УДК 519.622
doi: 10.18101/2304-5728-2017-1-18-22

О ВЫБОРЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ [1]

© Соловарова Любовь Степановна
кандидат физико-математических наук, программист
Институт динамики систем и теории управления имени
В.М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: soleilu@mail.ru

Для применения численных методов, разработанных для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей перед главной частью, необходимо задавать начальное условие. В отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме, это условие нельзя задавать произвольно, и оно должно быть согласовано с правой частью системы. В статье предлагается алгоритм выбора недостающих начальных условий для случая, когда начальные условия заданы не стандартным образом, а представляют собой условие Шоуолтера-Сидорова. Данный алгоритм основывается на некоторых фактах из теории проекторов. Основной результат статьи проиллюстрирован простым примером.
Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, начальное условие.

1. Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$A(t)y'(t)+B(t)y(t)=f(t),\ t\in[0,1], \tag{1}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – $(n\times n)$-матрицы, причем

$$\det A(t)\equiv 0. \tag{2}$$

Такие задачи принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями. Предполагается, что данная система имеет семейство решений типа Коши [1]

$$y(t,c)=\Phi(t)c+\int_0^t K_0(t,\tau)f(\tau)d\tau+\sum_{j=0}^{r}K_j(t)f^{(j-1)}(t), \tag{3}$$

где $\Phi(t)$, $K_0(t,\tau), K_1(t),\dots,K_r(t)$ – $(n\times n)$-матрицы, $rank\Phi(t)= =r=const\ \forall t\in[0,1], c\in R^n$, и на любом интервале $[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$ нет решений, отличных от (3). В этом случае r принято называть индексом исходной системы (1). При $r=0$ имеем систему с условием $\det A(t)\neq 0$,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 16-51-540002-Вьет_а, № 15-01-03228-а

$\forall t \in [0,1]$, т.е. систему, которую можно переписать в виде $y'(t) + A^{-1}(t)B(t)y(t) = \; = A^{-1}(t)f(t)$, а формула (3), содержащая только первые два слагаемых, будет известной формулой общего решения таких систем (см., напр., [2]). Для того чтобы выделить единственное решение системы (1) с условием (2) задают начальное условие $y(0) = y_0$, которое в отличие от классического случая нельзя выбирать произвольно, и оно должно быть согласовано с правой частью. Однако в ряде случаев для (1) задают начальные условия

$$Cy(0) = d, \tag{4}$$

где C – $(m \times n)$-матрица, и $m < n$.

Условие (4) для уравнений Соболевского типа называют условием Шоуолтера-Сидорова [3]. Типичной постановкой задач (1), (4) является задача фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости [4]

$$\partial u(x,t)/\partial t - \partial v(x,t)/\partial t = divR_1 gradu(x,t) + f_1, \tag{5}$$
$$\partial u(x,t)/\partial t - \partial v(x,t)/\partial t = divR_2 gradu(x,t) + f_2,$$
$$x \in [0,1], \;\; t \in [0,1],$$

с условием

$$u(x,0) - v(x,0) = g(x). \tag{6}$$

После простейшей дискретизации по пространственной переменной x, $x_j = jh$, $j = 0,1,...,N$, $h = 1/N$,

$$divR_1 gradu(x,t)\Big|_{x=x_i} \approx R_1(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2,$$
$$divR_2 gradu(x,t)\Big|_{x=x_i} \approx R_2(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2,$$

где $u_i(t) = u(x_i,t)$, $v_i(t) = v(x_i,t)$, задача (5),(6) будет иметь вид

$$\mathcal{A}y'(t) + \mathcal{B}y(t) = g(t), \; t \in [0,1],$$
$$\mathcal{C}\, y(0) = d,$$

где $y = (u_1(t), u_2(t),...,u_N(t), v_1(t), v_2(t),...,u_N(t))^T$. Матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ не приводятся в силу их громоздкости.

К настоящему времени разработаны численные методы решения различных классов ДАУ с заданными начальными условиями $y(0)$ (см., напр.,[5],[6]). Возникает вопрос, как применять данные алгоритмы, если начальные условия заданы в виде (4)? Этой задаче посвящен следующий параграф.

2. Выбор начальных условий

Начнем с определений и вспомогательных результатов.

Определение [7]. Матрица A^- называется полуобратной к матрице A, если она удовлетворяет матричному уравнению $AA^-A = A$.

Последнюю формулу перепишем в виде

$$(E - AA^-)A = 0. \tag{7}$$

Здесь E – единичная матрица подходящей размерности.

