ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.95
doi: 10.18101/2304-5728-2016-4-76-86

© *М. А. Керефов, С. Х. Геккиева*

Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения

В работе рассматривается нелокальное волновое уравнение с переменным коэффициентом в прямоугольной области. Исследована первая краевая задача в дифференциальной форме, а также метод прямых для решения в разностной форме. Получено решение системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающих при использовании метода прямых.

Ключевые слова: нелокальное волновое уравнение, производная дробного порядка, метод прямых, априорная оценка.

© *M. A. Kerefov, S. Kh. Gekkieva*

First boundary problem for the inhomogeneous wave nonlocal equation

In this paper, we consider nonlocal wave equations with variable coefficients in a rectangular domain. First boundary value problem for differential equation is studied, as well as method of lines for solving difference equations. Solution to the difference equation with constant coefficients appearing when applying the method of lines obtained.

Keywords: nonlocal wave equation, a derivative of fractional order, method of lines, a priori estimate.

Введение

При математическом моделировании сплошных сред с памятью возникают уравнения, описывающие новый тип волнового движения, занимающего промежуточное положение между обычной диффузией и классическими волнами [1, 2]. В монографии [3] приведена подробная библиография по уравнениям в частных производных дробного порядка, в частности, рассматривается диффузионно-волновое уравнение. В работе [4] рассмотрены краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной.

Данная работа посвящена изучению краевых задач для волнового уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках.

1. Первая краевая задача в дифференциальной форме

Задача. В области $Q_T = (0,\ell)\times(0,T]$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$D_{0t}^{\alpha+1}u = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + f(x,t), \quad 0<x<l, \quad 0<t\le T, \tag{1}$$

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\Big|_{t=0} = u_0(x), \qquad D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\Big|_{t=0} = u_1(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad 0\le t\le T, \tag{3}$$

где $0\le c_1\le k(x,t)\le c_2$, $0\le m_1\le k_x(x,t)\le m_2$, $k_t\le 0$ всюду на $\bar{Q}_T$. Здесь $D_{0t}^{\alpha}u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_0^t \frac{u(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$, $0<\alpha<1$, – дробная производная Римана-Лиувилля порядка α.

В случае, когда коэффициент уравнения (1) является постоянной величиной, решение задачи (1)–(3) можно найти методом разделения переменных [1].

Допустим существование регулярного решения [3] задачи (1)–(3), тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $k_x(x,t)$, $k_t(x,t)$, $f(x,t)\in C(\bar{Q}_T)$; $u_0(x)$, $u_1(x)\in C[0,l]$, $k\ge c_1>0$, $k_t\le 0$ всюду на $\bar{Q}$ и выполнено условие $u_1(0)=u_1(l)=0$, тогда для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}u\right\|_0^2 \le M(t)\left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \|u_1'(x)\|_0^2 + \|u_1''(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2\right). \tag{4}$$

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, полагая

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x),$$

так, что $v(x,t)$ представляет отклонение функции $u(x,t)$ от известной функции $\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)$. С учетом $D_{0t}^{\alpha+1}t^{\alpha-1}=0$ [3], имеем

$$D_{0t}^{\alpha+1}v - (kv_x)_x = f(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(k_x u_1'(x) + k u_1''(x)\right).$$

Итак, функция $v(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha+1}v - (kv_x)_x = F(x,t), \quad 0<x<l, \quad 0<t\le T, \tag{5}$$

с начальными условиями

$$D_{0t}^{\alpha}v(x,t)\Big|_{t=0}=D_{0t}^{\alpha}\left(u(x,t)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)\right)\Bigg|_{t=0}=$$

$$=u_0(x)-\frac{u_1(x)}{\Gamma(\alpha)}D_{0t}^{\alpha}t^{\alpha-1}\Big|_{t=0}=u_0(x),$$

$$D_{0t}^{\alpha-1}v(x,t)\Big|_{t=0}=D_{0t}^{\alpha-1}\left(u(x,t)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)\right)\Bigg|_{t=0}=$$

$$=u_1(x)-\frac{u_1(x)}{\Gamma(\alpha)}D_{0t}^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\Bigg|_{t=0}=0$$

и граничными условиями

$$v(0,t)=v(l,t)=0,\qquad 0\le t\le T,$$

где $F(x,t)=f(x,t)+\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(k_x u_1'(x)+ku_1''(x)\right)$.

