_k)\right]\right\} = \\ &= -\frac{\sin(\alpha_m-\alpha_k)}{2}\ln\frac{X_{mk+1}^2+Y_{mk+1}^2}{X_{mk}^2+Y_{mk}^2} - \frac{\cos(\alpha_m-\alpha_k)}{\pi}\left(arctg\frac{Y_{mk+1}}{X_{mk+1}} - arctg\frac{Y_{mk}}{X_{mk}}\right), \end{aligned} \qquad (8)$$

где $X_{mk} = x(s_m^0) - \xi(\sigma_k^0)$, $Y_{mk} = y(s_m^0) - \eta(\sigma_k^0)$, (ξ_k, η_k) – координаты концов дужек l_k, s_m^0 – расчетные точки, в которых выполняется уравнение (8), α_k – угол, образуемый хордой l_k^0 с положительным направлением оси OX.

Многозначная функция arctg, необходимая для вычисления элементов a_{mk} нормируется так, чтобы обеспечить ее непрерывное изменение по переменным s, σ всюду, кроме s=0. Нормировка функции

$$w_{mk} = \frac{1}{\pi} arctg \frac{\eta_k - y_m}{\xi_k - x_m}, \quad \eta_k = \eta(\sigma_k^0), \quad \xi_k = \xi(\sigma_k^0), \quad x_m = x(s_m^0), \quad y_m = y(s_m^0)$$

зависит от знаков числителя и знаменателя, и от взаимного расположения точек σ_k и s_m. Обозначим $w_{mk}^0 = \frac{1}{\pi} arctg \frac{|\eta_k - y_m|}{|\xi_k - x_m|} \leq 0.5$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что требуемым условиям удовлетворяет функция:

$$w_{mk} = \lambda_1 w_{mk}^0 + 1 + \lambda_2 d_m,$$

$$\lambda_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (\xi_k - x_m)(\eta_k - y_m) > 0, \\ -1, & \text{иначе} \end{cases}$$

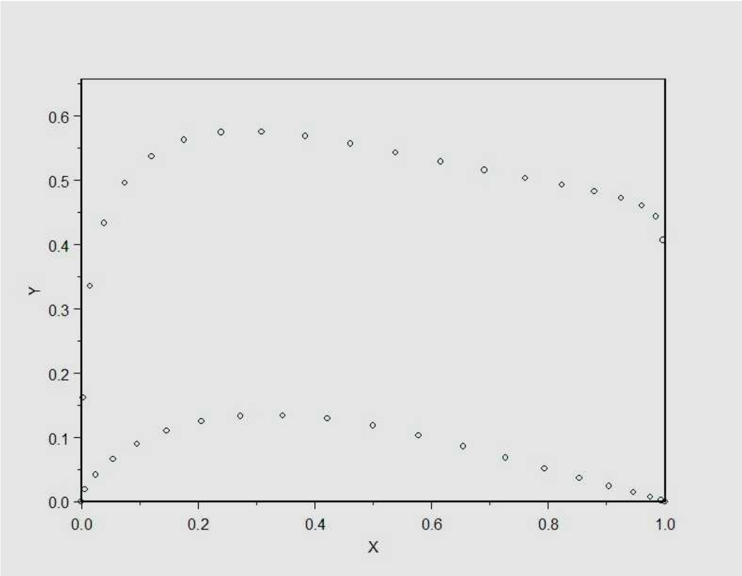
где $\lambda_2 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \xi_k - x_m > 0, \\ -1, & \text{иначе} \end{cases}$

$$d_m = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s_m \quad \text{расположена на спинке профиля,} \\ -1, & \text{если} \quad s_m \quad \text{на корытце.} \end{cases}$$

2. Расчеты

На основе предложенного метода созданы алгоритм решения и программа на ФОРТРАН. Проведены численные расчеты для эллипсов разных толщин и серии профилей «В» ЦАГИ со следующими геометрическими характеристиками:

$y = c\left[\frac{1}{4}(-x + 7x^2 - 6x^3) \pm x^{0.87}(1 - x^2)^{0.56}\right]$ – уравнение верхнего и нижнего контуров (знак + относится к верхнему контуру), x и y – координаты точек профиля. На рисунке в нижней части изображены расчетные точки верхнего контура, а в верхней части – распределение стационарной скорости для профиля «В» ЦАГИ при $c = 0.2$.



