УДК 517.938
doi: 10.18101/2304-5728-2017-1-10-17

СРАВНЕНИЕ ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА, ПОЛУЧЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

© Мачулис Владислав Владимирович
доцент кафедры математического моделирования
Тюменский государственный университет
Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 6
E-mail: mareliks@gmail.com

В статье приводятся данные вычислений наибольшего числа малоамплитудных предельных циклов для двух типов обобщенных полиномиальных систем дифференциальных уравнений, формально совпадающих на некотором множестве частных случаев. Первая методика основана на методе усреднения и авторском алгоритме вычисления ляпуновских величин, вторая – заключалась в исследовании влияния малых возмущений на гамильтонову систему. Вопреки ожиданиям, различные методики в некоторых случаях дают несовпадающие результаты.

Ключевые слова: предельный цикл, обобщенное уравнение Льенара, 16-я проблема Гильберта, слабый фокус.

Введение

Во второй части 16-й проблемы Гильберта ставится задача найти верхние оценки для числа предельных циклов, которое может иметь полиномиальное векторное поле некоторой заданной степени. В большинстве исследований, посвященных этой проблеме, речь идет о специальных типах векторных полей, поскольку эта задача оказалась весьма трудной для общих полиномиальных систем. Поиск решений осуществлялся различными методами такими, как: метод усреднения ([1]); вычисление ляпуновских показателей ([2]); оценка числа предельных циклов с помощью отображения Пуанкаре, индекса Бернштейна этого отображения и ширины комплексной области, в которую продолжается отображение Пуанкаре ([3]). Множество результатов о предельных циклах полиномиальных дифференциальных систем было получено путем изучения так называемых малоамплитудных предельных циклов, которые возникают из изолированной особой точки ([4]).

Рассмотрим уравнение Льенара

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{1}$$

где $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $f(x)$ и $g(x)$ – полиномы от x, степени n и m соответственно. Пусть $\widehat{H}(m,n)$ – наибольшее число малоамплитудных предельных циклов уравнения (1). Величина $\hat{H}(m,n)$ дает нижнюю границу для наибольшего числа $H(m,n)$ всех предельных циклов уравнения (1) при заданных m и n (не только малоамплитудных). Кратко укажем главные результаты о предельных циклах для дифференциальной системы Льенара (1).

В 1928 году Льенар ([5]) доказал, что если $m=1$ и $F(x)=\int\limits_0^x f(s)ds$ – непрерывная нечетная функция, которая имеет единственный корень $x=0$ и монотонно возрастает при $x \geq 0$, то уравнение (1) имеет единственный предельный цикл.

В 1973 году Рычков ([6]) доказал, что если $m=1$ и $F(x)$ – нечетный полином пятой степени, то уравнение (1) имеет по меньшей мере два предельных цикла.

В 1977 году Lins, de Melo и Puhg ([7]) доказали, что $H(1,1)=0$ и $H(1,2)=1$. В 1998 году Copper ([8]) доказал, что $H(2,1)=1$. Dumortier и др. в [9] и [10] доказали, что $H(3,1)=1$. В 1997 году Dumortier и Chengzhi ([11]) доказали, что $H(2,2)=1$.

Blows, Lloyd и Lynch ([12]) с использованием индуктивного метода доказали, что:

- если g – нечетная, то $\hat{H}(m,n)=\left[\frac{n}{2}\right]$ (здесь $\left[\frac{n}{2}\right]$ – целая часть числа);
- если f – четная, то $\hat{H}(m,n)=n$ вне зависимости от g;
- если f – нечетная, то $\hat{H}(m,n+1)=\left[\frac{m-2}{2}\right]+n$;
- если $g(x)=x+g_e(x)$, где g_e – четная, то $\hat{H}(2m,2)=m$.

Christopher и Lynch ([13]) открыли новый алгебраический метод вычисления ляпуновских величин системы (1) и доказали следующие результаты:

$\hat{H}(m,2)=\left[\frac{2m+1}{3}\right]$; $\hat{H}(2,n)=\left[\frac{2n+1}{3}\right]$;

$\hat{H}(m,3)=2\left[\frac{3m+2}{8}\right]$ для $1 \leq m \leq 50$; $\hat{H}(3,n)=2\left[\frac{3n+2}{8}\right]$ для $1 \leq m \leq 50$;

$\hat{H}(4,k)=\hat{H}(k,4)$ для $k=6,7,8,9$ и $\hat{H}(5,6)=\hat{H}(6,5)$.

