УДК 517.956; 517.958
doi: 10.18101/2304-5728-2016-3-57-63

Аналитическое исследование некоторых математических моделей плоских задач движения жидкости

Во введении кратко излагаются принципы построения математических моделей движения жидкостей и возможные упрощения. Отмечаются сложности исследования процесса в трехмерном случае. Поэтому в основной части работы рассматриваются две плоские задачи движения невязкой несжимаемой жидкости. Математическими моделями являются задачи Римана-Гильберта для уравнения Коши-Римана и сопряженного уравнения Коши-Римана. Доказываются теоремы существования и единственности решений поставленных краевых задач.

Ключевые слова: математическая модель, невязкая несжимаемая жидкость, плоская задача, уравнение Коши-Римана, задача Римана-Гильберта.

Analytic treatment of some mathematical models of planar problems of the movement of liquid

In introduction the principles of creation of mathematical models of the movement of liquids and possible simplifications are briefly stated. Difficulties of research of process in a three-dimensional case are noted. Therefore in the main body of the article two planar problems of the movement of nonviscous incompressible liquid are considered. Mathematical models are Riemann-Hilbert problems for Cauchy-Riemann equation and adjoint Cauchy-Riemann equation. Theorems of existence and uniqueness of solutions of these problems are proved.

Keywords: mathematical model, nonviscous incompressible liquid, planar problem, Cauchy-Riemann equation, Riemann-Hilbert problem.

Введение

Движение среды, заполняющей некоторую область, считается заданным, если в любой момент времени t можно определить векторное поле скоростей $\overline{V}(\overline{x},t)$ в любой точке $\overline{x}$ рассматриваемой области. Кроме поля скоростей должны определяться, вообще говоря, в зависимости от задачи, давление P, плотность ρ, температура T и т.д.

При создании математической модели движения среды учитывают самые необходимые свойства среды и пренебрегают остальными, поскольку чем шире постановка, тем сложнее построить математическую модель, поддающуюся исследованию.

Случай движения невязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Эйлера [1]

$$div\overline{V} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\overline{V}}{dt} + \left(\overline{V}, \nabla\right)\overline{V} = -\frac{1}{\rho} gradP + \overline{F}, \tag{2}$$

где уравнение (1) является условием несжимаемости, а (2) – уравнением движения, причем первое слагаемое в правой части уравнения (2) выражает гидродинамические силы, второе – внешние силы.

Система уравнений (1), (2) имеет достаточно общий характер, поэтому интересные результаты можно получить для весьма узкого класса задач.

Поэтому вводятся дополнительные условия. Например, предполагается, что жидкость находится в *потенциальном* силовом поле, т.е. сила $\overline{F}$ – потенциальная и имеет потенциал U, такой, что выполнено равенство $U = grad\overline{F} = \nabla\overline{F}$. Здесь градиент вычисляется по пространственным переменным. Чаще всего таким полем служит поле тяготения (если в пространстве введена декартовая система координат, то $\overline{x} = (x, y, z)$ и $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$), направленное по оси z, для которого $U = -gz$.

Известно [1], что в этом случае во все время движения

$$rot\overline{V} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

где $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ – декартов базис в пространстве, $(v_1, v_2, v_3) = \overline{V}$ – координаты поля скоростей в этом базисе. Уравнение (3) означает, что отсутствует вращение жидкости. С другой стороны, это уравнение является условием потенциальности самого поля скоростей $\overline{V}$, что означает существование потенциала $\varphi(\overline{x}, t)$, для которого имеет место равенство $\nabla\varphi(\overline{x}, t) = \overline{V}$ (градиент берется по пространственным переменным).

Дальнейшие упрощения можно получить, если считать движение жидкости *установившимся*, т.е. поле скоростей $\overline{V}$ не зависит от времени.

Несмотря на проведенные упрощения, достаточно полно удается исследовать не очень большое количество пространственных задач гидродинамики.

