УДК 514.752
doi: 10.18101/2304-5728-2017-1-3-9

СВОЙСТВА НОРМАЛЬНОГО ОБРАЗА ПОВЕРХНОСТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В E^4

© Шармин Валентин Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры
и математической логики
Тюменский государственный университет
Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 6
E-mail: v.g.sharmin@utmn.ru

© Шармин Дмитрий Валентинович
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики
Тюменский государственный университет
Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 6
E-mail: dsharmin@mail.ru

В статье рассматриваются поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве. Изучаются свойства нормального образа этих поверхностей. В частности, получена формула, позволяющая вычислять кривизну нормального образа рассматриваемой поверхности через геометрические характеристики исходной поверхности.
Ключевые слова: поверхность, нормальное отображение, гауссова кривизна, коэффициенты кручения.

Введение

В статьях [1, 2, 3] получены формулы для вычисления гауссовой кривизны сферического образа поверхности для поверхностей как с нулевыми, так и не с нулевыми коэффициентами кручения.

В настоящей статье будет выведена формула для вычисления гауссовой кривизны нормального образа поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве, имеющей нулевые коэффициенты кручения, и получены некоторые свойства нормального образа поверхности без кручения.

1. Основные определения и формулы

Пусть F^2 есть C^3 – регулярная поверхность в евклидовом пространстве E^4, которая задается вектор-функцией

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2). \tag{1}$$

Во всех точках этой поверхности существуют касательная и нормальная плоскости. Зададим в каждой нормальной плоскости ортонормированный базис, состоящий из векторов $\vec{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$ и $\vec{m}(m_1, m_2.m_3.m_4)$. На поверхности F^2 появятся два векторных поля $\vec{n}$ и $\vec{m}$. Пусть эти поля принадлежат классу C^2 и при этом $n_4 \neq 0$ и не является постоянной функцией.

Рассмотрим отображение

$$\psi_1 : F^2 \to E_N^3, \tag{2}$$

которое каждой точке M поверхности F^2 ставит в соответствие точку M' гиперплоскости E_N^3, являющейся касательной гиперплоскостью в точке N к единичной гиперсфере S^3 с центром в точке O, такую, что вектор с началом в точке O и концом в точке M'' равен вектору $\vec{n}(M)$, где $M'' = S^3 \bigcap OM'$, а вектор $\vec{n}(M)$ принадлежит векторному полю $\vec{n}$.

Аналогично определяется отображение $\psi_2 : F^2 \to E_N^3$.

Определение. Отображения ψ_1 и ψ_2 будем называть нормальными отображениями поверхности F^2.

Определение. Функции $p_1 = \vec{n}_{u_1} \cdot \vec{m}$ и $p_2 = \vec{n}_{u_2} \cdot \vec{m}$ называются коэффициентами кручения поверхности F^2, вычисленными в нормалях $\vec{n}$ и $\vec{m}$ [4].

Известно, что гауссова кривизна поверхности F^2 вычисляется по формуле

$$K = K_1 + K_2, \tag{3}$$

где $B_{ij} = \vec{r}_{u_i u_j} \cdot \vec{n}$, $b_{ij} = \vec{r}_{u_i u_j} \cdot \vec{m}$, $g_{ij} = \vec{r}_{u_i} \cdot \vec{r}_{u_j}$,

$K_1 = \dfrac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$, $K_2 = \dfrac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ [5].

Значение K не зависит от базиса нормальной плоскости [4].

В работе [4] А. И. Фирсовым получено необходимое и достаточное условия каноничности базиса нормальной плоскости

$$B_{11}b_{22} - 2B_{12}b_{12} + B_{22}b_{11} = 0. \tag{4}$$

Определение. Базис нормальной плоскости $\vec{n}$ и $\vec{m}$, в котором коэффициенты кручения тождественно равны нулю, называется системой нормалей без кручения [4].

Определение. Поверхность, у которой система нормалей без кручения является канонической, называется поверхностью без кручения [4].

2. Кривизна нормального образа поверхности в E^4

Рассмотрим в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 регулярную поверхность F^2 класса C^3, обладающую следующими свойствами:

а) поля нормалей $\vec{n}$ и $\vec{m}$ есть система нормалей без кручения;

b) коэффициенты квадратичных форм поверхности $g_{ij} = \vec{r}_{u_i} \cdot \vec{r}_{u_j}$ и $B_{ij} = \vec{r}_{u_i u_j} \cdot \vec{n}$ пропорциональны;

c) координатные линии на поверхности F^2 ортогональны.