В 1998 году Gassul и Torregrosa ([14]) получили нижние границы для $\hat{H}(6,7)$, $\hat{H}(7,6)$, $\hat{H}(7,7)$ и $\hat{H}(4,20)$. В 2006 году Yu и Han ([15]) доказали, что $\hat{H}(m,n)=\hat{H}(n,m)$ для:

$n=4$, $m=10,11,12,13$;

$n=5$, $m=6,7,8,9$;

$n=6,\ m=5,6.$

В 2009 году Llibre, Mereu и Teiceira ([16]), используя теорию усреднения, изучили максимальное число предельных циклов $\widehat{H}(m,n)$, которые могут возникать из периодических решений внутри возмущенного линейного центра в классе всех обобщенных полиномиальных систем Льенара степеней m и n вида

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x-\sum\limits_{k\geq 1}\varepsilon^k\left(f_n^k(x)y+g_m^k(x)\right)\end{cases},$$

где каждый $k-$й полином f_n^k и g_m^k имеет степень n и m соответственно, а ε – малый параметр. Они также доказали следующие результаты:

$\widehat{H}_1(m,n)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$ (с применением метода усреднения первого порядка);

$\widehat{H}_2(m,n)=\max\left\{\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+\left[\dfrac{m}{2}\right],\ \left[\dfrac{n}{2}\right]\right\}$ (с применением метода усреднения второго порядка);

$\widehat{H}_3(m,n)=\left[\dfrac{n+m-1}{2}\right]$ (с применением метода усреднения третьего порядка).

В 2014 году Llibre и Makhlouf ([17]) доказали, что обобщенная полиномиальная система Льенара

$$\begin{cases}\dot{x}=y^{2p-1}\\ \dot{y}=-x^{2q-1}-\varepsilon f(x)y^{2n-1}\end{cases}, \tag{2}$$

где p,q и n – положительные целые числа, ε – малый параметр, $f(x,y)$ – полином степени m, который имеет $\left[\dfrac{m}{2}\right]$ предельных циклов. Система (2) с $p=q=n=1$ исследовалась Lins и др. ([18]) в 1977 году, а для $p=n=1$ и q произвольного изучалась Urbina и др. ([19]) в 1993 году.

1. Постановка задачи

В статье [20] авторы определяют наибольшее число малоамплитудных предельных циклов обобщенной полиномиальной системы Льенара специального класса

$$\begin{cases}\dot{x}=y^{2p-1}\\ \dot{y}=-x^{2q-1}-\varepsilon f(x,y)\end{cases}, \tag{3}$$

где p и q – целые положительные числа, ε – малый параметр, $f(x,y)$ – полином, степени m

$$f(x,y)=\sum_{i+j=0}^{m} a_{ij}x^i y^j.$$

Система (3) более общая, чем система (2) и при $\varepsilon=0$ становится гамильтоновой системой, которая имеет глобальный центр в начале координат. Авторы попытались выяснить, как много периодических орбит остается в системе, если ее возмутить малым ε. Исследование приводит к выводу, что для $\varepsilon\neq 0$ и достаточно малого, наибольшее число предельных циклов системы (3) ограничено величиной

$$\widehat{H}(p,q,l)=\left[\frac{l\cdot\max(p,q)-q}{2}\right], \tag{4}$$

где [ ] – целая часть числа, а l определяется условием

$$l=\begin{cases} m, \text{ } если \text{ } m \text{ - } нечетное \\ m-1, \text{ } если \text{ } m \text{ - } четное \end{cases}.$$

Таким образом, формула (4) позволяет оценить количество предельных циклов системы (3).