Заключение

В данной работе для численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно величины стационарной скорости $v_0(s)$ предложен метод замены интегрального уравнения системой алгебраических уравнений, основанный на замене профиля вписанным N-угольником с длиной стороны порядка величины N^{-1} и внутренним углом, близким к π. На основе предложенного метода созданы алгоритм решения и программа на ФОРТРАН. Проведены тестовые численные расчеты для эллипсов разных толщин и серии профилей «В» ЦАГИ.

Литература

1. Дармаев Т. Г., Дамбаев Ж. Г. О нестационарном обтекании произвольного профиля // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2013. — № 2. — С.60 – 69.

2. Головкин В. А. Нелинейная задача о неустановившемся обтекании произвольного профиля со свободно деформирующимся вихревым следом // Учёные записки ЦАГИ. — 1972. — Т.3. — №3.

3. Шумский Г. М. Нелинейная задача о движении системы профилей вблизи волнистой стенки // Известия СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1982. — №3. — Вып. 1. — С. 24 – 27.

4. Воробьев Н. Ф., Шашкина Г. Н. Метод расчета обтекания профилей несжимаемым потоком. — Исследование обтекания тел численными методами. — Новосибирск ИТПМ СО АН СССР. —1976. — С. 66 – 76.

5. Рябченко В. П., Сарян В. Э. К расчёту аэродинамических характеристик решёток профилей произвольной формы // Известия АН СССР. МЖГ. — 1972. — №2. — С. 105 – 112.

6. Рябченко В. П. Нестационарные аэродинамические характеристики

решёток произвольных профилей, вибрирующих в потенциальном потоке несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. МЖГ. — 1974. — № 1. — С. 15 – 20.

References

1. Darmaev T. G., Dambaev Zh. G. O nestacionarnom obtekanii proizvol'nogo profilja // Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika. — 2013. — № 2. — S.60 – 69.

2. Golovkin V. A. Nelinejnaja zadacha o neustanovivshemsja obtekanii proizvol'nogo profilja so svobodno deformirujushhimsja vihrevym sledom // Uchjonye zapiski CAGI. — 1972. — T.3. — №3.

3. Shumskij G. M. Nelinejnaja zadacha o dvizhenii sistemy profilej vblizi volnistoj stenki // Izvestija SO AN SSSR. Ser. tehn. nauk. — 1982. — №3. — Vyp. 1. — S. 24 – 27.

4. Vorob'ev N. F., Shashkina G. N. Metod rascheta obtekanija profilej neszhimaemym potokom. — Issledovanie obtekanija tel chislennymi metodami. — Novosibirsk ITPM SO AN SSSR. —1976. — S. 66 – 76.

5. Rjabchenko V. P., Sarjan V. Je. K raschjotu ajerodinamicheskih harakteristik reshjotok profilej proizvol'noj formy // Izvestija AN SSSR. MZhG. — 1972. — №2. — S. 105 – 112.

6. Rjabchenko V. P. Nestacionarnye ajerodinamicheskie harakteristiki reshjotok proizvol'nyh profilej, vibrirujushhih v potencial'nom potoke neszhimaemoj zhidkosti // Izvestija AN SSSR. MZhG. — 1974. — № 1. — S. 15 – 20.

Дармаев Тумэн Гомбоцыренович, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией вычислительных и геоинформационных технологий Бурятского государственного университета, e-mail: dtg@bsu.ru.

Цыдыпов Балдандоржо Дашиевич, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Института физического материаловедения СО РАН, e-mail: tsydypovbd@rambler.ru.

Darmaev Tumen Gombotsyrenovich, PhD, Head of the laboratory of Buryat State University.

Tsydypov Baldandorzho Dashievich, DSc, Leading researcher, Institute of Physical Materials Science of SB RAS.