МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

УДК 004.932.2
doi: 10.18101/2304-5728-2016-4-43-49

© Д. Б. Абрамов, С. О. Баранов, С. В. Лейхтер, С. Н. Чуканов

Математическая модель представления однопараметрической кривой и двухпараметрической поверхности в форме мультипликативных интегралов [1]

В работе рассмотрена математическая модель представления однопараметрической кривой и двухпараметрической поверхности в форме мультипликативных интегралов. Использование такой модели позволяет синтезировать поверхность с помощью элементарных функций, что сокращает объем вычислительных операций и численные погрешности интегрирования. Представление решения задачи Коши дифференциальных уравнений матричнозначными функциями обеспечивает отсутствие зависимости от координат.

Ключевые слова: параметрическое задание поверхности, мультипликативный интеграл, инвариантность к преобразованию вектора состояния.

© D. B. Abramov, S. O. Baranov, S. V. Lejhter, S. N. Chukanov

Mathematical model of representation of one-parameter curve and two-parameter surface as product integral representation

Mathematical model for representing of one-parameter curve and two-parameter surface in the form of product integral is considered in the paper. The use of this model allows to synthesize a surface by means of elementary functions, which reduces amount of computational operations and numerical errors of integration. Representation of solutions of the Cauchy problem of differential equations by matrix-valued function ensures the absence of dependence on the coordinates (coordinate-free solutions).

Keywords: parametric surface, product integral, invariant to vector state transformation.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14-07-0027215 и 14-08-14-08-01132) и при поддержке Программы РАН по проекту «Математические методы распознавания образов и прогнозирования» (№0314-2014-2017) (№ госрегистрации 01201351843)

Введение

Моделирование кривых и поверхностей является одной из основных задач распознавания формы. Кривые и поверхности могут быть заданы явными и неявными соотношениями, а также параметрами (параметрическое задание) [1]. Параметрическое задание кривой определяется непрерывным дифференцируемым отображением $\gamma : I \to X$ интервала $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ в топологическом пространстве размерности не менее 2. Линейная параметризация кривой матричнозначными функциями определяется из соотношения: $X(\tau) = F(\tau) \cdot X_0$, где τ – параметр кривой (например, длина дуги кривой); матрица $F(0)$ – единичная; $X_0 = X(0)$.

Параметрическое задание поверхности определяется отображением открытого подмножества евклидовой плоскости непрерывными дифференцируемыми функциями в топологическом пространстве размерности не менее 3. Линейная параметризация поверхности матричнозначными функциями определяется из соотношения: $X(\tau,\sigma) = F(\tau,\sigma) \cdot X_0$, где τ,σ – параметры поверхности; матрица $F(0,0)$ – единичная; $X_0 = X(0,0)$.

Из соотношений для параметрического задания кривой или поверхности можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения и задание кривой или поверхности сводится к решению задачи Коши. При преобразовании вектора состояния преобразуется структура дифференциальные уравнения, поэтому актуальной является задача получения решения задачи Коши дифференциальные уравнения и параметрического задания кривых или поверхностей, инвариантного к преобразованию вектора состояния.

В работе [5] представлен метод получения мультипликативных интегралов (product integrals), который позволяет решить задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение типа

$$Y'(s) = A(s)Y(s), Y(s_0) = Y_0,$$

где $Y, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матричнозначные функции, $s \in \mathbb{R}$ является параметром, а штрих означает дифференцирование. Пусть $P = \{s_0,...,s_n\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$ и $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}; \forall k = 1,...,n$. В интервале $[s_{k-1}, s_k]$ аппроксимируем $A(s) \approx A(s_k) = \mathrm{const}$ и решим дифференциальное уравнение с начальным значением $Y(s_{k-1})$:

$$Y(s_k) \approx e^{A(s_k)\Delta s_k} Y(s_{k-1}).$$

При заданной $Y(a)$ можно получить приближенное значение для $Y(b)$:

$$Y(b) \approx \left(\lim_{\mu(P)\to 0} \prod_{k=1}^{n} e^{A(s_k)\Delta s_k} \right) \cdot Y(a) \equiv \left(\prod_{a}^{b} e^{A(s)ds} \right) \cdot Y(a), \tag{1}$$

где $\mu(P) = \max(s_k - s_{k-1}); k = 1,...,n$.

Пусть $F(x,a) = \prod_{a}^{x} e^{A(s)ds}; x \in [a,b]$; тогда $F(x,a)$ является решением задачи Коши:

$$d/_{dx} F(x,a) = A(x)F(x,a);\ F(a,a) = I^{n\times n}.$$

Представление решения задачи Коши дифференциальных уравнений матричнозначными функциями обеспечивает отсутствие зависимости от координат (coordinate-free); такое представление имеет преимущество по сравнению с представлением в локальных координатах.