В работе [21] исследуются бифуркации малоамплитудных предельных циклов, которые могут возникать из начала координат обобщенной системы Льенара

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-g(x)-f(x)y \end{cases}, \tag{5}$$

где $f(x)=a_0+a_1x+\ \dots\ +a_nx^n$, $g(x)=x+b_2x^2+\ \dots\ +b_mx^m$. Авторы использовали метод расчета ляпуновских величин, предложенный ими, и с применением систем компьютерной математики Matlab и Maple, получили результаты, приведенные в таблице 1 ([21])

Таблица 1

	50			38														
	49	24	33	38														
	48	24	32	36														
	…	…	…	…														
с	13	6	9	10														
т	12	6	8	10														
е	11	5	7	8														
п	10	5	7	8														
е	9	4	6	8	9													
н	8	4	5	6	9													
ь	7	3	5	6	8													
	6	3	4	6	7													
f	5	2	3	4	6	6												
	4	2	3	4	4	6	7	8	9	9								
	3	1	2	2	4	4	6	6	6	8	8	8	10	10	…	36	38	38
	2	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	…	32	33	
	1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	…	24	24	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…	48	49	50
				с	т	е	п	е	н	ь		g						

В таблице 1 показано максимальное число малоамплитудных предельных циклов $\widehat{H}(n,m)$, которые могут возникать в системе (5) при изменении степеней n и m.

Сравним теперь системы (3) и (5), чтобы выяснить, могут ли они совпадать в определенных частных случаях. Прежде всего, очевидно, что $p=1$, а q может быть любым натуральным. Приравняем слагаемые $-f(x)y$ системы (5) и $-\varepsilon f(x,y)$ системы (3) и получим

$$a_0 y + a_1 xy + a_2 x^2 y + \ \dots\ + a_m x^m y = \varepsilon \sum_{i+j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j .$$

Равенство выполняется, если $j=1,\ 0 \le i \le m-1$ и $a_k = \varepsilon a_{i1}$. Следовательно, существуют такие частные случаи систем (3) и (5), что они формально совпадают.

2. Описание и первичный анализ результатов

Естественно возникает вопрос: как соотносятся между собой результаты расчетных формул (4) для системы (3) и табличные данные для системы (5). Мы произвели вычисления для нескольких значений параметра q . Результаты сведены в таблице 2.

Таблица 2

q	m	H1	H2	q	m	H1	H2	q	m	H1	H2
1	1	0		2	1	0		3	1	0	
1	2	0	0	2	2	0	1	3	2	0	2
1	3	1	1	2	3	2	2	3	3	3	3
1	4	1	1	2	4	2	2	3	4	3	4
1	5	2	2	2	5	4	4	3	5	6	6
1	6	2	2	2	6	4	4	3	6	6	6
1	7	3	3	2	7	6	6	3	7	9	
1	8	3	3	2	8	6	6	3	8	9	
1	9	4	4	2	9	8	6	3	9	12	
1	10	4	4	2	10	8	8	3	10	12	
1	11	5	5	2	11	10	8	3	11	15	
1	12	5	5	2	12	10	8	3	12	15	
1	12	6	6	2	13	12	10	3	13	18	
1	14	6	6	2	14	12	10	3	14	18	
1	15	7	7	2	15	14		3	15	21	

Значения q, m берутся для формулы (3), $H1$ – число предельных циклов, вычисленных по формуле (3), $H2$ – число предельных циклов согласно таблице 1.

Анализ приведенных данных говорит, что если для $q=1$ показатели $H1$ и $H2$ полностью совпадают, то для значений $q>1$ имеются расхождения. Эти расхождения нельзя объяснить, к примеру, тем, что система (3) возмущается малым ε, т.к. равенство $a_k = \varepsilon a_{i1}$ позволяет подобрать соответствующее a_k для системы (5).

Нам не удалось обнаружить предельный цикл, соответствующий второму методу для $q=2$, $m=2$. В этом случае $H1=0\neq 1=H2$.

Заключение

Возникшее несоответствие в результатах подсчета наибольшего числа малоамплитудных предельных циклов предполагает более тщательную проверку алгоритмов расчетов, а также их теоретического обоснования. Очевидно, что множества систем вида (3) и (5) имеют общие элементы, для которых любой метод должен приводить к одинаковым итогам. А поскольку пока это не так, то необходимы дальнейшие исследования.

