

УДК 681.325.6

doi: 10.18101/2304-5728-2016-3-72-79

© *Н. В. Ярышкина, П. Б. Могнонов*

Описание цифровых схем с помощью λ -выражений

В статье предлагается методика описания цифровых схем с использованием математического аппарата λ -исчисления. Определяются основные правила выполнения описаний схем. Выделяются базовые элементы и их описания. На основе описаний базовых элементов схем строится λ -выражение, позволяющие описывать схемы различных уровней сложности.

В работе разбираются примеры описания комбинационных и последовательностных цифровых схем с помощью λ -выражений, которые иерархически можно отнести к второму уровню сложности. Приводится доказательство правильности полученных описаний с помощью таблиц истинности и операции λ -редукции выражений.

Ключевые слова: цифровые схемы, λ -выражения, описание схем.

© *N. V. Yarishkina, P. B. Mogonov*

Description digital circuits using λ -expression

The article proposes a methodology for the description of digital circuits using mathematical apparatus λ -calculus. Defines the main rules for executing descriptions of circuits. Stand out basic elements and their descriptions. Based on the descriptions of the basic circuit elements is constructed of a λ -expression that allows to describe the schema of different levels of difficulty.

In this work the examples describe combinational and sequential digital circuits by using λ -expressions, which hierarchically can be attributed to the second level of complexity. Contains a proof of the correctness of the obtained descriptions by using truth tables and the operation of the reduction for λ -expressions.

Keywords: digital circuits, λ -expressions, description schemes.

Введение

Процесс проектирования электронных устройств предполагает составление абстрактных описаний разрабатываемых объектов. Способы описания обычно определяются требованиями, определенными в техническом задании на проектируемое устройство. При проектировании цифровых схем для описания логики их работы могут применяться таблицы истинности, временные диаграммы, логические функции, функциональные схемы.

В этой статье предлагается способ описания цифровых схем с помощью λ -выражений, построение которых базируется на основе теории λ -исчисления.

1. Представление логических элементов с использованием математических выражений теории λ -исчисления

Для построения описаний элементов цифровых схем нужно в первую очередь определить объекты-константы и базовые объекты, которые будут приняты за основу в качестве так называемых строительных «кирпичиков». Из них в дальнейшем предполагается строить описания более сложных объектов цифровых схем.

В качестве объектов-констант выбраны неконвертируемые друг в друга и определенные в [1] логическая константа «истина», обозначаемая T и логическая константа «ложь», обозначаемая \perp . λ -термы логических констант записываются в виде:

$$T = \lambda x.x, \quad (1)$$

$$\perp = \lambda xy.x. \quad (2)$$

В качестве базовых элементарных объектов определяются устройства цифровых схем, представляющих собой логические элементы, реализующие функции инверсии, дизъюнкции и конъюнкции [1]. Логическая функция инвертора, выполняющего операцию отрицания «НЕ» записывается в виде

$$f(x) = \neg x = \bar{x}. \quad (3)$$

λ -выражение для этой функции строится на основе решения системы уравнений, описанных таблицей истинности элемента, и имеет вид

$$f(x) = \lambda x.x \perp. \quad (4)$$

Логическая функция второго базового элемента – дизъюнктора, выполняющего логическую операцию «ИЛИ» имеет вид:

$$f(x, y) = x \vee y, \quad (5)$$

а λ -выражение

$$f(x, y) = \lambda xy.x \perp y. \quad (6)$$

Аналогично логическая функция для конъюнктора, выполняющего логическую операцию «И» имеет вид

$$f(x, y) = x \& y, \quad (7)$$

а λ -выражение

$$f(x, y) = \lambda xy.x(y \perp) \perp. \quad (8)$$

Таким образом, имеется описание логических констант и элементарных базовых элементов логических схем, представленное средствами λ -исчисления. Далее стоит задача получить описание более сложных элементов цифровых схем с целью последующего их анализа, а также автоматизации процесса построения цифровых схем. Цифровые схемы состоящие из различных комбинаций базовых логических элементов можно по иерархии отнести ко второму уровню сложности. На этом уровне рас-

смаатриваются особенности построения описаний комбинационных и последовательностных схем.

2. Особенности описания комбинационных логических схем

На основе имеющихся λ -выражений описания констант и базовых логических элементов, определенных в первом параграфе статьи, можно строить описание более сложных объектов – комбинационных цифровых схем. По определению комбинационных цифровых схем в [2] значения выходных сигналов этих схем в следующий момент времени определяются только значениями входных сигналов и не зависят от значений выходных параметров в предыдущий момент времени.