1. Представление однопараметрической кривой в форме мультипликативного интеграла [4]

Каждая точка кривой может быть представлена параметром $\tau \in [\tau_0, \tau_1] \in \mathbb{R}$: $X(\tau) = F(\tau) \cdot X_0$, где заданы матрицы $F(\tau_0) = I^{n\times n}$, $X_0 = X(\tau_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Функциональная зависимость матрицы $F(\tau)$ может быть представлена в форме мультипликативного интеграла:

$$F(\tau) = P_\tau e^{\int_{\tau_0}^{\tau_1} A(\tau')d\tau'} \equiv \prod_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau')d\tau'},$$

где $A_\tau = \partial F/_{\partial\tau} \cdot F^{-1}$; P_τ указывает на упорядочение по параметру τ. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения $X'_\tau = A_\tau \cdot X$ с использованием мультипликативного интеграла имеет вид:

$$X(\tau) = \left(\prod_{\tau_0}^{\tau} e^{A(\tau')d\tau'} \right) \cdot X(\tau_0). \tag{2}$$

При преобразовании матрицы состояния $X(\tau) \to g(\tau)X(\tau)$, матрица $A_\tau(\tau)$ преобразуется в соответствии с соотношением: $A_\tau(\tau) \to g(\tau)A_\tau(\tau)g^{-1}(\tau) + g'_\tau \cdot g^{-1}(\tau)$, а мультипликативный интеграл преобразуется в соответствии (см. Приложение 1):

$$P_\tau \exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} A(\tau')d\tau' \right) \to g(b)\left(P_\tau \exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} A(\tau')d\tau' \right) \right) g^{-1}(a). \tag{3}$$

След матрицы $P_\tau \exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} A(\tau')d\tau' \right) P_\tau e^{\int_{\tau_0}^{\tau} A(\tau')d\tau'}$ преобразуется в соответствии с соотношением:

$$\mathrm{trace}\left[P_\tau \exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} A(\tau')d\tau'\right)\right] \to \mathrm{trace}\left[P_\tau \exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} A(\tau')d\tau'\right)\right]\mathrm{trace}\left[g(b)g^{-1}(a)\right]; \quad (4)$$

при $g(b) = g(a)$, значение $P_\tau \exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} A(\tau')d\tau'\right)$ является инвариантом.

Пример 1. Рассмотрим параметрическое представление окружности с параметром – длиной дуги τ:

$$X(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \cdot X_0; \; F(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix};$$

для которого: $A_\tau = F_\tau' F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

При $X_0 = I^{2\times 2}$ получим:

$$F(\tau) = P_\tau \exp\left(\int_0^{\tau} A_\tau d\tau'\right) = P_\tau \exp\left(\int_0^{\tau} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d\tau'\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tau\right).$$

Пусть на матрицу состояния $X(\tau)$ действует элемент группы поворота и масштабирования:

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix};$$

тогда матрица $F(\tau)$ преобразуется в соответствии с соотношением:

$$F(\tau) = g \cdot P_\tau \exp\left(\int_0^{\tau} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d\tau'\right) \cdot g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tau\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значение $\mathrm{trace}\left[F(\tau)\right] = 2 \cdot \cos(\tau)$ является инвариантном по отношению к действию элемента группы g. □

2. Представление двухпараметрической поверхности в форме мультипликативных интегралов

Двухпараметрическую поверхность $X(\sigma,\tau) = F(\sigma,\tau) \cdot X_0$ с параметрами σ, τ на интервалах границы поверхности $\tau \in [\tau_0, \tau_1] \in \mathbb{R}; \sigma \in [\sigma_0, \sigma_1] \in \mathbb{R}$, $F(\tau_0, \sigma_0) = I$ можно представить в форме решение задачи Коши дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} X_\tau' &= A_\tau \cdot X; \\ X_\sigma' &= A_\sigma \cdot X, \end{aligned} \quad (5)$$

при траектории изменения параметров $(\tau_0, \sigma_0) \to (\tau, \sigma_0) \to (\tau, \sigma)$ в виде: $X(\tau,\sigma) = P(\sigma,\sigma_0,\tau) \cdot Q(\sigma,\tau,\tau_0) \cdot X(\tau_0,\sigma_0)$, или (при траектории изменения параметров $(\tau_0,\sigma_0)\to(\tau_0,\sigma)\to(\tau,\sigma))$ в виде: $X(\tau,\sigma)=Q(\sigma,\tau,\tau_0)\cdot P(\sigma,\sigma_0,\tau)\cdot X(\tau_0,\sigma_0)$, где $Q(\sigma,\tau,\tau_0)$ – мультипликативный интеграл:

$$Q(\sigma,\tau,\tau_0)=P_\tau e^{\int_{\tau_0}^{\tau} A_\tau(\sigma,\tau')d\tau'}$$