Аналогично [4] получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана-Лиувилля, для чего умножим уравнение (5) скалярно на $D_{0t}^{\alpha}v$:

$$\left(D_{0t}^{\alpha+1}v,D_{0t}^{\alpha}v\right)-\left(\left(kv_x\right)_x,D_{0t}^{\alpha}v\right)=\left(F,D_{0t}^{\alpha}v\right),\tag{6}$$

где $(u,v)=\int\limits_0^l uv\,dx$, $(u,u)=\|u\|_0^2$.

Преобразуем слагаемые тождества (6):

$$\left(D_{0t}^{\alpha+1}v,D_{0t}^{\alpha}v\right)=\int\limits_0^l\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^t\frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\;\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx=$$

$$=\int\limits_0^l\frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^t\frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\;\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx=$$

$$=\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha}v\right)^2dx=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2,$$

$$\left(\left(kv_x\right)_x,D_{0t}^{\alpha}v\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l\left(kv_x\right)_x\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{kv_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Bigg|_0^l-\int\limits_0^l kv_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kv_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx,$$

$$(F, D_{0t}^{\alpha} v) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \left\| D_{0t}^{\alpha} v \right\|_0^2 .$$

С учетом полученных неравенств из (6) получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^l k v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v_x(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_0^2 + \varepsilon\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2 . \qquad (7)$$

Проинтегрируем (7) по τ от 0 до t и получим:

$$\frac{1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t d\tau\int_0^l k v_x(x,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau \frac{v_x(x,\tau_1)\,d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{\alpha}}dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_{2,Q_t}^2 + \varepsilon\int_0^t \left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,0)\right\|_0^2 , \qquad (8)$$

где $\|F\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|F(x,\tau)\|_0^2\, d\tau.$

Предположим, что $k_t \leq 0$, тогда неотрицательность интеграла в левой части неравенства (8) доказывается так же, как в [5]. Усиливая неравенство (8), получим

$$\frac{1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_{2,Q_t}^2 + \varepsilon\int_0^t \left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2}\left\|u_0(x)\right\|_0^2$$

или

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2 \leq 2\varepsilon\int_0^t \left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau + \Phi(t), \qquad (9)$$

где $\Phi(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\|F\|_{2,Q_t}^2 + \left\|u_0(x)\right\|_0^2 .$

Введем обозначение

$$y(t) = \int_0^t \left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau ,$$

тогда неравенство (9) примет вид

$$\frac{dy}{dt} \leq 2\varepsilon y(t) + \Phi(t) .$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма Гронуолла-Беллмана [6]:

Лемма. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0, T]$ неравенству

$$\frac{dy}{dt} \leq c_1(t)\,y(t) + c_2(t),$$

где $c_i(t)$ – суммируемые на $[0, T]$ неотрицательные функции. Тогда

$$y(t)\le \exp\left(\int_0^t c_1(\tau)d\tau\right)\left[y(0)+\int_0^t c_2(\xi)\exp\left(-\int_0^\xi c_1(\tau)d\tau\right)d\xi\right]\le$$
$$\le \exp\left(\int_0^t c_1(\tau)d\tau\right)\left[y(0)+\int_0^t c_2(\tau)d\tau\right].$$

Применяя лемму, получим

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_{2,Q_t}^2\le \exp(2\varepsilon t)t\Phi(t).$$

Откуда следует оценка

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2\le M(t)\left(\|F\|_{2,Q_t}^2+\|u_0(x)\|_0^2\right)$$

или, возвращаясь к $u(x,t)$,

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}u\right\|_0^2\le M(t)\left(\|f\|_{2,Q_t}^2+\|u_1'(x)\|_0^2+\|u_1''(x)\|_0^2+\|u_0(x)\|_0^2\right).$$

Теорема доказана.