References

1. J. Llibre, A.C. Merew and M.A. Teixeira. Limit cycles of the generalized polynomial Lienard differential equation. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2009), 1-21.
2. S. Lynch and C.J. Christopher. Limit cycles in highly non-linear differential equation. J. Sound Vib. 224 (1999), 505-517.

3. Yu. Ilyashenko, A. Panov, Some upper estimates of the number of limit cycles of planar vector fields with application to Lienard equations, Moscow Math. J. vol. 1, no. 4, 583-599.
4. N.G. Lloyd. Limit cycles of polynomial systems-some recent developments. London. Math. Soc. Lecture Note Ser. 127, Cambridge University Press. (1988), 192-234.
5. A. Lienard. Etude des oscillations entrenues. Revue Generale de l'Elictricite. 23 (1928), 946-954.
6. G.S. Rychkov. The maximum number of limit cycles of system $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5$, $\dot{y} = -x$ is two. Differential'nye Uravneniya. 11 (1975), 380-391.
7. A. Lins, W. de Melo and C.C. Pugh. On Lienard's equation. Lecture Notes in math. 597 (1977), Springer, 335-357.
8. W. A. Coppel. Some quadratic systems with at most one limit cycles. Dynamics Reportsd. vol. 2 Wiley (1998), 61-68.
9. F. Dumortier and C. Rousseau. Cubic Lienard equations with linear damping. Nonlinearity. 3 (1990), 1015-1039.
10. F. Dumortier and C. Li. On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Lienard equations. Nonlinearity. 9 (1996), 1489-1500.
11. F. Dumortier and Chengzhi. Quadratic Lienard equations with quadratic damping. J. Diff. Eqs. 139 (1997), 41-59.
12. N. G. Lloyd and S. Lynch. Small-amplitude limit cycles of certain Lienard systems. Pro. Royal. Soc. London Ser. A 418 (1988), 199-208.
13. C. J. Christopher and S. Lynch. Small-amplitude limit cycle bifurcates for Lienard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces. Nonlinearity. 12 (1999), 1099-1112.
14. A. Gasuall and J. Torregrosa. Small-amplitude limit cycles in Lienard systems via multiplicity. J. Diff. Eqs. 159 (1998), 1015-1039/
15. P. Yu and M. Han. Limit cycles in generalized Lienard systems. Chaos solitons fractals. 30 (2006), 1048-1068.
16. J. Llibre, A.C. Merew and M.A. Teixeira. Limit cycles of the generalized Lienard polynomial differential equations. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2009), 1-21.
17. J. Llibre and A. Makhlouf. Limit cycles of a class of generalized Lienard polynomial equations. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2014), 10-32.
18. A. Lins, W. Demelo and C. C. Pugh. On Lienard's equation. Lecture Notes in math. 597 (1977), Springer, 335-357.
19. A. M. Urbina, G. L. de la Barra, G. Leon, M. L. de la Barra, M. Canas. Limit cycles of Lienard equations with nonlinear damping. Canad Math Bull. 36 (1993), 251-256.
20. M. Hamanda and A. Maklouf. Limit cycles of class of generalized Lienard polynomial equations. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. vol. 12, number 2 (2016), 1831-1843.
21. S. Lynch. Symbolic computation of Lyapunov quantities and the second part of Hilbert's sixteenth problem. Trends in Mathematics: Differential Equations with Symbolic Computation, (2006), 1-22.

COMPARISON OF THE NUMBER OF LIMIT CYCLES
OF GENERALIZED LIENARD SYSTEMS OBTAINED
BY VARIOUS METHODS

Vladislav V. Machulis
A/Professor, Department of Mathematical Modeling
Tyumen State University
6 Volodarskogo St.
Tyumen 625003, Russia

The article presents the computation data for the maximum number of low-amplitude limit cycles for two types of generalized polynomial systems of differential equations that formally coincide in a certain set of particular cases. The first technique is based on the method of averaging and our own algorithm for calculating Lyapunov quantities computation, the second technique — on investigation of influence of small perturbations on the Hamiltonian system. Contrary to expectations, various techniques in some cases give inconsistent results.
Keywords: limit cycle, generalized Lienard equation, Hilbert's 16^{th} problem, weak focus.