(P_τ указывает на упорядочение по траектории по отношению к τ, при этом σ – параметр); $P(\sigma,\sigma_0,\tau)$ – мультипликативный интеграл: $P(\sigma,\sigma_0,\tau)=P_\sigma e^{\int_{\sigma_0}^{\sigma} A_\sigma(\sigma',\tau)d\sigma'}$ (P_σ указывает на упорядочение по траектории по отношению к σ, при этом τ – параметр);

$$A_\tau(\sigma,\tau)=\left[F'_\tau\cdot(\sigma,\tau)\cdot F^{-1}(\sigma,\tau)\right]\Big|_{\sigma=\mathrm{const}},$$

$$A_\sigma(\sigma,\tau)=\left[F'_\sigma\cdot(\sigma,\tau)\cdot F^{-1}(\sigma,\tau)\right]\Big|_{\tau=\mathrm{const}}.$$

Введем составные матрицы [2, 6]: $U(\sigma,\tau)=Q(\sigma,\tau,\tau_0)\cdot P(\sigma,\sigma_0,\tau_0)$; $T(\sigma,\tau)=P(\sigma,\sigma_0,\tau_0)\cdot Q(\sigma_0,\tau,\tau_0)$, которые переводят траекторию из состояния параметров (τ_0,σ_0) в состояние (τ,σ). В общем случае матрицы $P(\sigma,\sigma_0,\tau_0)$ и $Q(\sigma,\tau,\tau_0)$ не являются коммутативными: $Q(\sigma,\tau,\tau_0)\cdot P(\sigma,\sigma_0,\tau_0)\neq P(\sigma,\sigma_0,\tau_0)\cdot Q(\sigma_0,\tau,\tau_0)$, поэтому для задания точек поверхности важно соблюдать упорядочение траектории. В дальнейшем будем использовать упорядочение: $(\tau_0,\sigma_0)\to(\tau,\sigma_0)\to(\tau,\sigma)$.

Пример 2. Рассмотрим задание сферы единичного радиуса параметрами: поворот исходного триэдра $OXYZ$ на угол $\theta(Y)\in[0;\pi)$ относительно оси OY; последующий поворот на угол $\varphi(Z)\in[0;2\pi)$ триэдра относительно нового положения оси OZ'. Представление сферы матричнозначными параметрическими функциями будет иметь вид: $X(\varphi,\theta)=F(\varphi,\theta)\cdot X_0$, где:

$$F(\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix};\ X_0=I^{3\times3}.$$

Представлению сферы соответствуют дифференциальные уравнения: $X'_\theta=A_\theta\cdot X$, $X'_\varphi=A_\varphi\cdot X$, где:

$$A_\theta=F'_\theta\big|_{\varphi=0}\cdot F^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix};\ A_\varphi=F'_\varphi\cdot F^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_\theta = L_Y$ и $A_\varphi = L_Z$ являются базисными для лиевой алгебры $so(3)$, поэтому представление сферы мультипликативными интегралами будет иметь вид: $F(\varphi,\theta) = \left(P_\varphi e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} L_z d\varphi'} \right) \cdot \left(P_\theta e^{\int_{\theta_0}^{\theta} L_y d\theta'} \right) = e^{L_z\varphi} \cdot e^{L_y\theta}$, при $\varphi_0 = \theta_0 = 0$. □

3. Преобразование мультипликативных интегралов

При преобразовании матрицы состояния $X(\sigma,\tau) \to g(\sigma,\tau) X(\sigma,\tau)$, матрицы $A_\tau(\sigma,\tau)$ и $A_\sigma(\sigma,\tau)$ преобразуется в соответствии с соотношениями:

$$A_\tau(\sigma,\tau) \to g(\sigma,\tau) A_\tau(\sigma,\tau) g^{-1}(\sigma,\tau) + {\partial g(\sigma,\tau)}/{\partial\tau} \cdot g(\sigma,\tau)^{-1};$$

$$A_\sigma(\sigma,\tau) \to g(\sigma,\tau) \cdot A_\sigma(\sigma,\tau) \cdot g^{-1}(\sigma,\tau) + {\partial g(\sigma,\tau)}/{\partial\sigma} \cdot g(\sigma,\tau)^{-1},$$