Если $f=u_0=u_1=0$ из (4) получаем

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}=0. \qquad (10)$$

С помощью обобщенной формулы Ньютона–Лейбница [3]

$$D_{0t}^{-\alpha}D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=u(x,t)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)$$

из (10) имеем

$$u(x,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)=0.$$

Откуда следует единственность решения задачи (1)–(3).

2. Первая краевая задача в разностной форме

2.1. Метод прямых для решения первой краевой задачи

В области $Q_T=(0,l)\times(0,T)$ рассмотрим первую краевую задачу для волнового уравнения дробного порядка

$$D_{0t}^{\alpha+1}u=(ku_x)_x+f(x,t),\ 0<x<l,\ \ 0<t\le T, \qquad (11)$$

с краевыми условиями

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x),\quad D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\big|_{t=0}=0,$$
$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad 0\le t\le T, \qquad (12)$$

$k(x,t)\ge c>0$, $k_t\le0$ всюду на $\bar{Q}_T$.

Будем решать задачу (11)–(12) методом прямых [7]. Получим приближенное решение в виде системы функций, приближенно представляющих искомое решение вдоль прямых $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Будем предполагать, что решение рассматриваемой задачи обладает требуемой по ходу изложения гладкостью. Разобьем отрезок $[0,l]$ точками $x_i = ih$, $h = \frac{l}{N}$ и заменим производные по переменной x на разностные производные

$$\left(k(x,t)u_x\right)_x \sim \left(a(x,t)u_{\bar{x}}\right)_x = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a_i\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right),$$

$$a(x_i,t) = k(x_i - 0.5h, t) = k_{i-\frac{1}{2}}(t)$$

Тогда для сеточной функции $y(x_i,t)$ получим следующую систему уравнений метода прямых

$$D_{0t}^{\alpha+1} y(x_i,t) = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}(t)-y_i(t)}{h} - a_i\frac{y_i(t)-y_{i-1}(t)}{h}\right] + \varphi(x_i,t),$$

$$\varphi(x_i,t) = \varphi(x_i,t) + O\left(h^2\right), \;\; a_i \ge c > 0, \;\; i = 1, 2, ..., N-1, \tag{13}$$

$$y_0(t) = y_N(t) = 0, \;\; D_{0t}^{\alpha} y(x_i,0) = u_0(x_i), \;\; D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i,0) = 0$$

или

$$\frac{5}{6}D_{0t}^{\alpha+1}y(x_i,t) + \frac{1}{12}\left(D_{0t}^{\alpha+1}y(x_{i+1},t) + D_{0t}^{\alpha+1}y(x_{i-1},t)\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}(t)-y_i(t)}{h} - a_i\frac{y_i(t)-y_{i-1}(t)}{h}\right] + \frac{5}{6}\varphi(x_i,t) +$$

$$+\frac{1}{12}\left(\varphi(x_{i-1},t) + \varphi(x_{i+1},t)\right) + O\left(h^4\right), \tag{14}$$

$$a_i \ge c > 0, \;\; A > 0, \;\; i = 1, 2, ..., N-1,$$

$$y_0(t) = y_N(t) = 0, \;\; D_{0t}^{\alpha} y(x_i,0) = u_0(x_i), \;\; D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i,0) = 0,$$

где $y_i(t) = y(x_i,t)$. При этом (13) дает аппроксимацию уравнения с точностью h^2, а (14) – с точностью h^4.

