ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.9
doi: 10.18101/2304-5728-2017-2-3-7

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ПРИМЕРЫ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© Сонинбаяр Жамбаа
аспирант, Томский государственный университет
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

Длительные периоды наблюдения за частицами с одинаковой эрозией, находящимися в некоторой области фазового пространства микросостояний требуют использования и обоснования гипотезы о равновероятности всех доступных микросостояний. Эта гипотеза эквивалентна положению об эргодичности гамильтоновой системы, заключающейся в том, что последовательные измерения состояний отдельной частицы дают тот же результат, что и измерения состояния всей системы в целом. В статье рассматриваются некоторые последовательные теоремы и свойства сохраняющего меру преобразования динамических систем. В работе сделано некоторое обобщение таких важных свойств динамических систем как эргодичность, перемешивание, изоморфность и найдена их взаимосвязь, улучшены доказательства некоторых классических теорем.
Ключевые слова: последовательные теоремы и свойства сохраняющего меру преобразования динамических систем.

Введение

Эргодическая гипотеза в статистической физике — предположение о том, что средние по времени значения физических величин, характеризующих систему, равны их средним статистическим значениям, что и служит для обоснования статистической физики.

В физике и термодинамике эргодическая гипотеза утверждает, что за длительные периоды наблюдения время, проведенное частицей в некоторой области фазового пространства микросостояний с той же самой энергией, пропорционально объему этой области, т. е. все доступные микросостояния равновероятны за длительный период времени. В 2012 году физики впервые смогли экспериментально подтвердить положения эргодической теории, объясняющей свойства динамических систем. Исследование сразу двух коллективов ученых появилось в журнале Angewandte Chemie [1]. Коротко о нем пишет портал Physics World. Иными словами, последовательные и усредненные измерения состояний отдельной частицы дают тот же результат, что и измерения состояния всей системы в целом.

Авторы новой работы создали систему, которая позволяет удовлетворить оба этих требования. Экспериментальные частицы, параметры которых измеряли специалисты, находились не в жидкой среде, а в пористом материале, пронизанном каналами диаметром в несколько нанометров. В качестве изучаемых частиц использовались молекулы флуоресцентного красителя, а вся система была погружена в спиртовой раствор. Благодаря яркому излучению красителя исследователи могли следить за отдельными молекулами и с высокой точностью определять их положение. Параметры всей совокупности молекул исследователи определяли, используя метод ядерного магнитного резонанса. В итоге ученые показали, что измерения, выполненные для отдельных молекул и для системы в целом, дают идентичные результаты [1].

1. Постановка задачи

Динамическая система — множество элементов, для которых задана функциональная зависимость между временем и положением в фазовом пространстве каждого элемента системы. Эргодическая теория динамических систем изучает движения в пространствах с мерой. Пусть задано абстрактное пространство X, точки которого обозначаются буквами x, y, z. В дальнейшем это пространство будет служить фазовым пространством динамических систем. Мы предполагаем, что выделена некоторая σ–алгебра G подмножеств пространства X, на которой определена μ. Предполагается, что мера μ является нормированной $\mu(X)=1$ и полной, т. е. все подмножества множества меры нуль принадлежат G. Пространство с мерой обозначим (X,G,μ) и $\mu(X)=1$. Для удобства в понимании изложения дальнейшего материала введем некоторые определения.

Определение 1. Динамическая система называется эргодической, если для любого инвариантного множества A его мера $\mu(A)$ равна 0 или 1 [2].

Определение 2. Преобразование T_1 изоморфно с T_2, если T_1 на X_1 и T_2 на X_2 определены, и существует изоморфизм φ: $X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2$ такое, что $T_2\varphi = \varphi T_1$. Если теперь умножить слева на φ^{-1}, получим $\varphi^{-1}T_2\varphi = \varphi^{-1}T_1\varphi \Rightarrow \varphi^{-1}T_2\varphi = T_1$.

Определение 3. Пусть в пространстве (X,G,μ) задано T — сохраняющее меру эргодическое обратимое преобразование, т. е.: T: $X \to X$, $\mu(T^{-1}) = \mu(T)$. Преобразование T называется измеримым, если

$$\forall M \in G\,,\ T^{-1}M \in G\,,$$

где G есть σ–алгебра измеримых подмножеств в X.

2. Важные теоремы

Теорема 1. Поворот окружности с длиной 1 на любой иррациональный угол α – есть эргодическое преобразование.

Доказательство. Пусть T — неэргодическое преобразование, α — иррациональный угол. Это значит, что α и 1 несоизмеримые. Окружность имеет длину 1. Пусть C — есть инвариантное множество относительно преобразования T и $C \neq \varnothing, X$, тогда $TC = C$ и для $\forall x \in C$, $\chi_c(x+\alpha) = \chi_c$. Покажем, что индикатор χ_c этого множества из L_2:

$$\chi_c(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases}$$

а) $\lceil \chi_c(x) \rceil < C$ очевидно,

б) $\chi_c^2(x) = \chi_c(x) = 1$ или 0 в квадрате суммируемая.

Таким образом, $\chi_c(x)$ из L_2 значит, что ее можно разложить в ряд Фурье.