Основываясь на определении, устанавливается в качестве правила производить построение λ -терма, описывающего схему, в иерархическом порядке, начиная с описания последнего элемента выходной функции, т.е. в направлении справа-налево и до тех пор, пока не будут расшифрованы все входные переменные.

Например, рассмотрим построение описания для комбинационной схемы, состоящей из двух элементов «И» - D1 и D2 (рис.1).

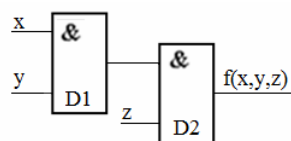


Рис.1. Пример комбинационной схемы

Логика работы устройства, представленного на рис.1 описывается логической функцией

$$f(x, y, z) = x \& y \& z . \tag{9}$$

Эта функция является выходной функцией всего устройства, и ее результат выдается на выходе элемента D2, поэтому описание схемы начинается с элемента D2. Элемент D2 имеет два входных сигнала: первый подается с выхода элемента D1, а второй – в виде значения переменной z. Логическая функция, выполняемая элементом D2 – конъюнкция, что соответствует базовому логическому элементу «И». Соответственно и λ -выражение, описывающее работу элемента D2, будет подобно выражению (8). В этом выражении в качестве первого аргумента будет значение функции $f(x, y)$, полученное с выхода элемента D1, а вторым аргументом – переменная z:

$$f(x, y, z) = \lambda x y z . (f(x, y))(z \perp) \perp . \tag{10}$$

На следующем шаге производится описание элемента D1, также реализующего логическую функцию конъюнкции. На вход элемента D1 поступают значения переменных x и y, а значение, полученное на выходе элемента D1, поступает на вход элемента D2. λ -выражение, описывающее

логику работы элемента D1, соответствует описанию базового логического элемента «И» согласно формулы (8):

$$f(x, y) = \lambda xy.x(y \perp) \perp. \quad (11)$$

В результате λ -выражение, описывающее всю схему будет иметь вид:

$$\lambda xyz.(x(y \perp) \perp)(z \perp) \perp. \quad (12)$$

Таким образом, используя λ -термы логических констант и элементарных базовых логических элементов, можно составлять описание комбинационных схем различной сложности, основываясь на принципах иерархии и операции суперпозиции функций [3].

3. Особенности описания логических схем последовательностного типа

Из определения схем последовательностного типа в [2] следует, что их базовыми элементами являются логические элементы с памятью, а именно, триггеры. При построении цифровых схем в интегральном исполнении используются следующие основные типы триггеров: RS-триггеры, D-триггеры, T-триггеры, JK-триггеры.

Для того, чтобы понять особенности построения описания логических функций триггеров в математическом выражении λ -исчисления, достаточно рассмотреть в качестве примера асинхронный RS-триггер.

Асинхронный RS-триггер является базовым и лежит в основе схем триггеров различных типов. Схемотехнически асинхронный RS-триггер состоит либо из двух логических элементов «ИЛИ-НЕ» (рис. 2а), либо двух логических элементов «И-НЕ» (рис. 2б). Логически на вход RS-триггера поступают два сигнала – R и S , и на выходе образуются два сигнала Q и \bar{Q} .

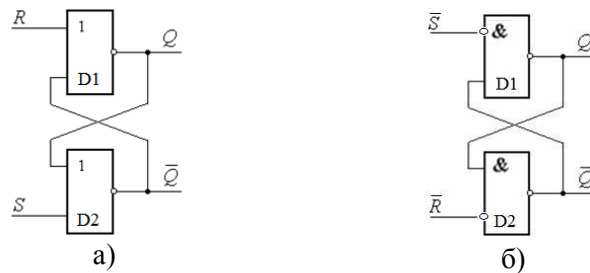


Рис.2 Асинхронный RS-триггер
а) на ЛЭ «ИЛИ-НЕ», б) на ЛЭ «И-НЕ»

Характеристические уравнения логики работы асинхронного RS-триггера имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= S_n \vee \bar{R}_n Q_n, \\ \bar{Q}_{n+1} &= R_n \vee \bar{S}_n \bar{Q}_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим формирование описания асинхронного RS-триггера на логических элементах «ИЛИ-НЕ». λ -выражения для этого типа будут строиться по формулам (6) и (4). В связи с тем, что у триггеров два выхода, то для их описания нужно строить два λ -выражения, т.е. для каждого выхода схемы кодируется свое описание. Элементы триггера охвачены цепями обратных связей, для чего выход каждого элемента подключен к одному из входов другого элемента. Значение выходного сигнала Q триггера, формирующегося на выходе элемента D1, зависит от значений входных сигналов R и \bar{Q} , а значение сигнала \bar{Q} , зависит от входного сигнала S и сигнала Q в предыдущий момент времени.