2.2. Априорная оценка для системы разностных уравнений

Для решения системы (13) получим априорную оценку. При оценке системы разностных уравнений будем предполагать, что $k(x,t)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$ имеют нужное по ходу изложения число производных. Умножим (13) скалярно на $Y = D_{0t}^{\alpha} y(x_i,\tau)$. В результате получим тождество

$$\left(D_{0t}^{\alpha+1}y, Y\right) = \left(\left(ay_{\bar{x}}\right)_x, Y\right) + (\varphi, Y). \tag{15}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в (15)

$$\left(D_{0t}^{\alpha+1}y,Y\right)=\sum_{i=1}^{N-1}D_{0t}^{\alpha+1}y_iD_{ot}^{\alpha}y_ih=$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}D_{0t}^{\alpha+1}y\left(x_i,\tau\right)D_{0t}^{\alpha}y\left(x_i,\tau\right)h=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{N-1}D_{ot}^{\alpha}y_iD_{ot}^{\alpha}y_ih=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|Y\right\|_0^2,$$

$$\left(\left(ay_{\bar{x}}\right)_x,Y\right)=-\left(ay_{\bar{x}},Y_{\bar{x}}\right],$$

$$\left(\varphi,Y\right)\le\frac{1}{4\varepsilon}\left\|\varphi\right\|_0^2+\varepsilon\left\|Y\right\|_0^2,$$

где $\left(y,v\right)=\sum_{i=1}^{N-1}y_iv_ih$, $\left(y,v\right]=\sum_{i=1}^{N}y_iv_ih$, $\left\|y\right\|=\sqrt{\left(y,y\right)}$, $\left\|y\right]\!|=\sqrt{\left(y,y\right]}$.

С учетом полученных соотношений из (15) получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|Y\right\|_0^2+\sum_{i=1}^{N}ay_{\bar{x}}Y_{\bar{x}}h\le\frac{1}{4\varepsilon}\left\|\varphi\right\|_0^2+\varepsilon\left\|Y\right\|_0^2. \quad (16)$$

Проинтегрируем (16) по τ от 0 до t

$$\left\|Y\right\|_0^2+2\int_0^t\sum_{i=1}^{N}ay_{\bar{x}}Y_{\bar{x}}hd\tau\le\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\left\|\varphi\right\|_0^2d\tau+2\varepsilon\int_0^t\left\|Y\right\|_0^2d\tau+\left\|Y\left(x,0\right)\right\|_0^2. \quad (17)$$

Учитывая положительность интеграла в левой части неравенства (17)

$$\int_0^t\sum_{i=1}^{N}ay_{\bar{x}}Y_{\bar{x}}hd\tau=\int_0^t\sum_{i=1}^{N-1}aD_{0t}^{\alpha}y_{\bar{x}}\left(x_i,\tau\right)y_{\bar{x}}\left(x_i,\tau\right)hd\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}\left(\int_0^t aD_{0t}^{\alpha}y_{\bar{x}}\left(x_i,\tau\right)y_{\bar{x}}\left(x_i,\tau\right)d\tau\right)h\ge0,$$

получим

$$\left\|Y\right\|_0^2\le\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\left\|\varphi\right\|_0^2d\tau+2\varepsilon\int_0^t\left\|Y\right\|_0^2d\tau+\left\|Y\left(x,0\right)\right\|_0^2. \quad (18)$$

Откуда следует

$$\left\|Y\right\|_0^2\le2\varepsilon\int_0^t\left\|Y\right\|_0^2d\tau+F_1\left(t\right),$$

где

$$F_1\left(t\right)=\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\varphi\right\|_{2,Q_t}^2+\left\|u_{0,\bar{x}}\right]\!|_0^2.$$

На основании леммы Гроноулла-Беллмана из (18) окончательно находим

$$\left\|Y\right\|_0^2\le M\left(\left\|\varphi\right\|_{2,Q_t}^2+\left\|u_{0,\bar{x}}\right]\!|_0^2\right).$$

Отсюда следует сходимость решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (13) со скоростью $O\left(h^2\right)$.