$\chi_c(x) = \sum_{n\in Z}(a_n e^{2\pi i x n})$,

$\chi_c(x+\alpha) = \sum_{n\in Z}(a_n e^{2\pi i (x+\alpha) n}) = \sum_{n\in Z}(a_n e^{2\pi i x n} e^{2\pi i \alpha n}) = \sum_{n\in Z}(a_n e^{2\pi i x n})$, здесь $a_n e^{2\pi i \alpha n} = a_n 1,\ \ e^{2\pi i \alpha n} = 1$. Обозначим $2\pi\alpha n = \varphi$, тогда $e^{i\varphi} = 1,\ \ \cos\varphi + i\sin\varphi = 1,\ \ \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots; \chi_c = 1$, но всюду это невозможно; $2\pi i n\alpha = 2\pi k i,\ \ n\alpha = k$, отсюда $\alpha = k/n$ — рациональное. Это противоречит условию, что α — иррациональное. Отсюда следует, что T есть эргодическое преобразование (другое, более длинное доказательство этого утверждения — в книге [3]). *Теорема доказана.*

Определение 4. Всякое измеримое отображение T измеримого пространства (M, G) в себя порождает оператор U_T, действующий в пространстве измеримых комплексных функций на M по формуле $(U_T f)(x) = f(Tx)$, U_T называется сопряженным с отображением T.

Определение 5. Сохраняющее меру преобразование $T:(X,\mu) \to (X,\mu)$ называется перемешиванием или, проще, перемешивает, если для любых двух измеримых множеств A и B из G: $\lim_{n\to x} \mu(T^{-n} A \cap B) = \mu(A)\cdot\mu(B)$. Это означает, что если взять любое множество B положительной меры, то всякое множество положительной меры A при своем движении, начиная с некоторого момента, все время будет пересекать множество B, причем мера той части A, которая в момент n попала в B, асимптотически пропорциональна мере B [2]. Именно это свойство объясняет происхождение выражения «множество A положительной меры при своем движении равномерно размешивается по фазовому пространству».

Теорема 2. Из перемешивания преобразования T следует его эргодичность.

Доказательство. Если дано перемешивающее преобразование T, т. е. для $\forall A, B \in G$, $\mu(T^n A) \cdot \mu(B) \to \mu(A) \cdot \mu(B)$ и пусть C инвариантное множество, т. е. $TC = C$, тогда $\lim_{n \to x} \mu(T^n C \cap C) = \mu(C)^2 \Rightarrow T^n C = C$ значит, $\mu(C) = \mu(C)^2$. Это возможно только в случаях, когда $\mu(C) = 0$ или $\mu(C) = 1$ что и означает эргодичность преобразования T. *Теорема доказана.*

Обратное утверждение неверно, т. е. из эргодичности преобразования T не следует его перемешивание.

Теорема 3. Пусть в пространстве (X, G, μ) задано T — сохраняющее меру обратимое преобразование. Если T и T^{-1} изоморфны, то унитарные операторы U_T, $U_{T^{-1}}$ — спектрально изоморфны, т. е.: $U_T \cong U_{T^{-1}}$.

Доказательство. Если задана функция $f \in L_2(X, \mu)$ и преобразование такое, что $U_T : f \to fT$, $f(x) \to f(Tx)$. Из свойства сохранения меры следует U_T –изометрия: $\|Uh\| = \|h\|$. Если T — обратимое преобразование, то U_T – унитарный оператор, т. е. $U_T^{-1} = U_{T^{-1}}$: $f \to fT^{-1}$, T^{-1} сохраняющее меру преобразование. Если T и S обратимые сохраняющие меру μ преобразования в (X, μ), то из этого следует, что U_T изоморфно с U_S; другими словами: $U_T \cong U_S$, значит, существует унитарный оператор V такой, что $U_T = VU_S V^{-1}$. Если T и S изоморфны, тогда существует обратимое преобразование σ такое, что $T = \sigma S \sigma^{-1}$ и существует U_σ такое, что $U_T = U_\sigma U_S U_\sigma^{-1}$, то U_T и U_S — спектрально изоморфны. Значит, в нашем случае: $U_T \cong U_{T^{-1}}$ — спектрально-изоморфны. *Теорема доказана.* Обратное неверно.

Существует эргодическое обратимое преобразование T такое, что T и T^{-1} не изоморфны. Пример такого преобразования построил японский ученый Г. Анзай [4]. Этот результат в дальнейшем так же может быть оформлен как теорема.

Заключение

Таким образом, в работе получено обобщение таких свойств как эргодичность, перемешивание и изоморфность. Найдена их взаимосвязь, а также улучшены доказательства отдельных теорий.

Литература

1. Single-particle and ensemble diffusivities - Test of ergodicity / Feil F. [et al] // Angewandte Chemie Internat. Edition. 2012. Vol. 51, No 5. P. 1152–1255.

2. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 384 с.

3. Каток А. Б., Хассеблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 156 с.

4. Anzai H. Ergodik skew product transformation on the torus // Osaka Mathematical Journal. 1951. Vol. 3, No 1. P. 83–99.

SOME CLASSICAL THEOREMS, PROPERTIES AND EXAMPLES OF ERGODIC THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS

Jambaa Soninbayar
Research Assistant,
Tomsk State University
36 Lenina Prospect, Tomsk 634050, Russia

Long periods of observation of particles with the same erosion in a certain area of the phase space of microstates require the use and justification of the hypothesis that all available microstates are equiprobable. This hypothesis is equivalent to provisions on ergodicity in Hamiltonian systems; the ergodicity is that consecutive measurements of the states of an individual particle give the same result as measurements of the state of a whole system. The article discusses a number of successive theorems and properties of measure-preserving transformations of dynamic systems. We have generalized some important properties of dynamical systems such as ergodicity, confusion, isomorphism, identified their relationships, improved proof of some classical theorems.
Keywords: successive theorems and properties of measure-preserving transformations of dynamic systems.