Из сказанного следует, что λ -выражение для выхода Q будет сложным, хотя состоит из двух аргументов, один из которых переменная r , а второй представлен выражением $(q \perp s)$ в инверсии:

$$Q_{n+1} = \lambda rqs.(r \perp ((q \perp s) \perp)) \perp. \tag{14}$$

Аналогично для \bar{Q} :

$$\bar{Q}_{n+1} = \lambda rqs.(((r \perp (q \perp)) \perp) \perp s) \perp. \tag{15}$$

Доказательством правильности λ -выражений, описывающих асинхронный RS-триггер, служит таблица истинности триггера. Таблица расширена полем « λ -терм», в котором производится подстановка значений входных сигналов в λ -выражение для Q_{n+1} и выполняются преобразования по правилам λ -конверсии для получения значения функции при заданных входных параметрах:

R_n	Q_n	S_n	λ -терм	Q_{n+1}
1	2	3	4	5
0	0	0	$\lambda rqs.(r \perp ((q \perp s) \perp)) \perp \mid \perp \perp \perp \perp =$ $= (\perp \perp ((\perp \perp \perp) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp ((\lambda xy..x \perp \perp) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp ((T \perp) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp ((\lambda x..x \perp) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp (\perp \perp)) \perp = (\perp \perp (\lambda xy..x \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp T) \perp = (\lambda xy..x \perp T) \perp = TT \perp =$ $= \lambda x..xT \perp = T \perp = \lambda x..x \perp = \perp$	0 (хранение «0»)
1	0	0	$\lambda rqs.(r \perp ((q \perp s) \perp)) \perp \mid T \perp \perp =$ $= (T \perp ((\perp \perp \perp) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((\lambda xy..x \perp \perp) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((T \perp) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((\lambda x..x \perp) \perp)) \perp =$ $= (T \perp (\perp \perp)) \perp = (T \perp (\lambda xy..x \perp)) \perp =$ $= (T \perp T) \perp = (\lambda x..x \perp T) \perp = \perp T \perp =$ $= \lambda xy..xT \perp = T \perp = \lambda x..x \perp = \perp$	0 подтверждение «0»

Н. В. Ярышкіна, П. Б. Могнонов. Описание цифровых схем с помощью λ -выражений

0	0	1	$\lambda rqs.(r \perp ((q \perp s) \perp)) \perp \perp \perp T =$ $= (\perp \perp ((\perp \perp T) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp ((\lambda xy..x \perp T) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp ((TT) \perp)) \perp = (\perp \perp ((\lambda x..xT) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp (T \perp)) \perp = (\perp \perp (\lambda x..x \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp \perp) \perp = (\lambda xy..x \perp \perp) \perp = T \perp \perp =$ $= \lambda x..x \perp \perp = \perp \perp = \lambda xy..x \perp = T$	1 (установка «0»)
---	---	---	--	----------------------