2.3. Решение системы разностных уравнений, возникающих при решении методом прямых

Рассмотрим однородную систему уравнений, соответствующую системе (13) при $a_k = 1, \quad k = 1, 2, ..., N-1$,

$$D_{0t}^{\alpha+1} y = \frac{1}{h^2}\left[\left(y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)\right)\right],$$
$$y_0(t) = y_N(t) = 0, \quad D_{0t}^{\alpha} y(x_i, 0) = u_0(x_i), \tag{19}$$
$$D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i, 0) = 0, \quad k = 1, 2, ..., N-1.$$

Частные решения этой системы будем искать в виде

$$y_k(t) = \gamma(k)\nu(t).$$

Подставляя в систему (19) последнее равенство, получим

$$\gamma(k) D_{0t}^{\alpha+1}\nu(t) = \frac{1}{h^2}\nu(t)\left[\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)\right], \; k = 1, 2, ..., N-1,$$
$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(N) = 0,$$

или

$$\frac{D_{0t}^{\alpha+1}\nu(t)}{\nu(t)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{h^2\gamma(k)} = -\delta^2 = \text{const}, \; k = 1, 2, ..., N-1. \tag{20}$$

Для отыскания $\gamma(k)$ получим однородное разностное уравнение

$$\gamma(k+1) - \left[2 - h^2\delta^2\right]\gamma(k) + \gamma(k-1) = 0, \quad k = 1, 2, ..., N-1, \tag{21}$$

с граничными условиями

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(N) = 0.$$

Общее решение разностного уравнения (21) имеет вид

$$\gamma(k) = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \left[2 - h^2\delta^2\right]\lambda + 1 = 0.$$

Из граничных условий имеем:

$$\gamma(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad c_2 = -c_1,$$
$$\gamma(N) = c_1\lambda_1^N + c_2\lambda_2^N = c_1\left(\lambda_1^N - \lambda_2^N\right) = 0.$$

Отсюда $\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^N = 1$ или $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt[N]{1} = e^{\frac{2\pi i s}{N}}, \quad s = 0, 1, ..., N-1$. Так как $\lambda_1\lambda_2 = 1$, то $\lambda_1^2 = e^{\frac{2\pi i s}{N}}$ и $\lambda_1 = \dfrac{1}{\lambda_2} = e^{\frac{\pi i s}{N}}$. Тогда

$$2 - h^2\delta^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = e^{\frac{\pi i s}{N}} + e^{-\frac{\pi i s}{N}} = 2\cos\frac{\pi s}{N},$$

откуда

$$\delta_s^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi s}{2N} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi s x_s}{2l}, \quad s = 0, 1, ..., N-1,$$

$$\gamma_s(k) = c_1\left(e^{\frac{\pi i s}{N}} - e^{-\frac{\pi i s}{N}}\right) = c\sin\frac{\pi s k}{N} = c\sin\frac{\pi s x_k}{l}.$$

Нетривиальные решения будут только при $s = 0, 1, ..., N-1$. Из уравнения (20) имеем

$$D_{0t}^{\alpha+1}v(t) + \delta^2 v(t) = 0,$$

общее решение, которого имеет вид [1]

$$v_s(t) = a_s\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha}\mathrm{E}_{1/(\alpha+1)}\left(-\delta_s^2 t^{\alpha+1};\alpha+1\right) +$$

$$+b_s\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}\mathrm{E}_{1/(\alpha+1)}\left(-\delta_s^2 t^{\alpha+1};\alpha\right), \quad \delta_s^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2l}x_s.$$

Итак, мы имеем $N-1$ частных решений однородной линейной системы (19), которые между собой линейно независимы, и, следовательно, общее решение этой системы имеет вид

$$y_k(t) = \sum_{s=1}^{N-1}\sin\left(\frac{\pi s}{l}x_k\right)\times$$

$$\times\left(a_s\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha}\mathrm{E}_{1/(\alpha+1)}\left(-\delta_s^2 t^{\alpha+1},\alpha+1\right) + b_s\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}\mathrm{E}_{1/(\alpha+1)}\left(-\delta_s^2 t^{\alpha+1},\alpha\right)\right) \quad (22)$$

где a_s, b_s – произвольные постоянные, $\delta_s^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2l}x_s$.