соответственно. При этом преобразование для $P(\sigma,\sigma_0,\tau)$: $P(\sigma,\sigma_0,\tau) \to g(\sigma,\tau) P(\sigma,\sigma_0,\tau) g^{-1}(\sigma_0,\tau)$ (см. Приложение 1); преобразование для $Q(\sigma,\tau,\tau_0)$: $Q(\sigma,\tau,\tau_0) \to g(\sigma,\tau) Q(\sigma,\tau,\tau_0) g^{-1}(\sigma,\tau_0)$. Преобразование для составной матрицы $T(\sigma,\tau)$: $T(\sigma,\tau) = P(\sigma,\sigma_0,\tau) Q(\sigma,\tau,\tau_0) \to g(\sigma,\tau) T(\sigma,\tau) g^{-1}(\sigma_0,\tau_0)$. След матрицы $T(\sigma,\tau)$ преобразуется в соответствии с соотношением: $\mathrm{trace}\left[T(\sigma,\tau)\right] \to \mathrm{trace}\left[T(\sigma,\tau)\right] \mathrm{trace}\left[g(\sigma,\tau) g^{-1}(\sigma_0,\tau_0)\right]$. При выполнении условия $g(\sigma,\tau) = g(\sigma_0,\tau_0)$ значение $\mathrm{trace}\left[T(\sigma,\tau)\right]$ является инвариантом.

Приложение

L-производная дифференцируемой матричнозначной функции $P(x)$ равна: $LP(x) = P'(x) P^{-1}(x)$. Мультипликативный интеграл L-производной: $\prod_a^x e^{(LP)(s)ds} = P'(x) P^{-1}(a)$. L-производная имеет следующие свойства [5]:

(i) $\prod_a^x e^{\left[A(s)+B(s)\right]ds} = \prod_a^x e^{A(s)ds} \cdot \prod_a^x e^{P^{-1}(s)B(s)P(s)ds}$,где $P(x) = \prod_a^x e^{A(s)ds}$ (правило сумм).

(ii) $P(x)\left(\prod_a^x e^{B(s)ds} \right) P^{-1}(a) = \prod_a^x e^{\left[LP(s)+P^{-1}(s)B(s)P(s)\right]ds}$ (правило подобия).

Заключение

Рассмотрена математическая модель представления однопараметрической кривой и двухпараметрической поверхности в форме мультипликативных интегралов. Использование такой модели позволяет синтезировать поверхность с помощью элементарных функций, что сокращает объем вычислительных операций и численные погрешности интегрирования. Представление решения задачи Коши дифференциальных уравнений матричнозначными функциями обеспечивает отсутствие зависимости от координат и инвариантность представления по отношению к преобразованию вектора состояния. Метод представления однопараметрической кривой и двухпараметрической поверхности в форме мультипликативных интегралов может использовать матричные лиевы алгебры [3].

Литература/ References

1. Abbena E., Salamon S., Gray A. Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica. — CRC press. — 2006.
2. Aref'eva I. Y. Non-Abelian stokes formula // Theoretical and Mathematical Physics. — 1980. — T. 43. — №. 1. — C. 353 – 356.
3. Baker A. Matrix groups: An introduction to Lie group theory. – Springer Science & Business Media. — 2012.
4. Chukanov S. N. Constructing invariants for visualization of vector fields defined by integral curves of dynamic systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. — 2011. — T. 47. — №. 2. — C. 151 – 155.
5. Dollard J. D., Friedman C.N. Product Integration. – Addison Wesley, 1979.
6. Karp R. L., Mansouri F., Rno J. S. Product Integral Representations of Wilson Lines and Wilson loops and Non-Abelian Stokes Theorem // arXiv preprint hep-th/9903221.

Абрамов Дмитрий Борисович, аспирант, ФГБОУ ВО Сибирская автомобильно-дорожная академия, e-mail: abramov@kvarkstudio.ru.

Баранов Сергей Олегович, аспирант, ФГБОУ ВО Сибирская автомобильно-дорожная академия, e-mail: serj@doctor.com.

Лейхтер Сергей Владимирович, аспирант, ФГБОУ ВО Сибирская автомобильно-дорожная академия, e-mail: leykhter@mail.ru.

Чуканов Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, e-mail: ch_sn@mail.ru.

Abramov Dmitry Borisovich, graduate student, Siberian State Automobile and Highway Academy.

Baranov Sergei Olegovich, graduate student, Siberian State Automobile and Highway Academy.

Lejhter Sergej Vladimirovich, graduate student, Siberian State Automobile and Highway Academy.

Chukanov Sergey Nikolaevich, Leading Researcher, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences is, Omsk branch