1	2	3	4	5
1	0	1	$\lambda rqs.(r \perp ((q \perp s) \perp)) \perp T \perp T =$ $= (T \perp ((\perp \perp T) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((\lambda xy..x \perp T) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((TT) \perp)) \perp = (T \perp ((\lambda x..xT) \perp)) \perp =$ $= (T \perp (T \perp)) \perp = (T \perp (\lambda x..x \perp)) \perp =$ $= (T \perp \perp) \perp = (\lambda x..x \perp \perp) \perp = (\perp \perp) \perp =$ $= (\lambda xy..x \perp) \perp = T \perp = \lambda x..x \perp = \perp$	0 неопределенность
0	1	0	$\lambda rqs.(r \perp ((q \perp s) \perp)) \perp \perp T \perp =$ $= (\perp \perp ((T \perp \perp) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp ((\lambda x..x \perp \perp) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp ((\perp \perp) \perp)) \perp = (\perp \perp ((\lambda xy..x \perp) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp (T \perp)) \perp = (\perp \perp (\lambda x..x \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp \perp) \perp = (\lambda xy..x \perp \perp) \perp = T \perp \perp =$ $= \lambda x..x \perp \perp = \perp \perp = \lambda xy..x \perp = T$	1 (хранение «1»)
1	1	0	$\lambda rqs.(r \perp ((q \perp s) \perp)) \perp TT \perp =$ $= (T \perp ((T \perp \perp) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((\lambda x..x \perp \perp) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((\perp \perp) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((\lambda xy..x \perp) \perp)) \perp =$ $= (T \perp (T \perp)) \perp = (T \perp (\lambda x..x \perp)) \perp =$ $= (T \perp \perp) \perp = (\lambda x..x \perp \perp) \perp = \perp \perp \perp =$ $= \lambda xy..x \perp \perp = T \perp = \lambda x..x \perp = \perp$	0 (сброс в «0»)
0	1	1	$\lambda rqs.(r \perp ((q \perp s) \perp)) \perp \perp TT =$ $= (\perp \perp ((T \perp T) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp ((\lambda x..x \perp T) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp ((\perp T) \perp)) \perp = (\perp \perp ((\lambda xy..xT) \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp (T \perp)) \perp = (\perp \perp (\lambda x..x \perp)) \perp =$ $= (\perp \perp \perp) \perp = (\lambda xy..x \perp \perp) \perp = T \perp \perp =$ $= \lambda x..x \perp \perp = \perp \perp = \lambda xy..x \perp = T$	1 подтверждение «1»
1	1	1	$\lambda rqs.(r \perp ((q \perp s) \perp)) \perp TTT =$ $= (T \perp ((T \perp T) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((\lambda x..x \perp T) \perp)) \perp =$ $= (T \perp ((\perp T) \perp)) \perp = (T \perp ((\lambda xy..xT) \perp)) \perp =$ $= (T \perp (T \perp)) \perp = (T \perp (\lambda x..x \perp)) \perp =$ $= (T \perp \perp) \perp = (\lambda x..x \perp \perp) \perp = \perp \perp \perp =$ $= \lambda xy..x \perp \perp = T \perp = \lambda x..x \perp = \perp$	0 неопределенность

Из приведенной таблицы можно сделать вывод о том, что в ходе операции минимизации λ -термов получены результаты, соответствующие таблице истинности устройства, а значит, описание асинхронного RS-триггера при помощи λ -выражений выполнено верно.

Аналогичным образом можно представлять λ -выражения и для других типов триггеров, которые в дальнейшем будут определять базовые запоминающие элементы.

Заключение

В результате проведенной работы на основе описания атомарных элементов предметной области (констант, базовых логических и запоминающих), можно описывать более сложные объекты цифровых схем с использованием математического аппарата λ -исчисления. В дальнейшем на основе полученных описаний можно автоматически образовывать различные комбинации, что позволит строить объекты со сложной структурой.

В целом λ -описания объектов, выраженных элементами цифровых схем будут полезны с точки зрения построения наиболее общей универсальной модели синтеза цифровых схем, а также формализации их описания.

Литература

1. Вольфенгаген В. Э., Яцук В. Я. Аппликативные вычислительные системы и концептуальный метод проектирования систем знаний / Под. ред. проф. Л. А. Майборода. — М.: Мин-во Оборона СССР, 1987. — 256 с.
2. Зубчук В. И., Сигорский В. П., Шкуро А. Н. Справочник по цифровой схемотехнике. — К.: Тэхника, 1990. — 448 с.
3. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — 2-е изд. — М.: Наука., гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 368 с.

References

1. Volfengagen V. Je., Jacuk V. Ja. Applikativnye vychislitel'nye sistemy i konceptual'nyj metod proektirovanija sistem znaniij / Pod. red. prof. L. A. Majborody. — M.: Min-vo Oborony SSSR, 1987. — 256 s.
2. Zubchuk V. I., Sigorskij V. P., Shkuro A. N. Spravochnik po cifrovoj shemotehnike. — K.: Tjehnika, 1990. — 448 s.
3. Mal'cev A. I. Algoritmy i rekursivnye funkicii. — 2-e izd. — M.: Nauka., gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. — 368 s.

Н. В. Ярышкина, П. Б. Могнонов. Описание цифровых схем с помощью λ-выражений

Ярышкина Наталья Владимировна, начальник информационного отдела МВД по РБ, e-mail: tигра_26@mail.ru.

Могнонов Пётр Борисович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления.

Yarishkina Natalia Vladimirovna, a head of the information Department of the Ministry of internal Affairs on RB.

Mogonov Petr Borisovich, candidate of technical sciences, associate professor of department of Electronic computing systems of East Siberian state university of technologies and management.