Аналогично можно получить общее решение однородной системы, соответствующей системе (14):

$$y_k(t) = \sum_{s=1}^{N-1}\sin\left(\frac{\pi s}{l}x_k\right)\times$$

$$\times\left(c_s\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha}\mathrm{E}_{1/(\alpha+1)}\left(-\delta_s'^2 t^{\alpha+1},\alpha+1\right) + d_s\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}\mathrm{E}_{1/(\alpha+1)}\left(-\delta_s'^2 t^{\alpha+1},\alpha\right)\right),$$ где

c_s, d_s – произвольные постоянные,

$$\delta_s'^2 = \frac{24}{h^2\left(5+\cos\frac{\pi}{l}x_s\right)}\sin^2\frac{\pi}{2l}x_s.$$

Отметим, что решение смешанной краевой задачи для уравнения (1) было компьютерно реализовано с использованием среды программирования «Microsoft Visual Studio C#», а также ядра вычислительной системы Mathematica 9 фирмы Wolfram Research [8].

Заключение

В работе была рассмотрена первая краевая задача для волнового уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в терминах дробной производной для решения нелокального волнового уравнения с переменными коэффициентами в дифференциальной и разностной трактовках. Получено решение системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающей при использовании метода прямых.

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 272 с.

2. Олемской А. И., Флат А. Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // Успехи физических наук. — 1993. — Т. 163. — № 12. — С. 1–50.

3. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005. — 199 с.

4. Керефов М. А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной. — Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Нальчик, 2000. — 75 с.

5. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче для уравнения $sign|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Дифференц. уравнения. — 1976. —Т. 12. — № 1. — С. 79 – 88.

6. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с.

7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. — ГИФМЛ, 1962. — 640 с.

8. Свидетельство о государственной регистрации программы на ЭВМ №2015662568/ Решение смешанной краевой задачи для волнового уравнения дробного порядка/ Керефов М.А. и др.; заявка №2015619245 05.10.2015г.; зарегистрировано 26.11.2015 г.; Правообладатель КБГУ.

References

1. Nahushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie. — M.: FIZMATLIT, 2003. — 272 s.

2. Olemskoj A. I., Flat A. Ja. Ispol'zovanie koncepcii fraktala v fizike kondensirovannoj sredy // Uspehi fizicheskih nauk. — 1993. — T. 163. — № 12. — S. 1 – 50.

3. Pshu A. V. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka. — M.: Nauka, 2005. — 199 s.

4. Kerefov M. A. Kraevye zadachi dlja modificirovannogo uravnenija vlagoperenosa s drobnoj po vremeni proizvodnoj. — Dis. … kand. fiz.-mat. nauk. — Nal'chik, 2000. — 75 s.

5. Kumykova S.K. Ob odnoj kraevoj zadache dlja uravnenija $sign|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Differenc. uravnenija. — 1976. — T. 12. — № 1. — S. 79 – 88.

6. Ladyzhenskaja O. A. Kraevye zadachi matematicheskoj fiziki. — M.: Nauką, 1973. — 407 s.

7. Berezin I. Ș Zhidkov N. P. Metody vychislenij. T. 2. — GIFML,

1962. — 640 s.
8. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy na JeVM №2015662568/ Reshenie smeshannoj kraevoj zadachi dlja volnovogo uravnenija drobnogo porjadka/ Kerefov M.A. i dr.; zajavka №2015619245 05.10.2015g.; zaregistrirovano 26.11.2015 g.; Pravoobladatel' KBGU.

Керефов Марат Асланбиевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Информатики и прикладной математики, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова» (КБГУ), г. Нальчик, e-mail: kerefov@mail.ru.

Геккиева Сакинат Хасановна, кандидат физико-математических наук, заведующий отделом Математического моделирования геофизических процессов, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации» (ИПМА), г. Нальчик, e-mail: gekkieva_s@mail.ru.

Kerefov Marat Aslanbievich, PhD, Associate Professor, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Kabardino-Balkarian State University (KBSU), Nalchik.

Gekkieva Sakinat Khasanovna, PhD, Head of Department of Mathematical modeling of geophysical processes, Institute of Applied Mathematics and Automation (IAMA), Nalchik.