Теорема 1. Пусть F^2 – поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве, определенная выше, задается вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2)$, причем ранг матрицы Якоби отображения $\psi_1 : F^2 \to E_N^3$ равен двум в каждой точке поверхности. Тогда гауссова кривизна $\widetilde{K}$ поверхности $\psi_1(F^2)$ вычисляется по формуле

$$\widetilde{K} = \frac{\dfrac{1}{g_{11}g_{22}}\left(\det\left(P_{ij}\right) - C\gamma \sum\limits_{i,j=1}^{2} \alpha_i B_{ii} P_{jj}\right) + C^2\gamma^2 K_1^2 + \gamma^2 K_1 K_2}{\dfrac{\gamma^2 \sum\limits_{i,j=1}^{2} \gamma_{u_i}^2 \alpha_j^2 g_{jj}}{g_{11}g_{22}} + \gamma^4 K_1^2}.$$

Доказательство. Из условий b) и c) имеем $g_{12} = B_{12} = 0$ [6].

Выпишем для этого случая деривационные формулы

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{u_1u_1} &= \frac{g_{11u_1}}{2g_{11}}\vec{r}_{u_1} - \frac{g_{11u_2}}{2g_{22}}\vec{r}_{u_2} + B_{11}\vec{n} + b_{11}\vec{m},\\
\vec{r}_{u_1u_2} &= \frac{g_{11u_2}}{2g_{11}}\vec{r}_{u_1} + \frac{g_{22u_1}}{2g_{22}}\vec{r}_{u_2} + b_{12}\vec{m},\\
\vec{r}_{u_2u_2} &= -\frac{g_{22u_1}}{2g_{11}}\vec{r}_{u_1} + \frac{g_{22u_2}}{2g_{22}}\vec{r}_{u_2} + B_{22}\vec{n} + b_{22}\vec{m}\\
\vec{n}_{u_1} &= -\frac{B_{11}}{g_{11}}\vec{r}_{u_1} + p_1\vec{m},\\
\vec{m}_{u_1} &= -\frac{b_{11}}{g_{11}}\vec{r}_{u_1} - \frac{b_{12}}{g_{22}}\vec{r}_{u_2} - p_1\vec{n},\\
\vec{n}_{u_2} &= -\frac{B_{22}}{g_{22}}\vec{r}_{u_2} + p_2\vec{m},\\
\vec{m}_{u_2} &= -\frac{b_{12}}{g_{11}}\vec{r}_{u_1} - \frac{b_{22}}{g_{22}}\vec{r}_{u_2} - p_2\vec{n}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Перейдем к поверхности $\psi_1(F^2)$. Она расположена на гиперплоскости E_N^3 и задается вектор-функцией

$$\vec{N} = \gamma(u_1, u_2)\vec{n}(u_1, u_2), \gamma(u_1, u_2) = \frac{1}{n_4(u_1, u_2)}. \tag{6}$$

Так как

$$N_{u_1} = \gamma_{u_1}\vec{n} + \gamma\vec{m}_{u_1} = \gamma_{u_1}\vec{n} - \gamma\frac{B_{11}}{g_{11}}\vec{r}_{u_1} = \gamma_{u_1}\vec{n} - \gamma\alpha_1\vec{r}_{u_1},$$
$$N_{u_2} = \gamma_{u_2}\vec{n} + \gamma\vec{m}_{u_2} = \gamma_{u_2}\vec{n} - \gamma\frac{B_{22}}{g_{22}}\vec{r}_{u_2} = \gamma_{u_2}\vec{n} - \gamma\alpha_2\vec{r}_{u_2}, \tag{7}$$

то одним из векторов базиса нормальной плоскости поверхности $\psi_1(F^2)$ можно считать вектор $\vec{m}$. Пусть другим вектором базиса нормальной плоскости будет вектор $\vec{s}$.