Некоторые плоские задачи, учитывающие приведенные упрощения

Хорошие результаты получаются для *плоских* задач, к которым приводит допущение о том, что поле скоростей плоскопараллельное. Это означает, что существует направление $\overline{N}$, такое, что в любой точке поля скоростей $\overline{V} \perp \overline{N}$, причем в любой плоскости, перпендикулярной $\overline{N}$, картина поля одинаковая. Поэтому можно ограничиться одной плоскостью с базисом $(\overline{e}_1, \overline{e}_2,)$ и считать $\overline{N} = \overline{e}_3$.

Тогда условия несжимаемости и потенциальности, т.е. уравнения (1) и (3) примут вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

или в матричной форме получаем уравнение

$$Ev_x - Iv_y = 0, \tag{5}$$

где поле скоростей $\overline{V}(x, y)$ записано в виде матрицы-столбца

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} \end{pmatrix}, v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, потенциальное поле скоростей удовлетворяет сопряженному матричному уравнению Коши-Римана [2] и может быть найдено непосредственно как решение уравнения (5) при дополнительных условиях на границе.

Задача 1. Пусть несжимаемая невязкая жидкость течет в прямоугольном желобе

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < k, 0 < y < l\},$$

где стороны $0 < x < k, y = 0, y = l -$ непроницаемые стенки, а стороны $0 < y < l, x = 0, x = k$, открыты. На стороне $0 < y < l, x = 0,$ куда втекает жидкость, измерена компонента скорости $v_1 = \alpha(y)$, на противоположной стороне жидкость вытекает в направлении вектора e_1. Нас интересует плоское движение жидкости в желобе.

При таком движении жидкости на всех трех сторонах прямоугольника, кроме той, где $v_1 = \alpha(y)$, будет выполнено условие $v_2 = 0$.

Тогда математической моделью данного процесса будет следующая краевая задача: *в прямоугольнике* D *найти решение уравнения* (5) если *выполнены краевые условия*

$$v_1\big|_{x=0} = \alpha(y), v_2\big|_{y=0} = v_2\big|_{y=l} = v_2\big|_{x=k} = 0. \tag{6}$$

Сначала проведем аналитическое исследование модели, которая, по сути, является задачей Римана-Гильберта с разрывными краевыми условиями.

Теорема 1. Если функция $\alpha(y)$ дифференцируема в области D, то задача (5), (6) имеет единственное решение $v(x,y)$ из пространства Соболева [3], которое будет решением задачи почти всюду в заданном прямоугольнике.

Для доказательства теоремы сначала сделаем замену

$$v_1^\bullet(x,y) = v_1(x,y) - \alpha(y),\ v_2^\bullet(x,y) = v_2(x,y).$$

Тогда уравнение (4) запишется в виде

$$Ev_x^\bullet - Iv_y^\bullet = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha'(y) \end{pmatrix} \equiv f(y), \tag{5*}$$

т.е. уравнение станет неоднородным, а краевые условия для $v^\bullet$ все будут однородными.

Основной этап доказательства это получение априорных оценок. Для удобства уравнение (5*) запишем в симметрическом виде, а «звездочку» опустим. Получим

$$Kv \equiv Av_x - Bv_y = f(y), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и введем для D вектор $\overline{n} = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к границе прямоугольника Γ.

Рассмотрим интеграл [3]

$$\left(Kv, Kv\right)_0 = \iint_D \langle Kv, Kv \rangle\, dxdy = \|Kv\|_0^2,$$

где $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в R^2, $\|\cdot\|_0$ – норма в пространстве $L_2(D)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(Kv, Kv\right)_0 &= \left(Av_x, Av_x\right)_0 - 2\left(Av_x, Bv_y\right)_0 + \left(Bv_y, Bv_y\right)_0 = \\ &= \|Av_x\|_0^2 + \|Bv_y\|_0^2 - 2\iint_D \left(-v_{1x}v_{2y} + v_{2x}v_{1y}\right) dxdy. \end{aligned}$$