Лемма. Если $\ker D \cap \ker G = \varnothing$, то $\det(D^T D + G^T G) \neq 0$, где D и G – вещественные матрицы размером $l \times n$ и $m \times n$, соответственно.

Доказательство. В силу условия леммы 1

$$(Dx, Dx) + (Gx, Gx) > 0 \ \forall x \neq 0.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$(Dx, Dx) + (Gx, Gx) = (D^T Dx, x) + (G^T Gx, x) =$$
$$= ((D^T D + G^T G)x, x) > 0 \ \forall x \neq 0,$$

т.е. $D^T D + G^T G$ является невырожденной. *Лемма доказана.*

Из данной леммы и определения 1 следует алгоритм выбора начальных условий $y(0)$ для задачи (1),(4).

Утверждение. Если для задачи (1),(4) выполнено условие

$$\ker C \cap \ker(E - A(0)A^{-}(0))B(0) = \varnothing,$$

то $y(0)$ находится единственным образом из системы линейных алгебраических уравнений

$$[C^T C + [(E - A(0)A^{-}(0)B(0)]^T (E - A(0)A^{-}(0)B(0)]y(0) = \qquad (8)$$
$$= [(E - A(0)A^{-}(0)B(0)]^T (E - AA^{-}) f(0).$$

Доказательство. Полагая в (1) $t = 0$ и умножая обе части на матрицу $E - A(0)A^{-}(0)$. В силу формулы (7) имеем

$$(E - A(0)A^{-}(0)B(0)y(0) = (E - A(0)A^{-}(0)) f(0).$$

Данная система и условия (4) дают систему (8), которая вследствие условий утверждения и леммы имеет единственное решение. *Утверждение доказано.*

В заключение приведем иллюстративный пример.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix},$$
$$y_1(0) + c_2 y_2(0) = d.$$

Выясним, при каких значениях c_2 данная задача имеет единственное решение?

Умножая данную систему на матрицу

$$E - AA^{-} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

получим

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь в качестве полуобратной матрицы выступает псевдообратная матрица [2], [7].

Ядро этой матрицы будет $(c,c)^T$, $c \neq 0$. Ядром матрицы $\begin{pmatrix} 1 & c_2 \end{pmatrix}$, будет вектор $\begin{pmatrix} c_2 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, при $c_2=-1$ пересечением ядер матриц C и $E-A(0)A^{-}(0)B(0)$ будет непустым и, как нетрудно заметить, при $f(t)\equiv 0$ данная задача имеет множество решений вида $y_1(t)=ce^{-t/2}$, $y_2(t)=ce^{-t/2}$ $(d=0)$, где c – произвольное число, и не имеет решений при $d\neq 0$. При $c_2\neq -1$ решение однородной задачи будет единственным и равно

$$y_1(t)=\frac{d}{1+C_2}e^{-t/2},\ y_2(t)=-y_2(t).$$

Заключение

Предложенный алгоритм можно применять только для задач (1),(4), у которых $rankA(t)=\deg\det(\lambda A(t)+B(t))=m$ (условие «ранг-степень» [1]) и $rankC=m$. Для задач, которые не удовлетворяют этому условию, вычисление корректных начальных условий планируется провести в дальнейшем.

Литература

1. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996. — 280 с.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — Москва: Наука, 1986. — 576 с.

3. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Boston: VSP, 2003. — 216 pp.

4. Коновалов А. Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. — Новосибирск: Наука, 1988. — 166 с.

5. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — Пер. с англ. — Москва: Мир, 1999. — 685 с.

6. Brenan K. F., Campbell S. L., Petzold L. R. Numerical solution of Initial-Value Problems in Differental-Algebraic Equations — Philadelphia:Appl. Math., 1996. — 270 pp.

7. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980. — 222 с.

SAMPLING THE INITIAL CONDITIONS FOR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Lubov S. Solovarova
Cand. Sci. (Phys. and Math.)
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, SB RAS
134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia

To apply the numerical methods developed for systems of ordinary differential equations with a degenerate matrix in front of the principal part, it is necessary to set the initial condition. In contrast to the systems of ordinary differential equations in normal form, this condition cannot be set arbitrarily, and it should be consistent with the right part of the system.
An algorithm is proposed for sampling of deficient initial conditions for the case when the initial conditions are given not in the standard way, but represent the Showalter-Sidorov condition. This algorithm is based on some facts from the theory of projectors. In the article we have illustrated the results by a simple example.
Keywords: differential-algebraic equations, initial condition.