Разложим вектор $\vec{s}$ по базису $\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}, \vec{n}, \vec{m}$:

$$\vec{s} = A_1\vec{r}_{u_1} + A_2\vec{r}_{u_2} + C\vec{n} + D\vec{m}. \tag{8}$$

Умножая скалярно равенство (8) поочередно на векторы $\vec{N}_{u_1}, \vec{N}_{u_2}, \vec{m}$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \gamma_{u_1}C - \gamma\alpha_1A_1g_{11} = 0 \\ \gamma_{u_2}C - \gamma\alpha_2A_2g_{22} = 0 \\ D = 0 \\ A_1^2g_{11} + A_2^2g_{22} + C^2 = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Найдем решения последней системы уравнений

$$A_1 = \frac{\gamma_{u_1}B_{22}}{S},$$
$$A_2 = \frac{\gamma_{u_2}B_{11}}{S},$$
$$C = \frac{B_{11}B_{22}\gamma}{S}, \tag{10}$$
$$D = 0,$$
$$S = \sqrt{\gamma_{u_1}^2B_{22}^2g_{11} + \gamma_{u_2}^2B_{11}^2g_{22} + \gamma^2B_{11}^2B_{22}^2}.$$

Вычислим коэффициенты вторых и первой квадратичной формы поверхности $\psi_1(F^2)$ через геометрические характеристики поверхности F^2

$$\widetilde{B}_{ij} = \vec{N}_{ij}\cdot\vec{s} = \gamma_{u_i}\gamma_{u_j}C - A_j\gamma_{u_i}\alpha_jg_{jj} -$$
$$- A_i(\gamma\alpha_i)_{u_j}g_{ii} - Q_{ij} - \gamma C\alpha_iB_{ij} = P_{ij} - \gamma C\alpha_iB_{ij}, \tag{11}$$

где

$$P_{ij} = \gamma_{u_i}\gamma_{u_j}C - A_j\gamma_{u_i}\alpha_jg_{jj} - A_i(\gamma\alpha_i)_{u_j}g_{ii} - Q_{ij},$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} A_1\gamma\alpha_i \dfrac{g_{ij_{u_1}}}{2} - A_2\gamma\alpha_i \dfrac{g_{ij_{u_2}}}{2}, \ i = j, \\ -A_i\gamma\alpha_i \dfrac{g_{ii_{u_j}}}{2} - A_j\gamma\alpha_i \dfrac{g_{jj_{u_i}}}{2}, \ i \neq j, \end{cases} \tag{12}$$

$$\widetilde{b}_{ij} = \vec{N}_{ij} \cdot \vec{m} = -\gamma\alpha_i b_{ij}, \tag{13}$$

$$\widetilde{g}_{ij} = \vec{N}_i \cdot \vec{N}_j = \gamma_{u_i}\gamma_{u_j} + \gamma^2\alpha_i\alpha_j g_{ij}. \tag{14}$$

Подставив (11), (13), (14) в формулу (3), получим выражение для вычисления гауссовой кривизны поверхности $\psi_1(F^2)$:

$$\widetilde{K} = \frac{\dfrac{1}{g_{11}g_{22}}\left(\det(P_{ij}) - C\gamma\sum\limits_{i,j=1}^{2}\alpha_i B_{ii}P_{jj}\right) + C^2\gamma^2K_1^2 + \gamma^2K_1K_2}{\dfrac{\gamma^2\sum\limits_{i,j=1}^{2}\gamma_{u_i}^2\alpha_j^2 g_{jj}}{g_{11}g_{22}} + \gamma^4K_1^2}. \tag{15}$$

Замечание. Примером поверхности в E^4, удовлетворяющей условиям теоремы 1, является плоский тор, заданный вектор-функцией

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \psi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi).$$

3. Свойства нормального образа поверхности F^2 без кручения

Теорема 2. Пусть поверхность F^2 является поверхностью без кручения. Для того чтобы система нормалей $\vec{m}$ и $\vec{s}$ поверхности $\psi_1(F^2)$ была канонической необходимо и достаточно, чтобы

$$P_{11}\alpha_2 b_{22} - P_{12}\alpha_2 b_{21} - P_{21}\alpha_1 b_{12} + P_{22}\alpha_1 b_{11} = 0.$$

Доказательство. Проверим условие каноничности базиса $\vec{m}$ и $\vec{s}$ нормальной плоскости поверхности $\psi_1(F^2)$.