Далее используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} &\iint_D v_{2x}v_{1y}\,dxdy = -\iint_D v_2 v_{1xy}\,dxdy + \oint_\Gamma v_2 v_{1y} n_1 d\Gamma = \\ &= \iint_D v_{2y}v_{1x}\,dxdy - \oint_\Gamma v_2 v_{1x} n_2 d\Gamma = \iint_D v_{2y}v_{1x}\,dxdy. \end{aligned}$$

Здесь граничные интегралы обнуляются в силу однородности краевых условий. Поэтому

$$\left(Kv, Kv\right)_0 = \|Av_x\|_0^2 + \|Bv_y\|_0^2 = \|v_x\|_0^2 + \|v_y\|_0^2.$$

В силу теоремы вложения [3] имеет место неравенство

$$\|v_x\|_0^2 + \|v_y\|_0^2 \ge c^2 \|v\|_0^2,$$

которое означает, что норма $\|Kv\|_0$ эквивалентна норме $\|v\|_1$ в пространстве Соболева $W_2^1(D)$, а с помощью неравенства Гельдера получаем априорную оценку

$$\|Kv\|_0 \geq c\|v\|_0, \; c = const > 0.$$

Далее доказательство проводится методом, реализованным в работе [4].

Таким образом, задача (5), (6) однозначно разрешима. Численное исследование можно провести по схеме, предложенной в статье [5].

Вернемся к уравнениям (4). Вместо вектора скоростей $\bar{V}(x,y) = (v_1, v_2)$ введем «антивектор» скоростей $\bar{U}(x,y) = (u_1, u_2)$, полагая $u_1 = v_1, u_2 = -v_2$. Тогда уравнения (4) примут вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0,$$

т.е. «антивектор» скоростей, если записать его в виде матрицы-столбца $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, удовлетворяет самому матричному уравнению Коши-Римана

$$Ku \equiv Eu_x + Iu_y = 0. \tag{7}$$

Задача 2. Имеем плоское течение невязкой несжимаемой жидкости. В части плоскости, где происходит движение жидкости, выберем выпуклую ограниченную область D с границей Γ и единичным вектором $\bar{n} = (n_1, n_2)$ внешней нормали к этой границе. Разобьем границу на части, полагая

$$\Gamma^+ = \{(x,y) \in \Gamma \mid n_1 > 0\}, \Gamma^- = \{(x,y) \in \Gamma \mid n_1 < 0\}, \Gamma^0 = \Gamma \setminus \overline{\left(\Gamma^+ \bigcup \Gamma^-\right)}.$$

Причем рассматриваем случай $mes\Gamma^0 > 0$. В силу выпуклости области Γ^0 это либо один отрезок, либо два параллельных отрезка. В обоих случаях все эти отрезки параллельны оси Ox – это непроницаемые стенки.

Через части Γ^+ и Γ^- происходит свободное движение жидкости. Нас интересует движение жидкости в области D, если на Γ^+ замеряется компонента u_1, а на Γ^- – u_2.

Математической моделью этого процесса является следующая краевая задача: *В области* D *найти решение уравнения* (7)*, удовлетворяющее граничным условиям*

$$u_1\big|_{\Gamma^+} = g_1(x,y), u_2\big|_{\Gamma^-} = g_2(x,y), u_2\big|_{\Gamma^0} = 0. \tag{8}$$

Теорема. Если функции $g_k(x,y), k = \overline{1,2}$ дифференцируемы в области D, то задача (7), (8) имеет единственное решение $u(x,y) \in W_2^1(D)$, которое будет решением почти всюду в области.

Доказательство. Сначала сделаем замену

$$\tilde{u}_1(x,y) = u_1(x,y) - g_1(x,y),\ \tilde{u}_2(x,y) =$$
$$= u_2(x,y) - g_2(x,y), (x,y) \in D, \tilde{u}_2\big|_{\Gamma^0} = 0.$$

Тогда уравнение (7) $Ku \equiv Eu_x + Iu_y = 0$ станет неоднородным

$$K\tilde{u} \equiv E\tilde{u}_x + I\tilde{u}_y = \begin{pmatrix} g_{1x} - g_{2y} \\ g_{2x} + g_{1y} \end{pmatrix} = g(x,y),$$

а краевые условия все будут однородными. Доказательство теоремы при $\forall g(x,y) \in L_2(D)$ и при нулевых краевых условиях можно найти в работе [6], что, по сути, и будет доказательством теоремы 2.

Численный анализ этой модели можно провести методом конечных разностей.

Заключение

В статье аналитическими методами доказано существование единственных решений двух краевых задач для уравнения сопряженного уравнения Коши-Римана и самого уравнения Коши-Римана, которые с какой-то степенью точности описывают две плоские задачи течения невязкой несжимаемой жидкости. Численная реализация для первой модели может быть получена небольшим изменением программы для численного анализа бесконечно малых изгибаний поверхности положительной кривизны [7]. Вторая задача является обобщением первой на более сложные случаи областей, где изучается течение жидкости. Отметим, что в математических моделях поле скоростей определяется сразу без поиска потенциала этого поля и функции тока.

Литература

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973. — 416 с.

2. Ошоров Батор Б., Ошоров Бато Б. Элементы теории функций переменных кватернионов // Математика и методы ее преподавания: сб. статей. — Улан-Удэ: БГУ, 2001. — Вып. 2. — С. 54 – 57.

3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 336 с.

4. Ошоров Бато Б., Ошоров Батор Б. Краевые задачи для одной модельной системы уравнений первого порядка в трехмерном пространстве // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т.51, №5. — С. 635 – 641.

5. Ошоров Бато Б., Борлоева Э. А. Численное решение задач Римана-Гильберта // Инфокоммуникационные и вычислительные технологии системы: Материалы семинара молодых ученых в рамках III международной конференции. — Улан-Удэ – оз. Байкал, ВСГАКИ, 2010.

6. Ошоров Б. Б. Краевые задачи с разрывными граничными условиями для некоторых классов векторных и матричных функций. — М.: Академия Естествознания, 2010. — 257 с.

7. Ошоров Б. Б., Ошоров Бато Б. Об одной математической модели изгибаний поверхности // Вестник Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. — 2014. — №1. — С. 5 – 12.

References

1. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. Problemy gidrodinamiki i ih matematicheskie modeli. — M.: Nauka, 1973. — 416 s.

2. Oshorov Bator B., Oshorov Bato B. Jelementy teorii funkcij peremennyh kvaternionov // Matematika i metody ee prepodavanija: sb. statej. — Ulan-Udje: BGU, 2001. — Vyp. 2. — S. 54 – 57.

3. Sobolev S. L. Nekotorye primenenija funkcional'nogo analiza v matematicheskoj fizike. — M.: Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. — 336 s.

4. Oshorov Bato B., Oshorov Bator B. Kraevye zadachi dlja odnoj model'noj sistemy uravnenij pervogo porjadka v trehmernom prostranstve // Differencial'nye uravnenija. — 2015. — T.51, №5. — S. 635 – 641.

5. Oshorov Bato B., Borloeva Je. A. Chislennoe reshenie zadach Rimana-Gil'berta // Infokommunikacionnye i vychislitel'nye tehnologii sistemy: Materialy seminara molodyh uchenyh v ramkah III mezhdunarodnoj konferencii. — Ulan-Udje – oz. Bajkal, VSGAKI, 2010.

6. Oshorov B. B. Kraevye zadachi s razryvnymi granichnymi uslovijami dlja nekotoryh klassov vektornyh i matrichnyh funkcij. — M.: Akademija Estestvoznanija, 2010. — 257 s.

7. Oshorov B. B., Oshorov Bato B. Ob odnoj matematicheskoj modeli izgibanij poverhnosti // Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta tehnologij i upravlenija. — 2014. — №1. — S. 5 – 12.

Ошоров Бато Баторович, магистрант Института математики и информатики Бурятского государственного университета, e-mail: bboshorov@yandex.ru.

Oshorov Bato Batorovich, candidate for a master's degree in Institute of mathematics and informatics of Buryat State University.