$$\begin{aligned} &\widetilde{B}_{11}\widetilde{b}_{22} - \widetilde{B}_{12}\widetilde{b}_{21} - \widetilde{B}_{21}\widetilde{b}_{12} + \widetilde{B}_{22}\widetilde{b}_{11} = (P_{11} - \gamma C\alpha_1 B_{11})(-\gamma\alpha_2 b_{22}) - \\ &-(P_{12})(-\gamma\alpha_2 b_{21}) - (P_{21})(-\gamma\alpha_1 b_{12}) + (P_{22} - \gamma C\alpha_2 B_{22})(-\gamma\alpha_1 b_{11}) = \\ &= \gamma C\alpha_1\alpha_2(B_{11}b_{22} + B_{22}b_{11}) - \\ &-\gamma(P_{11}\alpha_2 b_{22} - P_{12}\alpha_2 b_{21} - P_{21}\alpha_1 b_{12} + P_{22}\alpha_1 b_{11}) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство теоремы 2 следует из формулы (16) и из каноничности нормалей $\vec{n}$ и $\vec{m}$ поверхности F^2.

Теорема 3. Для того чтобы система нормалей $\vec{m}$ и $\vec{s}$ поверхности $\psi_1(F^2)$ была системой нормалей без кручения необходимо и достаточно, чтобы

$$K_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 0.$$

Доказательство. Найдем коэффициенты кручения поверхности $\psi_1(F^2)$ в нормалях $\vec{m}$ и $\vec{s}$

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_1 &= \vec{m}_{u_1} \cdot \vec{s} = -\frac{b_{11}}{g_{11}} \cdot A_1 \cdot g_{11} - \frac{b_{12}}{g_{22}} \cdot A_2 \cdot g_{22} = -b_{11}A_1 - b_{12}A_2, \\ \widetilde{p}_2 &= \vec{m}_{u_2} \cdot \vec{s} = -\frac{b_{12}}{g_{11}} \cdot A_1 \cdot g_{11} - \frac{b_{22}}{g_{22}} \cdot A_2 \cdot g_{22} = -b_{12}A_1 - b_{22}A_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} b_{11} \cdot A_1 + b_{12} \cdot A_2 = 0 \\ b_{12} \cdot A_1 + b_{22} \cdot A_2 = 0 \end{cases}. \tag{18}$$

Поскольку $A_1 \neq 0$ и $A_2 \neq 0$, то $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0.$ Последнее равенство и доказывает теорему.

Заключение

Таким образом, доказана формула, позволяющая вычислять кривизну нормального образа поверхности специального вида в четырехмерном евклидовом пространстве через геометрические характеристики исходной поверхности. Доказаны также некоторые свойства нормального образа поверхности без кручения.

Литература

1. Шармин В. Г. Сферическое отображение пространственной полосы // Исследования по теории поверхностей постоянной кривизны. — Л.: Изд-во ЛГПИ им. А.И. Герцена. — 1987. — С. 98 – 100.
2. Шармина Т. Н., Шармин В. Г. Связь гауссовой кривизны двумерной поверхности в (n+2)-мерном евклидовом пространстве с гауссовой кривизной ее сферического образа // Альманах современной науки и образования. — Тамбов: Изд-во «Грамота», 2010. — №1(32). — Ч. 1. — С. 33 – 36.
3. Шармин В. Г., Шармина Т. Н. Кривизна сферического образа двумерной поверхности с ненулевым кручением в E^4 // Вестник Бурятского университета. Математика, информатика. — 2016. — №2. — С. 17 – 24.
4. Фирсов А. И. Канонические нормали поверхности большой коразмерности // Вестник МГУ. Механика. Математика. — 1976. — № 2. — С. 37 – 42.
5. Рамазанова К. Ш. Теория кривизны X_2 в E_4 // Известия вузов. Математика. — 1966. — № 6. — С. 137 – 143.
6. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974. — 176 с.

PROPERTIES OF A NORMAL IMAGE OF THE SURFACE OF SPECIAL TYPE IN E^4

Valentin G. Sharmin
Cand. Sci. (Physics and Mathematics), A/Professor, Department of Algebra and Mathematical Logic
Tyumen State University
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russia

Dmitriy V. Sharmin
Cand. Sci. (Education), A/Professor, Department of Mathematics and Computer Science
Tyumen State University
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russia

The article deals with surfaces in four-dimensional Euclidean space. We study the properties of a normal image of these surfaces. In particular, the resulting formula allows us to calculate the curvature of a normal image of the considered surface using the geometric characteristics of original surface.
Keywords: surface, normal image, Gaussian curvature, torsion coefficients.